Modellieren der Cheops-Pyramide

Lösungsvorschlag

1. Aufgabe

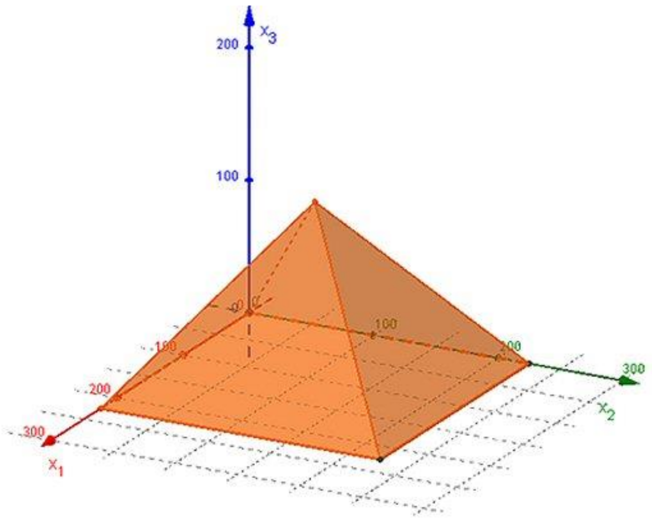
a) *Reales Modell*

Die reale Cheops-Pyramide ist aus Steinblöcken aufgebaut, sodass ihre Oberfläche nicht aus ebenen Dreiecken besteht. Für das Modell wird die Pyramide als Pyramide im mathematischen Sinn angenommen. Für das Modell wird weiterhin angenommen, dass die Grundfläche ein Quadrat ist und dass die Pyramide regelmäßig ist. Aufgrund dieser Vereinfachungen werden die Längenangaben im realen Modell auf ganze Meter gerundet.

b) *Mathematisches Modell*

Bei passender Wahl des Koordinatensystems sind die Eckpunkte des Quadrates z.B. O(0|0|0), A(225|0|0), B(225|225|0) und C(0|225|0).

Der Mittelpunkt des Quadrates ist (112,5|112,5|0), die Spitze der Pyramide ist also S(112,5|112,5|139).



c) *Seitenflächen*

Für jede der Dreiecksfläche gilt:

$$A = \frac{1}{2}\,|\vec{s} \times \vec{a}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}112,5\\112,5\\139\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}225\\0\\0\end{pmatrix}\right| =$$

$$112,5\cdot\sqrt{139^2 + 112,5^2} \approx 20117,5$$

Die Seitenflächen sind etwa 20117 m² groß.

Länge der Steilkanten

$$s = \left|\begin{pmatrix}112,5\\112,5\\139\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2\cdot 112,5^2 + 139^2} \approx 211$$

Die Steilkanten sind etwa 211 m lang.

Winkel an der Spitze

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{SO}\cdot\vec{SA}|}{|\vec{SO}|\cdot|\vec{SA}|} = \frac{|\vec{SO}\cdot\vec{SA}|}{211^2}, \text{ da } |\vec{SO}| = |\vec{SA}| \approx 211$$

$$= \frac{1}{211^2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-112,5\\-112,5\\-139\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}112,5\\-112,5\\-139\end{pmatrix}\right| = \frac{139^2}{211^2} \approx 0,434 \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 64,3\,°.$$

Neigungswinkel

Richtungsvektor der Seitenhalbierenden des Dreiecks OAS: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 112{,}5 \\ 139 \end{pmatrix}$.

Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\sin(\beta) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{139}{\sqrt{112{,}5^2 + 139^2}} \approx 0{,}777 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 51°$$

Volumen

… der ursprünglichen Pyramide: $V_1 \approx \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 147 \approx 2592100$

… der heutigen Pyramide: $V_2 \approx \frac{1}{3} \cdot 225^2 \cdot 139 \approx 2345625$

$$\frac{V_1 - V_2}{V_1} \approx 0{,}095$$

Es wurden etwa 9,5 % des ursprünglichen Volumens abgetragen.

d) Die realen Daten der heutigen Cheops-Pyramide sind:

- Neigungswinkel: 51° 50′
- Gesamtvolumen der ursprünglichen Pyramide ohne Abzug der Hohlräume: ≈ 2,58 Millionen m³
- ursprüngliche Mantelfläche: etwa 85.500 m²
- Durchschnittliche Maße der sichtbaren Steinblöcke: 1,0 m in Breite, Höhe und Tiefe.
- Durchschnittliches Gewicht eines Steinblocks: 2,5 Tonnen
- geschätzte Anzahl aller Steinblöcke: 2,3 Millionen
- geschätzte Gesamtmasse der Pyramide: 6,25 Millionen Tonnen

Unterschiede zwischen der Realität und den mathematischen Ergebnissen werden vor allem durch die Idealisierung der Form der Pyramide verursacht. Anstelle eines aus etwa 1 m hohen Schichten von quadratischen Quadern gebildeten Körpers wird ein kontinuierlich mit der Höhe abnehmender Durchmesser angenommen.

