Jak animovat pohyb planety v GeoGebře

2. Parametrické rovnice elipsy

Žán Pól Kastról

29. července 2022

https://www.geogebra.org/m/m3q5cd4r

1 Parametrické rovnice ($\varphi \to x; y$)

Už při odvození *polární rovnice* elipsy

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \tag{1}$$

jsme se setkali s **pravou anomálií** (azimutem) φ planety (obr. 1) a se vztahy mezi kartézskými a polárními souřadnicemi planety:

$$x_P = r \cos \varphi + e \tag{2}$$

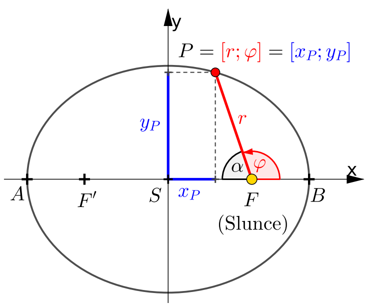
$$y_P = r \sin \varphi \tag{3}$$

Dosadíme (2) a (3) do (1) (vynecháme index P) a dostáváme parametrické rovnice elipsy s parametrem φ:

PREL ($\varphi \to x; y$)

$$x = \frac{p \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} + e \tag{4}$$

$$y = \frac{p \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \qquad \varphi \in \langle 0; 2\pi) \tag{5}$$

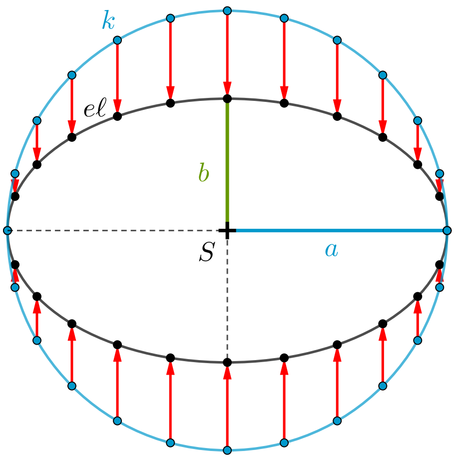


Obr. 1: Vztah mezi polárními a kartézskými souřadnicemi planety P.

2 Parametrické rovnice ($E \to x; y$)

2.1 Chvála stlačování kružnice!

Elipsu si můžeme vyrobit několika z působy (např. sekáním kužele, dvěma kolíky a provazem). Jednou z možností je také vhodné **stlačení kružnice** (obr. 2). Tuto vznešenou methodu použil Kepler při odvození



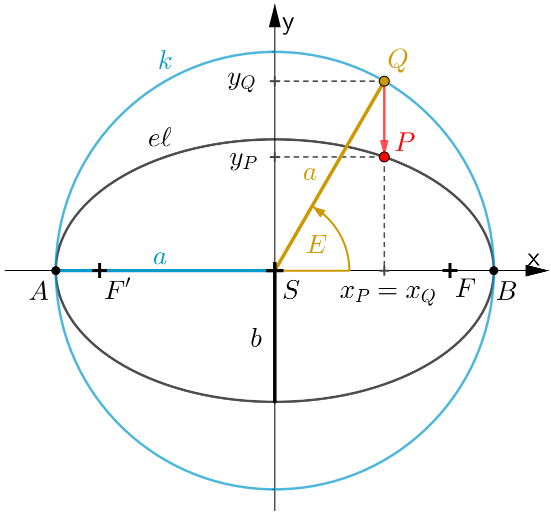
Obr. 2:

https://www.geogebra.org/m/zy3pzseb

své (Keplerovy) rovnice, které si později také ukážeme, pač tuto rovnici budeme potřebovat při animaci planety v GeoGebře.

Ale ještě vyčkej, nyní si nejprve ukážeme, jak methoda stlačení vede k jednoduchému odvození rovnic elipsy z rovnic kružnice (středové i rovnic parametrických).

Z kružnice k o poloměru a vznikla stlačením ve směru jejího libo-



Obr. 3

volného průměru elipsa $e\ell$ s hlavní poloosou a a s vedlejší poloosou b. Z úvah o tečně elipsy víme, že kružnice k se nazývá **hlavní kružnice elipsy**. **Poměr stlačení** je zřejmě

$$\boxed{\frac{b}{a} < 1} \tag{6}$$

Zvolíme soustavu souřadnic tak, že střed kružnice a elipsy S je v počátku a hlavní vrcholy elipsy A, B leží na ose x (obr. 3). Zaměříme se na libovolný bod kružnice Q, který přejde při stlačení do bodu P (*planeta* obíhající kolem Slunce, které je v ohnisku F).

Bod Q má v obrázku vedle **kartézských** souřadnic $[x_Q; y_Q]$ vyznačeny také souřadnice **polární** $[a; E]$.

