Matematikuppgift			**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**
Antagningsprov svarsform			**b**																														
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	5p

1. Talen a och b är reella. Givet att $x = (a+b\sqrt{3})^3 - (a-b\sqrt{3})^3$, så gäller att x är lika med

   (a) $2ab(3a+b)$; (b) $6b\sqrt{3}(a^2+b^2)$; (c) $2b(3a^2+b^2)$; (d) inget av (a)-(c).

1. Talen a och b är reella. Givet att $x = \left(a + b \cdot \sqrt{3}\right)^3 - \left(a - b \cdot \sqrt{3}\right)^3$, så gäller att x är lika med

(**a**) $2ab(3a+b)$ (**b**) $6b\sqrt{3}(a^2+b^2)$ (**c**) $2b(3a^2+b^2)$ (**d**) inget av (**a**)-(**b**)-(**c**)

Lösning:

Omvandlar $\left(a + b \cdot \sqrt{3}\right)^3 - \left(a - b \cdot \sqrt{3}\right)^3$ med hjälp av

en konjugatregel: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

där a i regeln får representeras av $\left(a + b \cdot \sqrt{3}\right)$ och b i regeln får vara $\left(a - b \cdot \sqrt{3}\right)$

Förenklar $(a-b)(a^2+ab+a^2) =$

$$\left(\left(a + b \cdot \sqrt{3}\right) - \left(a - b \cdot \sqrt{3}\right)\right)\left(\left(a + b \cdot \sqrt{3}\right)^2 + \left(a + b \cdot \sqrt{3}\right)\left(a - b \cdot \sqrt{3}\right) + \left(a - b \cdot \sqrt{3}\right)^2\right)$$

$$= 2b \cdot \sqrt{3} \cdot \left(a^2 + 2ab \cdot \sqrt{3} + 3b^2 + a^2 - 3b^2 + a^2 - 2ab \cdot \sqrt{3} + 3b^2\right) =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot b \cdot \left(3a^2 + 2ab \cdot \sqrt{3} + 3b^2 - 3b^2 + -2ab \cdot \sqrt{3} + 3b^2\right) =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot b \cdot (3a^2 + 3b^2 - 3b^2 + 3b^2) =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot b \cdot (3a^2 + 3b^2) =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot b \cdot (a^2 + b^2) =$$

$$= 6 \cdot b \cdot \sqrt{3} \cdot (a^2 + b^2)$$ vilket är alternativ (**b**)

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform				b																													
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

2. Om a och b är reella tal så är villkoret *"minst ett av talen a och b är skilt från 0"* ekvivalent med

(a) $ab \neq 0$; (b) $a^2 + b^2 \neq 0$; (c) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \neq 0$; (d) inget av (a)-(c).

2. Om a och b är reella tal så är villkoret " *minst ett av talen a och b är skilt från 0* " ekvivalent med

(**a**) $ab \neq 0$ (**b**) $a^2 + b^2 \neq 0$ (**c**) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \neq 0$ (**d**) inget av (**a**)-(**b**)-(**c**)

(**a**) $ab \neq 0$ kan ej vara sant , då om *a* = 0 och *b* = 3 så är " minst ett av talen skilt från 0 " men *ab* = 0 ändå

(**b**) $a^2 + b^2 \neq 0$ är sant , då om *a* = 0 och *b* = 3 så är " minst ett av talen skilt från 0 " och $a^2 + b^2$ = positivt då kvadrater är positiva och vi får en summa av antingen två positiva tal eller en summa av ett positivt tal och 0 , i båda fallen positiv summa och därmed ≠ 0 .
(**c**) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \neq 0$ ∞ är ej detsamma som 0 , division med 0 ger ∞ och vi kan få antingen två positiva kvoter (*a* positivt och *b* positivt eller *a* negativt och *b* negativt) eller två negativa kvoter (*a* positivt och *b* negativt eller *a* negativt och *b* positivt) i båda fallen skiljt från 0 men det kräver att **både** *a* och *b* är skiljda från 0.
("minst ett av dem" räcker ej)

Svaret är alltså (**b**) .

Lista med exempel:

a	b	V.L. i (**a**): ab	V.L. i (**b**): $a^2 + b^2$	V.L. i (**c**): $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$	(**a**) (**b**) (**c**) sant/falskt
3	0	$3 \cdot 0 = 0$	$3^2 + 0^2 = 9$	$\frac{3}{0} + \frac{0}{3} = \infty + 0$	(**a**): falskt (**b**): sant (**c**): falskt
0	2	$0 \cdot 2 = 0$	$0^2 + 2^2 = 4$	$\frac{0}{2} + \frac{2}{0} = 0 + \infty$	(**a**): falskt (**b**): sant (**c**): falskt
0	0	$0 \cdot 0 = 0$	$0^2 + 0^2 = 0$	$\frac{0}{0} + \frac{0}{0} = \infty + \infty$	(**a**): falskt (**b**): falskt (**c**): falskt
3	2	$3 \cdot 2 = 6$	$3^2 + 2^2 = 13$	$\frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6} \approx 2{,}17$	(**a**): sant (**b**): sant (**c**): sant

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform					c																												
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

3. Om x är ett reellt tal och $\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2-2x+1} = -2$, så gäller

(a) $x \geq 1$; (b) $-1 \leq x \leq 1$; (c) $x \leq -1$; (d) inget av (a)-(c).

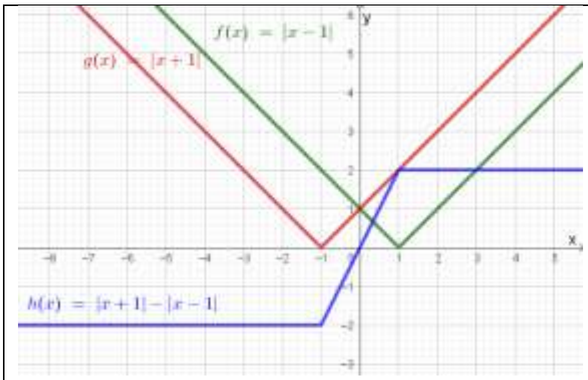
3. Om x är ett reellt tal och $\sqrt{x^2+2x+1}$ - $\sqrt{x^2-2x+1}$ = -2 så gäller

(a) $x \geq 1$ **(b)** $-1 \leq x \leq 1$ **(c)** $x \leq -1$ (**d**) inget av (**a**)-(**b**)-(**c**)

Minns först att $\sqrt{x^2} = \text{abs}(x) = |x|$ alltså absolutbeloppet av x (alltid positivt eller $= 0$)

$\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$ och
$\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{(1-x)^2} = |x-1| = |1-x|$

ritar graferna för $|x+1|$ och $|x-1|$



Här kan man se att
(**c**) gäller: $x \leq -1$

för stora positiva tal exempelvis x = 10 , så

$|x+1|$ - $|x-1|$ = 11 – 9 = 2 (positivt)

för negativa tal exempelvis x = -10 , så

$|x+1|$ - $|x-1|$ = 9 – 11 = -2 (negativt)

Vid $x = 0$ $|x+1|$ - $|x-1|$ = $1 - 1 = 0$

och

vid $x \geq 1$ har båda graferna positiv lutning $k = 1$

och

vid $x \leq -1$ har båda graferna negativ lutning $k = -1$

däremellan är lutningskillnaden 2 (1 – (-1) = 2) mellan graferna och detta gäller linjärt
$\mathbf{-1 \leq x \leq 1}$

alltså gäller (**c**) $\mathbf{x \leq -1}$

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform						d																											
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

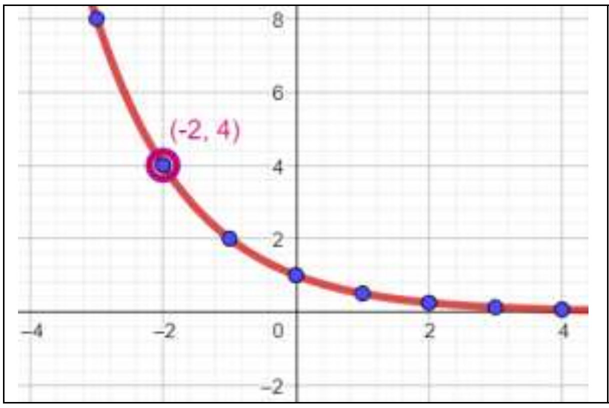
4. Olikheten $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$ är ekvivalent med olikheten

(a) $x < 0$; (b) $x < 2$; (c) $x < -2$; (d) inget av (a)-(c).