Diese Annahme führt dazu, dass die berechneten Ergebnisse größer sind als die realen Werte. Zur Verbesserung der Ergebnisse sollte die Höhe der Modellpyramide angepasst werden.

Lösungsvorschlag

2. Aufgabe

a)

Koordinaten

Ursprünglicher Eingang	$A(115 \mid 215 \mid 16)$
Anfang des aufsteigenden Korridors	$B(115 \mid 193 \mid 5)$
Ende des aufsteigenden Korridors	$C(115 \mid 157 \mid 22)$
Mittelpunkt der Königinnenkammer	$D(115 \mid 115 \mid 22)$
Ende der großen Galerie	$E(115 \mid 113 \mid 44)$
Mittelpunkt der Königskammer	$F(115 \mid 103 \mid 44)$

…

Geradenabschnitte

absteigender Korridor AB $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 115 \\ 215 \\ 16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -22 \\ -11 \end{pmatrix};\quad 0 \le t \le 1$

aufsteigender Korridor BC $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 115 \\ 193 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 17 \end{pmatrix};\quad 0 \le t \le 1$

große Galerie CE $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 115 \\ 157 \\ 22 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -44 \\ 22 \end{pmatrix};\quad 0 \le t \le 1$

letzter horizontaler Abschnitt EF $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 115 \\ 113 \\ 44 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix};\quad 0 \le t \le 1$

a) *Länge des Weges vom Eingang bis zur Königskammer*

$$|\overrightarrow{AB}| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -22 \\ -11 \end{pmatrix} \right\| = 11\sqrt{5} \approx 24{,}6$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 17 \end{pmatrix} \right\| \approx 39{,}8$$

$$|\overrightarrow{CE}| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -44 \\ 22 \end{pmatrix} \right\| = 22\sqrt{5} \approx 49{,}2$$

$$|\overrightarrow{EF}| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 10$$

Der Weg ist insgesamt etwa 123,6 m lang.

Gefälle des absteigenden Korridors

Richtungsvektor des absteigenden Korridors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -22 \\ -11 \end{pmatrix}$

$|\vec{u}| \approx 11 \cdot \sqrt{5} \approx 24{,}6$

Winkel gegenüber der x_1x_2-Ebene $\sin(\alpha) \approx \frac{11}{24{,}6} \approx 0{,}447$

$\tan(\alpha) = 0{,}5$

Der absteigende Korridor hat 50 % Gefälle.

Winkel der Geraden AB zur ursprünglichen Seitenfläche

Normalenvektor der Seitenfläche $\vec{n} = \begin{pmatrix} 115 \\ -115 \\ 147 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 230 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 230 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 147 \\ 115 \end{pmatrix}$

$|\vec{n}| \approx 230 \cdot 186{,}64 = 42927{,}2$

Winkel $\sin(\beta) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} \approx 0{,}9800$

$\beta \approx 78{,}5°$

Der Winkel des absteigenden Korridors gegenüber der Seitenfläche ist etwa 78,5°.

Steigung der großen Galerie

Richtungsvektor des aufsteigenden Korridors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 17 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor der großen Galerie $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -44 \\ 22 \end{pmatrix}$ steiler als BC

Steigung gegenüber der x_1x_2-Ebene $\tan(\alpha) = 0{,}5$

Die große Galerie hat 50 % Steigung.

Abstand der Königskammer zur ursprünglichen Seitenfläche

Ebene der Seitenfläche in Koordinatenform $147\, x_2 + 115\, x_3 = 33810$

Abstand des Punktes F zur Seitenfläche $d = \frac{33810 - (147 \cdot 103 + 115 \cdot 44)}{186{,}64} \approx 72{,}9$

Der Fußbodenmittelpunkt der Königskammer hatte zur ursprünglichen Seitenfläche mit dem Eingang etwa 73 m Abstand.