Úhel $E = \angle BSQ$ se nazývá **excentrická anomálie planety**[1]. Je

[1] Úhel E hraje ústřední roli v *Keplerově rovnici*.

to orientovaný úhel měřený od hlavního vrcholu elipsy B (*perihélium*) k bodu Q (nikoliv k planetě P!).

Bod P má vyznačeny pouze souřadnice kartézské $[x_P; y_P]$, pač polární nebudeme potřebovat.

Z obrázku vidíme, že $x-$ová souřadnice bodu Q se stlačením nemění, ale $y-$ová souřadnice se zkrátí v poměru $\frac{b}{a}$. Pročež pro souřadnice bodu P platí:

$$x_P = x_Q \tag{7}$$

$$y_P = \frac{b}{a} \cdot y_Q \quad \to \quad y_Q = \frac{a}{b} \cdot y_P \tag{8}$$

Středová rovnice

Pojďme si nejprve ukázat pro zajímavost odvození středové rovnice. Původní kružnice má **středovou rovnici** ($\mathcal{SRK}$)

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Pročež pro pořadnice bodu Q musí platit

$$x_Q^2 + y_Q^2 = a^2 \tag{9}$$

Prdněmež (7) a (8) do (9). Dostaneme

$$x_P^2 + \frac{a^2}{b^2} y_P^2 = a^2$$

$$b^2 x_P^2 + a^2 y_P^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} = 1$$

Pač Q byl libo-volný bod kružnice, který přešel v bod P elipsy, dostáváme známou **středovou rovnici elipsy**:

SREL

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{10}$$

Parametrické rovnice

Stejná myšlenka se využije i v odvození parametrických rovnic elipsy, o které nám jde. Původní kružnice má **parametrické rovnici** ($\mathcal{PRK}$)

$$x = a \cos E$$
$$y = a \sin E \qquad E \in \langle 0; 2\pi)$$

Pročež pro pořadnice bodu Q musí platit

$$x_Q = a \cos E$$
$$y_Q = a \sin E$$

Sem dosadíme (7) a (8):

$$x_P = a \cos E$$
$$\frac{\cancel{a}}{b} \cdot y_P = \cancel{a} \sin E \to y_P = b \sin E$$

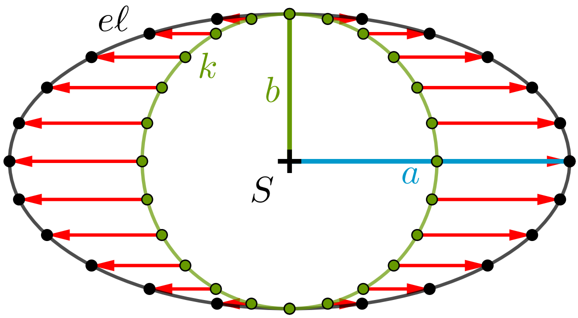
Pač Q byl libo-volný bod kružnice, který přešel v bod P elipsy, dostáváme **parametrické rovnice elipsy s excentrickou anomálií** E:

PREL $(E \to x; y)$

$$x = a \cos E \tag{11}$$
$$y = b \sin E \qquad E \in \langle 0; 2\pi) \tag{12}$$

Bacha! Znovu si uvědomme, že E není úhel měřený k bodu P (planetě) na elipse, ale k pomocnému bodu Q na její **hlavní** kružnici!

2.2 Roztažení kružnice



Obr. 4:

https://www.geogebra.org/m/u2bxc2cz

Elipsu však můžeme vyrobit i tak, že kružnici **roztáhneme** (obr. 4).

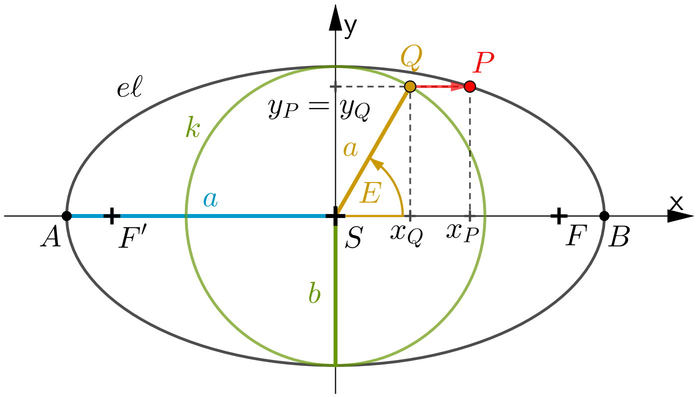
Z kružnice k o poloměru a vznikla roztažením ve směru jejího libovolného průměru elipsa $e\ell$ s hlavní poloosou a a s vedlejší poloosou b. **Poměr roztažení** je zřejmě

$$\boxed{\frac{a}{b} > 1} \tag{13}$$

Z obrázku 5 vidíme, že $y-$ová souřadnice bodu Q se roztažením nemění, ale $x-$ová souřadnice se natáhne v poměru $\frac{a}{b}$. Pročež pro souřadnice bodu P platí:

$$y_P = y_Q \tag{14}$$

$$x_P = \frac{a}{b} \cdot x_Q \quad \to \quad x_Q = \frac{b}{a} \cdot x_P \tag{15}$$