4. Olikheten $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$ är ekvivalent med olikheten

(a) $x < 0$ **(b)** $x < 2$ **(c)** $x < -2$ **(d)** inget av (**a**)-(**b**)-(**c**)

Graf och värdetabell för $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0{,}5^x$ kan ses nedan :



X	Y_1
TABLE	0.5^x
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0.5
2	0.25
3	0.13
4	0.06
5	0.03
6	0.02

x ska alltså vara större än -2 för att värdena för $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$, men det stämmer ej med

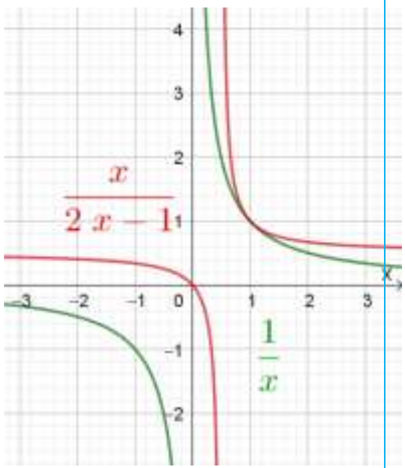
någon av alternativen (**a**) , (**b**) eller (**c**) , eftersom $x > -2$ ej är med. Alltså gäller (**d**)

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform							c																										
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

5. Alla lösningar till olikheten $\frac{x}{2x-1} \geq \frac{1}{x}$ ges av

(a) alla negativa x samt alla $x \geq 1$; (b) alla reella x;

(c) alla negativa x samt alla $x > \frac{1}{2}$; (d) inget av (a)-(c).



5. Alla lösningar till likheten $\frac{x}{2x-1} \geq \frac{1}{x}$ ges av

(**a**) alla negativa x samt alla $x \geq 1$

(**b**) alla reella x

(**c**) alla negativa x samt alla $x > \frac{1}{2}$

(**d**) inget av (**a**)-(**b**)-(**c**)

värdetabell åt sidan: , värdena x = ½ = 0,5 och x = 0 måste undersökas

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2
$\frac{1}{x}$ H.L. (höger led)	-0,5	-0,67	-1	-2	∞	4	2	1,33	1	0,67	0,5
$\frac{x}{2x-1}$ V.L. (vänster led)	0,4	0,375	0,33	0,25	0,167	-0,5	∞	1,5	1	0,75	0,67
$\frac{x}{2x-1} \geq \frac{1}{x}$	sant	sant	sant	sant	odefinierat	falskt	odefinierat	sant	sant	sant	sant

båda funktionerna växlar värde och lutning enligt följande: (asymtoter anges också)

x	$-\infty \leftarrow$	0^-	0^+	$0{,}5^-$	$0{,}5^+$	$\rightarrow \infty$
$\frac{1}{x}$	0^- (närmar sig från negativt)	$-\infty$ (från negativt)	∞ (från positivt)	2	2	0^+ (närmar sig från positivt)
$\frac{x}{2x-1}$	$0{,}5^-$ (närmar sig från lägre värden än 0,5)	0,167	0,167	∞	∞	$0{,}5^+$ (närmar sig från högre värden än 0,5)

(**c**) alla negativa x samt alla $x > \frac{1}{2}$ **stämmer**, endast i intervallet $0 < x < \frac{1}{2}$ ligger $\frac{1}{x}$ på högst värden.
asymtoterna visar att varken för $x \rightarrow -\infty$ eller $x \rightarrow +\infty$ så korsas funktionernas kurvor.

Matematikuppgift	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform						c																									
Ma/Fy CTH KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024 SU GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

6. Om $x \boxplus y = |x| - \big||x+y| - |y|\big|$ för alla reella tal x och y, så gäller för alla reella x och y att

(a) $x \boxplus y = y \boxplus x$; (b) $(2x) \boxplus (-x) = 2x$;
(c) $x \boxplus y \geq 0$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

6. Om $x \boxplus y = |x| - \big||x+y| - |y|\big|$ för alla reella tal x och y , så gäller för alla reella tal x och y att

(**a**) $x \boxplus y = y \boxplus x$

(**b**) $(2x) \boxplus (-x) = 2x$

(**c**) $x \boxplus y \geq 0$

(**d**) inget av (**a**)-(**b**)-(**c**) gäller generellt

Vi kan visa att (**c**) gäller , vi kan också hitta motexempel till (**a**) och (**b**) .

Låt oss först gå igenom resonemanget om varför $x \boxplus y \geq 0$, detta kan visas genom att visa att

(då $x \boxplus y = |x| - \big||x+y| - |y|\big|$)

$|x|$ alltid är större än eller lika med $\big||x+y| - |y|\big|$.

låt oss säga att ditt mål är att göra en operator som ska leda till så stort tal som möjligt (anta t ex att det är pengar, och du vill ha så mycket pengar som möjligt) Välj mellan två saker: (1) operatorn är att ta beloppet av ditt x $\|x\|$ (1) ta belopp av x $\|x\|$ då får du ett positivt tal (eller noll) , trevligt (2) operatorn är att 2a först lägga till ett nytt tal som kan vara positivt eller negativt (y) : $x + y$, 2b sedan ta beloppet av denna summa (av två tal som var dör sig är positiva eller negativa) $\| x + y \|$, 2c och sedan subtrahera beloppet av det nya talet $\| x + y \|$ - $\|y\|$, 2d och sist ta beloppet av denna subtraktion/differens $\|\|x+y\| - \|y\|\|$	skillnaden mellan operator (1) och operator (2) är att operator (2) aldrig kan generera ett högre tal än operator (1) . Detta på grund av att om y är positivt blir det i) +-0 ingen skillnad , ifall x är positivt ii) +-0 ingen skillnad , ifall x är 0 iii) ett lägre tal för (2) än för (1), ifall x är negativt och om y är negativt blir det iv) +- 0 ingen skillnad , ifall x är negativt v) +-0 ingen skillnad , ifall x är 0 vi) ett lägre tal för (2) än för (1), ifall x är positivt (om y = 0 blir det förstås ingen skillnad 😊) skillnaden mellan operator (1) och operator (2) är alltså att i operator (2) kan inblandningen av y aldrig leda till ett högre tal än vad operator (1) ger $\|x\| \geq \big\|\|x+y\| - \|y\|\big\|$ alltså $\|x\| - \big\|\|x+y\| - \|y\|\big\| \geq 0$ så (**c**) gäller

(**c**) $x \boxplus y \geq 0$, $y > 0$	(**c**) $x \boxplus y \geq 0$, $y < 0$	motexempel till (**a**)
i) $y > 0$ och $x > 0$ ($x = 3$, $y = 2$) $\|3\| - \big\|\|3+2\| - \|2\|\big\| = 3 - 3 = 0$	iv) $y < 0$ och $x < 0$ ($x = -7$, $y = -2$) $\|-7\| - \big\|\|-7+(-2)\| - \|(-2)\|\big\| = 7 - 7 = 0$	motbevisa (**a**) med $x = -2$, $y = 1$ (**a**) $x \boxplus y \overset{?}{=} y \boxplus x$
ii) $y > 0$ och $x = 0$ ($x = 0$, $y = 2$) $\|0\| - \big\|\|0+2\| - \|2\|\big\| = 0 - 0 = 0$	v) $y < 0$ och $x = 0$ ($x = 0$, $y = -2$) $\|0\| - \big\|\|0+(-2)\| - \|(-2)\|\big\| = 0 - 0 = 0$	$\|x\| - \big\|\|x+y\| - \|y\|\big\|$ $\|-2\| - \big\|\|-2+1\| - \|1\|\big\| = 2 - 0 = 2$ $\|1\| - \big\|\|1+(-2)\| - \|-2\|\big\| = 1 - 1 = 0$
iii) $y > 0$ och $x < 0$ ($x = -7$, $y = 2$) $\|-7\| - \big\|\|-7+2\| - \|2\|\big\| = 7 - 3 = 4$	vi) $y < 0$ och $x > 0$ ($x = 3$, $y = -2$) $\|3\| - \big\|\|3+(-2)\| - \|-2\|\big\| = 3 - \|(-1)\| = 2$	. . . så $x \boxplus y = 2$, medans $y \boxplus x = 0$, så dessa är ej lika

motexempel till (**b**) $(2x) \boxplus (-x) \overset{?}{=} 2x$ med $x = -2$, $y = 1$ ger $|2x| - \big||2x + (-x)| - |-x|\big|$

vänster led: V.L. höger led: H.L. $|2x| - \big||x| - |-x|\big|$ som för $x = -2$ ger

V.L. : $|2 \cdot (-2)| - \big||-2| - |-(-2)|\big| = 4 - 0 = 4$ och H.L. $= 2x = 2 \cdot (-2) = -4$, alltså är V.L. $\neq$ H.L.

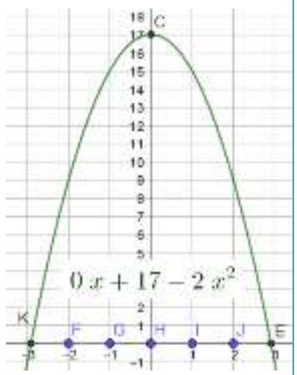
Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform									b																								
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

7. Antalet heltalslösningar till olikheten $bx + 17 - 2x^2 > 0$, där b är ett reellt tal, är

(a) 0; (b) ändligt, skilt från 0; (c) oändligt; (d) kan ej avgöras.

7. Antalet heltalslösningar till olikheten $bx + 17 - 2x^2 > 0$, där b är ett reellt tal, är

(**a**) 0 (**b**) ändligt, skilt från 0 (**c**) oändligt (**d**) kan ej avgöras



Med b = 0 , så

$-\ 2x^2 + 17 = 0$ ger lösningarna $x_1 = \sqrt{\frac{17}{2}} \approx 2{,}92$ och $x_2 = -\sqrt{\frac{17}{2}} \approx -2{,}92$

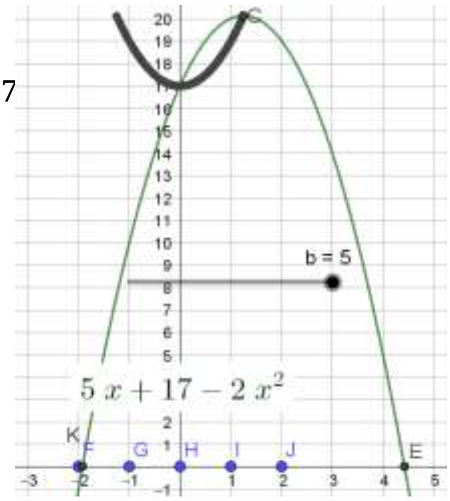
Detta ger de 5 heltalslösningarna x_F = -2 , x_G = -1 , x_H = 0 , x_I = 1 , x_J = 2

med

x	x_F = -2	x_G = -1	x_H = 0	x_I = 1	x_J = 2
$f(x) = -\ 2x^2 + 17$	$f(-2)$ = 9	$f(-1)$ = 16	$f(0)$ = 17	$f(1)$ = 16	$f(2)$ = 9

För alla andra b : b > 0 samt b > 0 ser andragradskurvan ut så att lösningarna till olikheten $bx + 17 - 2x^2 > 0$ blir 5 eller fler än 5 , men alltid ändligt , då b är ett ändligt tal , samt skilt från 0 , då lösningarna blir 5 eller fler.

(**c**) är alltså korrekt.



på bilden-grafen visas hur maxpunkten ***C*** på $f(x) = bx - 2x^2 + 17$ varierats inom intervallet $-5 \leq b \leq 5$,

Vid b = 5 har antalet heltalslösningar utökats till 6 st ,
och de kan alltså bara bli 5 eller fler än 5 . De är 5 som minst,
t ex då b = 0 .

Då $-\ 2x^2 + bx + 17 = 0$ har $x_{1,2} = -\frac{b}{4} \pm \sqrt{\frac{b^2}{16} + 8{,}5}$

som lösningar vilka spänner över ett intervall $\pm\sqrt{8{,}5}$ alltså ±2,92
alltså inom 2 2,92 = 5,84 stort intervall eller större (för större b) ,
så kommer heltalslösningar, 5 elller fler , alltid att inrymmas
för olikheten $bx + 17 - 2x^2 > 0$, (**b**) är alltså rätt svar

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform										a																							
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	5p

8. Givet är ekvationen $az^2 + bz + c = 0$, där $abc \neq 0$. Två av de tre koefficienterna a, b, c är reella och en är icke-reell. Då kan man dra slutsatsen att ekvationen **inte** är ekvivalent med någon ekvation $Az^2 + Bz + C = 0$, där

(a) alla tre koefficienterna är reella;

(b) alla tre koefficienterna är icke-reella;

(c) en koefficient är reell och två av koefficienterna är icke-reella;

(d) inget av (a)-(c), den kan vara ekvivalent med ekvationer av alla tre typerna.

8. Givet är ekvationen $az^2 + bz + c = 0$, där $abc \neq$ 0. Två av de tre koefficienterna a, b, c är reella och en är icke-reell. Då kan man dra slutsatsen att ekvationen **inte** är ekvivalent med någon ekvation $Az^2 + Bz + C = 0$, där

(**a**) alla tre koefficienterna är reella;

(**b**) alla tre koefficienterna är icke-reella;

(**c**) en koefficient är reell och två av koefficienterna är icke-reella ;

(**d**) inget av (a)-(b)-(c), den kan vara ekvivalent med ekvationer av alla tre typerna :

Du kan få en reell produkt av två icke-reella komplexa tal , då kan det t ex vara två konjugat:

(3 + 2*i*) (3 - 2*i*) = 9 + 4 = 13 (reellt)   (även 5*i* · 5*i* = -25 (reellt))

Men två reella tal blir alltid reellt förstås: ex: 2 · 3 = 6

Och ett reellt tal gånger ett icke-reellt komplext tal blir alltid icke-reellt komplext:

5 · (3 + 2*i*) = 15 + 10*i*

(**a**) De kan ej vara ekvivalenta, så: Ja, man kan dra den slutsatsen. För att förstå varför, låt oss analysera ekvationen i detalj: **Koefficienterna i den ursprungliga ekvationen:** Två av koefficienterna a, b, och c är reella. En av koefficienterna är icke-reell (komplex). **Ekvivalens och komplexitet:** En ekvation $Az^2 + Bz + C = 0$ med alla koefficienter reella kan endast ha reella eller komplexa rötter som förekommer i konjugerade par (på grund av att koefficienterna är reella). En ekvation $az^2 + bz + c \;=\; 0$ med en icke-reell koefficient kan ha komplexa rötter som inte nödvändigtvis är konjugerade. Exempelvis komplext *b*: $b = b_1 + b_2 i$ ger vi följande ekvation: $az^2 + (b_1 + ib_2)z + c = 0$ Denna ekvation är inte ekvivalent med någon	(**b**) Nej, man kan ej säga icke ekvivalent, d.v.s. de **kan** vara ekvivalenta Man kan förkorta de tre koefficienterna varav två reella och en icke-reell med ett icke-reellt tal , och få en ekvation med tre icke-reella tal $az^2 \;+\; bz \;+\; c \;=\; 0$ där $2z^2 \;+ (4 + i)z \;+\; 3 \;=\; 0$ om det divideras med icke-reella *i* : $\dfrac{2z^2 \;+ (4 + i)z \;+\; 3}{i} \;=\; \dfrac{0}{i}$ $-2iz^2 \;+ (1 - 4i)z - 3i = 0$ och här kan förstås de två ekvationerna vara ekvivalenta eftersom de kan förlängas och förkortas med *i* fram och tillbaka.	(**c**) Nej, man kan ej säga icke ekvivalent, från (fram och tillbaka) två koefficient är reella och en av koefficienterna är icke-reell till en koefficient är reell och två av koefficienterna är icke-reella är möjligt Betrakta ekvationen $1 \cdot z^2 \;+ (3 + 2i)z \;+\; 2 \;=\; 0$ Om vi nu väljer just konjugatet till den komplexa koefficienten $3 + 2i$ som är $3 - 2i$ att förlänga med så fås $(1 \cdot z^2 \;+ (3 + 2i)z \;+\; 2)(3 - 2i) \;=\; 0$ $(3 - 2i) \cdot z^2 \;+ 13z \;+\; 6 - 4i \;=\; 0$ Vi har alltså , genom att multiplicera med ett konjugat , visat att två sådana här ekvationer är ekvivalenta. en med två reella och en icke-reell koefficient och en med en reell och två icke-reella koefficienter

ekvation av formen $Az^2 + Bz + C = 0$ där A, B, och C är reella, eftersom: Om b är icke-reell, så påverkar dess imaginära del ekvationens lösningar på ett sätt som inte kan representeras av reella koefficienter. Konjugerade rötter (om de finns) i en ekvation med reella koefficienter uppstår på grund av att alla koefficienter är reella, vilket inte är fallet här. Därmed är det omöjligt att omvandla en ekvation med en icke-reell koefficient till en ekvivalent ekvation där alla koefficienter är reella.		

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform											b																						
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

9. Givet är ekvationen $az^2 + bz + c = 0$, där $abc \neq 0$. Två av de tre koefficienterna a, b, c är reella och en är icke-reell. Då kan man dra slutsatsen att

(a) en av ekvationens lösningar är reell och den andra icke-reell;

(b) minst en av ekvationens lösningar är icke-reell;

(c) minst en av ekvationens lösningar är reell;

(d) inget av (a)-(c).

9. Givet är ekvationen $az^2 + bz + c = 0$, där $abc \neq 0$. Två av de tre koefficienterna a, b, c är reella och en är icke-reell. Då kan man dra slutsatsen att

(**a**) en av ekvationens lösningar är reell och den andra icke-reell;

(**b**) minst en av ekvationens lösningar är icke-reell;

(**c**) minst en av ekvationens lösningar är reell;

(**d**) inget av (a)-(b)-(c)

Lösningarna kan utgå från en lösningsform som innebär division med *a* så att *a* blir 1 (det vill säga reell)

$z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a} = 0$ med lösningarna : $z_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{c}{a}}$ eller $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

diskriminanten Δ kallas $\sqrt{b^2 - 4ac}$

Eftersom en av koefficienterna är icke-reell och de andra två är reella, kan vi undersöka tre fall:

a är icke-reell och b, c är reella:	**b är icke-reell och a, c är reella:**	**c är icke-reell och a, b är reella:**
I detta fall blir diskriminanten: $\Delta = b^2 - 4ac$ Eftersom a är icke-reell och både b och c är reella, kommer termen $4ac$ att vara icke-reell. Så, Δ kommer att vara icke-reell, och därmed kommer kvadratroten ur Δ att vara icke-reell, vilket leder till att både z_1 och z_2 är komplexa tal (icke-reella).	I detta fall blir diskriminanten: $\Delta = b^2 - 4ac$ Eftersom b är icke-reell och både a och c är reella, kommer b^2 att vara icke-reell. Så Δ kommer att vara icke-reell, och därmed kommer kvadratroten ur Δ att vara icke-reell, vilket leder till att både z_1 och z_2 är komplexa tal (icke-reella).	I detta fall blir diskriminanten: $\Delta = b^2 - 4ac$ Eftersom c är icke -reell och både a och b är reella, kommer termen $4ac$ att vara icke-reell. Så, Δ kommer att vara icke-reell, och därmed kommer kvadratroten ur Δ att vara icke-reell, vilket leder till att både z_1 och z_2 är komplexa tal (icke-reella).

I alla dessa fall kan vi se att lösningarna till ekvationen kommer att vara komplexa tal om en av koefficienterna är icke-reell medan de andra två är reella. Därför kan vi inte dra slutsatsen att en lösning är reell och den andra icke-reell. Båda lösningarna kommer att vara icke-reella (komplexa).

(**b**) gäller då , eftersom då båda är icke-reellla så gäller ju även att minst en av dem är icke-reell.

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform												c																					
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

10. Priset för en förpackning av en viss produkt har ökat med 10%, medan innehållets vikt har minskat med 10%. Kilopriset för produkten har då ökat med

(a) mindre än 20%; (b) exakt 20%; (c) mer än 20%; (d) det går inte att avgöra.

10. Priset för en förpackning av en viss produkt har ökat med 10%, medan innehållets vikt har minskat med 10%. Kilopriset för produkten har då ökat med

(**a**) mindre än 20%; (**b**) exakt 20%; (**c**) mer än 20%; (**d**) det går inte att avgöra:

Exempel: **5 kronor** för **2 kg** mjöl ger ett kilopris på 5 kr / 2 kg = 2,5 kr/kg

men om priset ökar med 10 % till 5,5 kr
för en förpackning på 1,8 kg så fås 5,5 kr / 1,8 kg = 3,0555 kr/kg

Procentuella skillnaden är $\frac{3{,}0555-2{,}5}{2{,}5} = 0{,}222$ alltså 22 % höjning, mer än 20 % , alltså (**c**)

Detta gäller alla priser: $\frac{\frac{1{,}1}{0{,}9}x\ -\ 1x}{1x}$ i kiloprisökning blir $\frac{1{,}1}{0{,}9} - 1 = 1{,}22222 - 1 = 0{,}222 = 22$ %

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform													a																				
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

11. Antalet reella lösningar till ekvationen $9e^{2x} + ae^{x} - 1 = 0$ för $a > 0$ är

(a) 1; (b) 2; (c) kan ej avgöras; (d) inget av (a)-(c).