Obr. 5

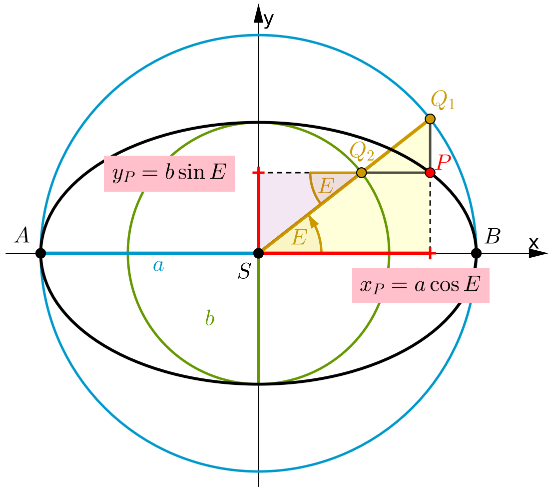
Podobně jako v případě stlačení bychom nyní mohli odvodit stejné rovnice, jako jsme odvodili pomocí stlačení. To už si můžeš zkusit sama, jo?

2.3 Trojúhelíkova konstrukce elipsy

Když si zakreslíme obě deformace (stlačení a roztažení) kružnice do společného obrázku, zjistíme, že z něj emanují obě parametrické rovnice elipsy zcela přirozeně (obr. 6).

Kromě toho z našeho obrázku plyne krástně *Trojúhelníkova* konstrukce elipsy[2] a taktéž důkaz *Rozdílové Proužkovy* konstrukce elipsy[3]

[2] https://www.geogebra.org/m/N5nfhNsR
[3] https://www.geogebra.org/m/fc2rGprQ



Obr. 6:

https://www.geogebra.org/m/yrdzec7h

3 Parametrické rovnice ($E \to r; \varphi$)

Porovnáním rovnic (2), (3) s (11), (12) dostáváme (po převedení e na opačnou stranu rovnice):

$$r \cos \varphi = a \cos E - e \tag{16}$$

$$r \sin \varphi = b \sin E \tag{17}$$

Rovnice frkneme na kva-drát a sečteme:

$$r^2 = a^2 \cos^2 E - 2ae \cos E + e^2 + b^2 \sin^2 E$$

Sem dosadíme $\sin^2 E = 1 - \cos^2 E$:

$$r^2 = a^2 \cos^2 E - 2ae \cos E + e^2 + b^2 - b^2 \cos^2 E$$

$$
\begin{aligned}
r^2 &= \underbrace{(a^2 - b^2)}_{e^2} \cos^2 E - 2ae \cos E + \underbrace{e^2 + b^2}_{a^2} \\
r^2 &= \left(a^2 - 2ae \cos E + e \cos E\right)^2 \\
r^2 &= (a - e \cos E)^2 \\
r &= \pm(a - e \cos E)
\end{aligned}
$$

Pač $r > 0, e < a, \cos E < 1$, má smysl jen kladné znaménko. Ještě můžeme dosadit $e = a\varepsilon$, vytknout a a dostáváme *vztah pro závislost vzdálenosti planety od Slunce na excentrické anomálii*:

$$
r = a(1 - \varepsilon \cos E) \tag{18}
$$

Z rovnice (16) vyjádříme $\cos \varphi$ a za r dosadíme (18):

$$
\begin{aligned}
\cos \varphi &= \frac{a \cos E - e}{r} \\
\cos \varphi &= \frac{a \cos E - a\varepsilon}{a(1 - \varepsilon \cos E)}
\end{aligned}
$$

Po zkrácení máme *vztah pro výpočet pravé anomálie z anomálie excentrické:*

$$
\cos \varphi = \frac{\cos E - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos E} \tag{19}
$$

Vztahy (18) a (19) jsou vlastně parametrické rovnice pro výpočet polárních souřadnic $[r; \varphi]$ pomocí parametru E:

PREL ($E \to r; \varphi$)

$$
r = a(1 - \varepsilon \cos E) \tag{20}
$$

$$
\cos \varphi = \frac{\cos E - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos E} \qquad E \in \langle 0; 2\pi) \tag{21}
$$

Poznámka: Vyloučením členu $\cos E$ z rovnic (18) a (19) dostaneme snadno *polární rovnici* elipsy (1). To už si můžeš zkusit sama.

4 Elipsa zadaná v GeoGebře parametricky ($E \to x; y$)

https://www.geogebra.org/m/kuwrfqp3

https://www.geogebra.org/m/pghtxjgd

Δ

Da Sista Les

∞