11. Antalet reella lösningar till ekvationen $9e^{2x} + ae^{x} - 1 = 0$ för $a > 0$ är

(**a**) 1; (**b**) 2; (**c**) kan ej avgöras; (**d**) inget av (a)-(b)-(c)

Lösning:

med substitutionen $e^{x} = t$, så blir

$9e^{2x} + ae^{x} - 1 = 0$

till

$9t^2 + a \cdot t - 1 = 0$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ger

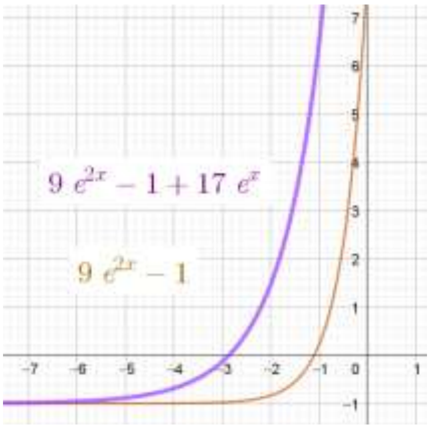
$$t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9}$$

med $e^{x} = t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4\cdot 9\cdot 1}}{2\cdot 9}$ som har en

positiv lösning och en negativ lösning , eftersom

$\sqrt{a^2 + 36} > a$, den negativa lösningen är omöjlig, då $e^{x} > 0$ för alla reella x ,

Då återstår bara en lösning, alltså gäller alternativ (**a**).



Bruna grafen / formeln: $9e^{2x} - 1 = 0$ där -1/3 och 1/3 , är lösningar till e^{x} ,
och 1/3 ger *x* = ln (1/3) = -1,0986 (se bild)

Blå grafen/formeln: $9e^{2x} - 1 + 17e^{x} = 0$ där
-1,946 och 0,057 , är lösningar till e^{x} ,
och 0,057 ger *x* = ln (0,057) = -2,86 (se bild)

Matematikuppgift	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform												c																			
Ma/Fy CTH KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024 SU GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

12. För alla positiva reella tal x och y gäller att

(a) $\ln x + \ln y = \ln x \cdot \ln y$; (b) $\ln x + \ln y = \ln(x+y)$;

(c) $\ln x + \ln y = \ln(xy)$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

12. För alla positiva reella tal x och y gäller att

(a) $\ln x + \ln y = \ln x \cdot \ln y$ **(b)** $\ln x + \ln y = \ln(x + y)$

(c) $\ln x + \ln y = \ln(xy)$ **(d)** inget av (a)-(b)-(c) gäller generellt

Att (**c**) gäller är en känd logaritmlag , (**c**) $\ln x + \ln y = \ln(xy)$, och kan lätt visas med heltal gällande $\lg$ istället för $\ln$, men gäller oavsett bas för logaritmen , vi visar (a)-(b)-(c) för några exempel :

	V.L:	(**a**) H.L:	(**b**) H.L:	(**c**) H.L:
	$\ln x + \ln y$	$\ln x \cdot \ln y$	$\ln(x+y)$	$\ln(xy)$
$x = e^2$, $y = e^3$	$\ln e^2 + \ln e^3 =$ $= 2 + 3 = 5$	$\ln e^2 \cdot \ln e^3 =$ $= 2 \cdot 3 = 6$	$\ln(e^2 + e^3) =$ ln(110???0) = = 3???1	$\ln(e^2 \cdot e^3) =$ $= \ln(e^5) = 5$
$x = e^2$, $y = e$	$\ln e^2 + \ln e =$ $= 2 + 1 = 3$	övre exempel visar att likhet ej gäller generellt	övre exempel visar att likhet ej gäller generellt	$\ln(e^2 \cdot e) =$ $= \ln(e^3) = 3$

motsvarande	V.L:	(**a**) H.L:	(**b**) H.L:	(**c**) H.L:
med $\lg$ istf $\ln$	$\lg x + \lg y$	$\lg x \cdot \lg y$	$\lg(x+y)$	$\lg(xy)$
$x = 100$, $y = 1000$	lg 100 + lg 1000 = = 2 + 3 = 5	lg 100 · lg 1000 = 2 · 3 = 6	lg(100 + 1000) = lg(1100) = = 3,041	lg(100 · 1000) = = lg(100000) = 5
$x = 100$, $y = 10$	lg 100 + lg 10 = = 2 + 1 = 3	övre exempel visar att likhet ej gäller generellt	övre exempel visar att likhet ej gäller generellt	lg(100 · 10) = = lg(1000) = 3

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform															a																		
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

13. För alla positiva reella tal x och p gäller att

(a) $p \ln x = \ln x^p$; (b) $p \ln x = (\ln x)^p$;

(c) $p \ln x = \ln(x + e^p)$ (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

13. För alla positiva reella tal x och p gäller att

(a) $p \ln x \;= \ln x^p$ **(b)** $p \ln x \;= (\ln x)^p$

(c) $p \ln x \;= \ln(x + e^p)$ **(d)** inget av (a)-(b)-(c) gäller generellt

Att **(a)** gäller är en känd logaritmlag , **(a)** $p \ln x \;= \ln x^p$, och kan lätt visas med heltal gällande $\lg$ istället för $\ln$, men gäller oavsett bas för logaritmen , vi visar (a)-(b)-(c) för några exempel :

	(a) V.L:	**(a)** H.L:	**(b)** V.L:	**(b)** H.L:	**(c)** V.L:	**(c)** H.L:
	$p \ln x$	$\ln x^p$	$p \ln x$	$\ln(x + e^p)$	$p \ln x$	$(\ln x)^p$
$p = 2$, $x = e^3$	$2 \cdot \ln e^3 =$ $2 \cdot 3 = 6$	$\ln (e^3)^2 =$ $\ln e^6 = 6$	$2 \cdot \ln e^3 =$ $2 \cdot 3 = 6$	$\ln(e^3 + e^2) =$ 3,313	$2 \cdot \ln e^3 =$ $2 \cdot 3 = 6$	$(\ln e^3)^2 =$ $= 3^2 = 9$
$p = 3$, $x = e^2$	$3 \cdot \ln e^2 =$ $3 \cdot 2 = 6$	$\ln (e^2)^3 =$ $\ln e^6 = 6$	övre exempel visar att likhet ej gäller generellt		övre exempel visar att likhet ej gäller generellt	

motsvarande	**(a)** V.L:	**(a)** H.L:	**(b)** V.L:	**(b)** H.L:	**(c)** V.L:	**(c)** H.L:
med $\lg$ istf $\ln$	$p \lg x$	$\lg x^p$	$p \lg x$	$\lg(x + 10^p)$	$p \lg x$	$(\lg x)^p$
$p = 2$, $x = 1000$	$2 \cdot \lg 1000 =$ $2 \cdot 3 = 6$	$\lg 1000^2 =$ $\lg 1000000 = 6$	$2 \cdot \lg 1000 =$ $2 \cdot 3 = 6$	$\lg(1000 + 10^2)$ $= \lg(1100) =$ 3,041	$2 \cdot \lg 1000 =$ $2 \cdot 3 = 6$	$(\lg 1000)^2 =$ $= 3^2 = 9$
$p = 3$, $x = 100$	$3 \cdot \lg 100 =$ $3 \cdot 2 = 6$	$\lg 100^3 =$ $\lg 1000000 = 6$	övre exempel visar att likhet ej gäller generellt		övre exempel visar att likhet ej gäller generellt	

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																d																	
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

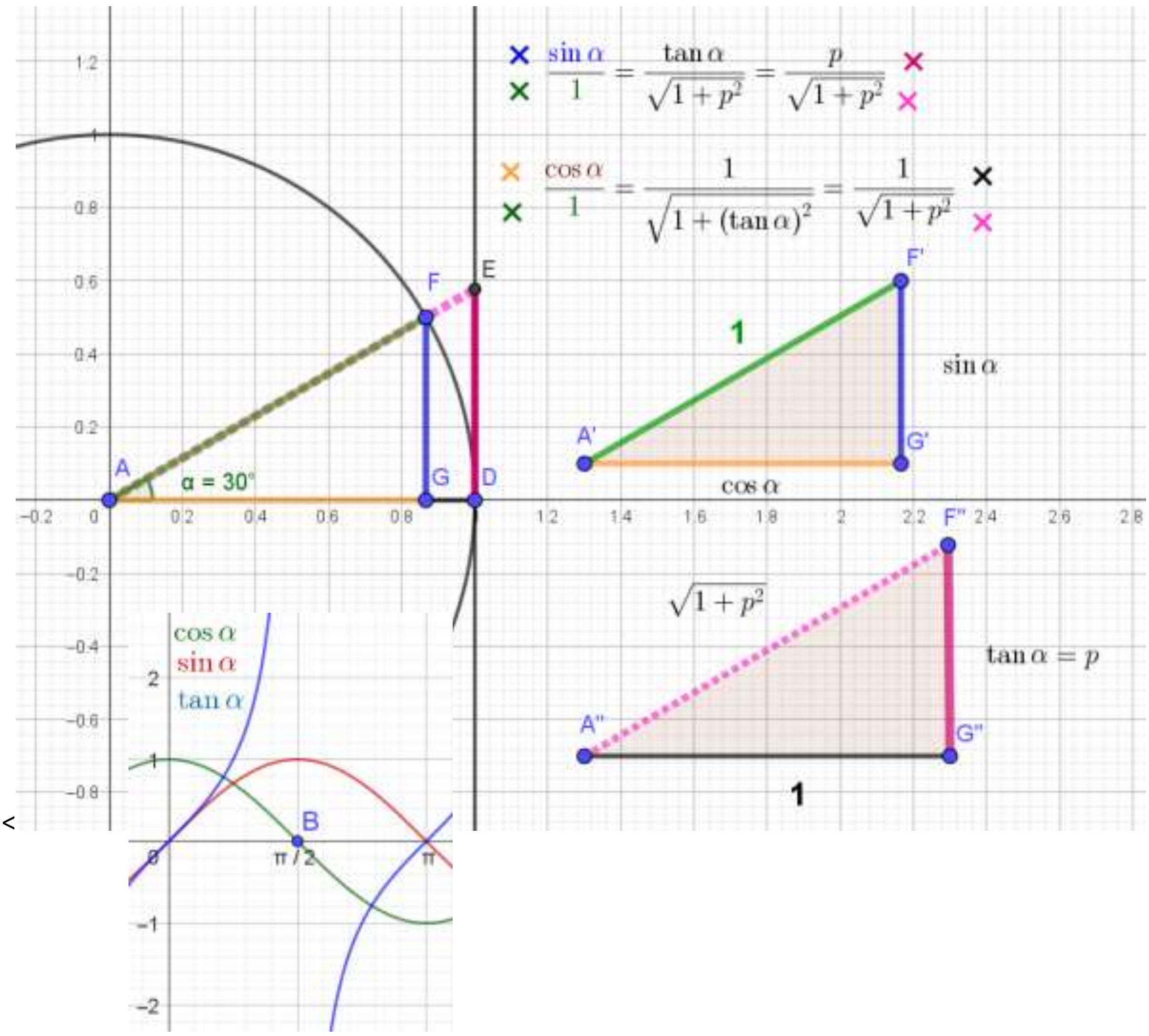
14. Om $\sin\alpha > 0$ och $\tan\alpha = p$, så gäller att $\cos\alpha$ är lika med

(a) $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$; (b) $\frac{|p|}{\sqrt{1+p^2}}$; (c) $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

14. Om $\sin\alpha > 0$ och $\tan\alpha = p$, så gäller att $\cos\alpha$ är lika med

(**a**) $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ (**b**) $\frac{|p|}{\sqrt{1+p^2}}$ (**c**) $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ (**d**) inget av (a)-(b)-(c) gäller generellt:

om $\sin\alpha > 0$, så är $0 < \alpha < \pi$ (med periodicitet av $n \cdot 2\pi$, $n = \pm 0 , 1 , 2 , 3$) .
$\cos\alpha$ kan inte definieras i detta intervall, eftersom $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ligger mitt i intervallet
och
för $\alpha = \frac{\pi}{2}$ så gäller $\tan\frac{\pi}{2} = \pm\infty$ alltså kan inte (**c**) vara korrekt , utan vi väljer (**d**)



<

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																	a																
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

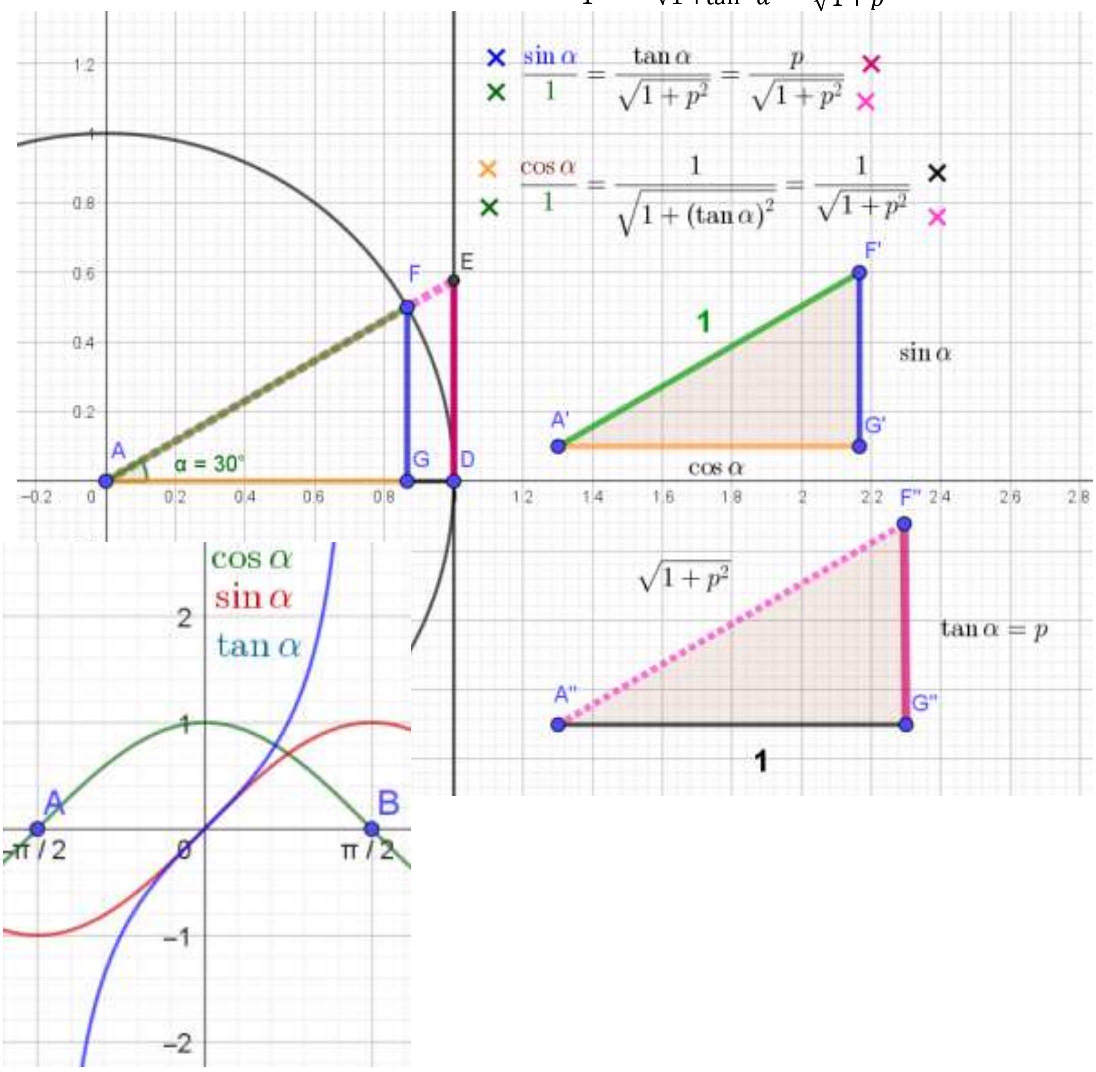
15. Om $\cos\alpha > 0$ och $\tan\alpha = p$, så gäller att $\sin\alpha$ är lika med

(a) $\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$; (b) $\dfrac{|p|}{\sqrt{1+p^2}}$; (c) $\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

15. Om $\cos\alpha > 0$ och $\tan\alpha = p$, så gäller att $\sin\alpha$ är lika med

(**a**) $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ (**b**) $\frac{|p|}{\sqrt{1+p^2}}$ (**c**) $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ (**d**) inget av (a)-(b)-(c) gäller generellt:

Om $\cos\alpha > 0$, så är $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (med periodicitet av $n \cdot \pi$, $n = \pm 0, 1, 2, 3 \ldots$) .
På detta sätt - eller – i och med detta – undviks singulariteterna där $\alpha = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ och $\tan\frac{\pi}{2} = \pm\infty$.
Från likformigheten med trianglarna där $\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ vilket ger alternativ (**a**).



Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																		**b**															
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	5p

16. Om $\alpha \in [0, 2\pi]$, så gäller

(a) $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; (b) $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$;

(c) $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$; (d) ingen av formlerna gäller generellt.

16. Om $\alpha \in [\,0\,, 2\pi\,]$, så gäller

(a) $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

(b) $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

(c) $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$

(d) ingen av formlerna (a)-(b)-(c) gäller generellt.

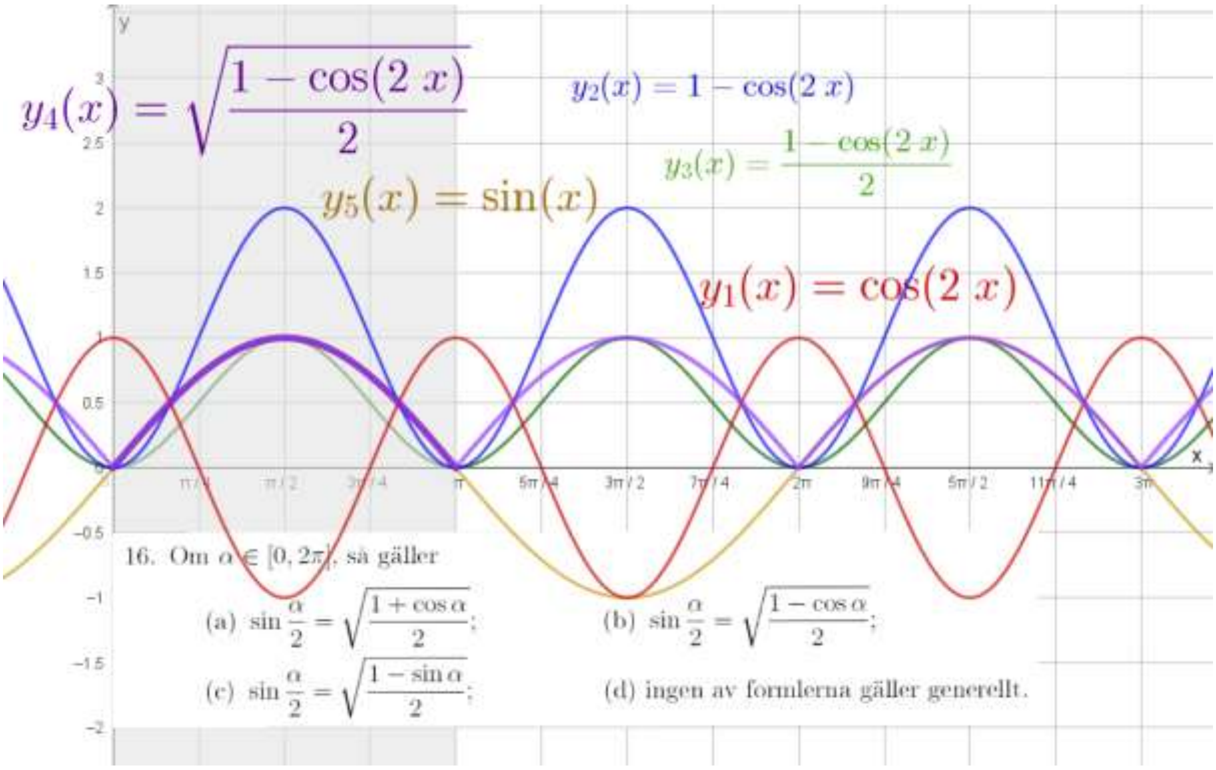
$$\sin 2v = 2\sin v\cos v$$

$$\cos 2v = \begin{cases} \cos^2 v - \sin^2 v & (1) \\ 2\cos^2 v - 1 & (2) \\ 1 - 2\sin^2 v & (3) \end{cases}$$

från formelblad Ma4:

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

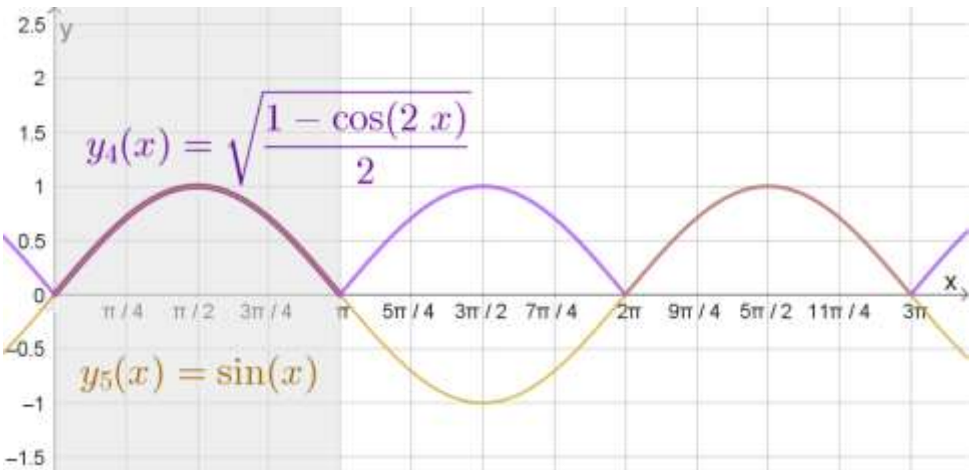
$\cos 2v = 1 - 2\sin^2 v =$ $2\sin^2 v = 1 - \cos 2v$ bb $\sin^2 v = \frac{1\,-\,\cos 2v}{2}$ $\sin v = \pm\sqrt{\frac{1\,-\,\cos 2v}{2}}$ och med $\alpha = 2v$, $\alpha/2 = v$	Det är bara cosinus för dubbla vinkeln som kan leda fram till ett uttryck liknande de i (a)-(b)-(c) , och av dessa är det **(b)** som är likt. anledningen att ± -tecknet är överflödigt beror på intervallet som endast ger positiva värden (se grafer, nästa sida)	$\sin v = \sqrt{\frac{1\,-\,\cos 2v}{2}}$ motsvarar då $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1\,-\,\cos\alpha}{2}}$ med intervallet $0 < \alpha < 2\pi$ (det vill säga alla vinklar α)



här kan man i bilden på graferna ovan se att uttrycket sin(x) = $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$ i intervall 0 < x < π

vilket motsvarar att sin($\frac{\alpha}{2}$) = $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ i intervall 0 < α < 2π , alltså alternativ (**b**)

Här är tecknet enbart positivt , vilket gör att ± är överflödigt i uttrycket på vänster sida.



Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																			b														
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	5p

17. Ekvationen $x^2+bx+c=0$, där koefficienterna b och c är reella tal, har lösningarna $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{23}}{2}$. Man kan då dra slutsatsen att

(a) både b och c är heltal; (b) minst ett av talen b och c inte är ett heltal;

(c) varken b eller c är heltal; (d) inget av (a)-(c).

17. Ekvationen $x^2 + bx + c = 0$, där koefficienterna b och c är reella tal, har lösningarna

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{23}}{2}$. Man kan då dra slutsatsen att

(**a**) både b och c är heltal

(**b**) minst ett av talen b och c inte är ett heltal

(**c**) varken b eller c är heltal

(**d**) inget av (a)-(b)-(c)

Lösning:

$x^2 + bx + c = 0$ har lösningarna $x = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4\cdot c}}{2}$

vilket ger $\frac{\sqrt{b^2 - 4\cdot c}}{2} = \frac{\sqrt{23}}{2}$, förenklat $b^2 - 4\cdot c = 23$ och $c = \frac{b^2 - 23}{4}$

(a) kan motbevisas genom motexempel: b = 5 (heltal) ger

$c = \frac{5^2 - 23}{4} = \frac{25-23}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5$ (ej heltal)

(b) är sant , kan bevisas genom exempel ? - för (d) utesluts ju då . . .

Det finns inga heltal x där $x^2 - 23$ är exakt delbart med 4,
eftersom x^2 inte kan motsvara 3 mod 4.

(c) kan motbevisas genom samma motexempel som i (a) b = 5 och c = 0,5

. . . men det är förstås MÖJLIGT att varken b eller c är heltal , exempel :

$c = \frac{b^2 - 23}{4}$ med b = 6,7 ger $c = \frac{6{,}7^2 - 23}{4} = 5{,}4725$

utveckling av alternativ (**b**) , att minst ett av talen b och c inte är ett heltal :

Vi börjar med att ställa upp villkoret $b^2 - 23 \equiv 0 \pmod{4}$

Det skulle innebära att $b^2 \equiv 23 \pmod{4}$ och då att $b^2 \equiv 3 \pmod{4}$

nu undersöker vi vilka kvadrater som är möjliga $\bmod 4$

Om $b \equiv 0 \pmod{4}$, då är $b^2 \equiv 0 \pmod{4}$
Om $b \equiv 1 \pmod{4}$, då är $b^2 \equiv 1 \pmod{4}$
Om $b \equiv 2 \pmod{4}$, då är $b^2 \equiv 4 \equiv 0 \pmod{4}$
Om $b \equiv 3 \pmod{4}$, då är $b^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod{4}$

Från ovanstående ser vi att b^2 aldrig kan vara $3 \bmod 4$, vilket innebär att det inte finns något heltal b där $b^2 \equiv 23$ är delbart med 4 .

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																				d													
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	5p

18. En triangel har sidlängderna $\sqrt{11}$, $\sqrt{39}$, $\sqrt{92}$ längdenheter. Den minsta vinkeln i triangeln är då

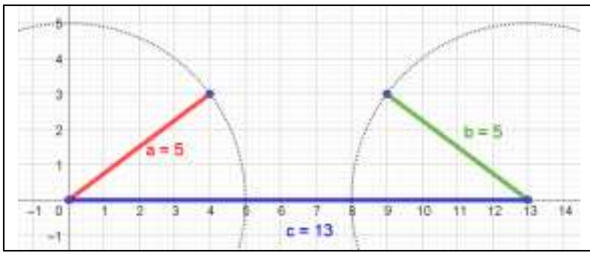
(a) 30°; (b) skild från 30°;

(c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.

18. En triangel har sidlängderna $\sqrt{11}$, $\sqrt{39}$, $\sqrt{92}$ längdenheter. Den minsta vinkeln i triangeln är då

(**a**) 30° (**b**) skild från 30°

(**c**) det går inte att avgöra (**d**) det finns ingen sådan triangel:



exempel på triangelolikheten, när en triangel inte kan göras av tre längder *a* , *b* och *c* : 5 l.e. + 5 l.e. = 10 l.e. , kan inte mötas över en sträcka på 13 l.e.

$c > a + b$

längd i l.e.	$\sqrt{92}$	$\sqrt{39}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{39}$ + $\sqrt{11}$
längd i l.e. (längdenheter)	9,59	6,24	3,32	6,24 + 3,32 = 9,56 det går alltså inte att göra en triangel av dessa tre längder, på grund av triangelolikheten: $c > a + b$ detta ger (**d**) som rätt svar
vår beteckning:	c	a eller b	a eller b	

Bevisning utan möjlighet till räknare/kalkylator av rot-uttryck: (√)

För att bevisa att $\sqrt{92} > \sqrt{39} + \sqrt{11}$ så kvadrerar vi båda sidor och jämför: $\left(\sqrt{92}\right)^2 > \left(\sqrt{39} + \sqrt{11}\right)^2$ $92 > 39 + 11 + 2 \cdot \sqrt{39 \cdot 11}$ $92 > 39 + 11 + 2 \cdot \sqrt{429}$ $92 > 50 + 2 \cdot \sqrt{429}$ $42 > 2 \cdot \sqrt{429}$ $21 > \sqrt{429}$	$21^2 = 441$ $20^2 = 400$ ger att olikheten stämmer! ($\sqrt{429}$ = 20,71 . . .) och triangelolikheten ger att (**d**) ingen triangel kan bildas då en sida är längre än de båda andra tillsammans (summan av dem): $c > a + b$

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																					b												
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

19. En triangel har sidlängderna $\sqrt{13}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt{52}$ längdenheter. Den minsta vinkeln i triangeln är då

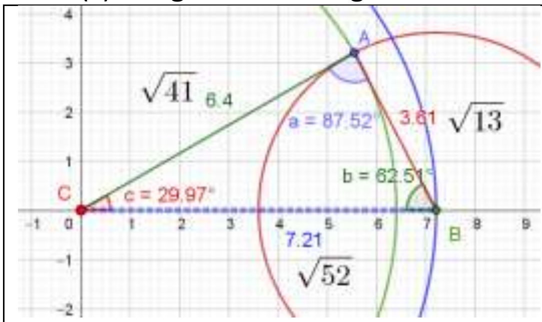
(a) 30°; (b) skild från 30°;

(c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.

19. En triangel har sidlängderna $\sqrt{13}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt{52}$ längdenheter. Den minsta vinkeln i triangeln är då

(**a**) 30° (**b**) skild från 30°

(**c**) det går inte att avgöra (**d**) det finns ingen sådan triangel:



som vi ser är (d) uteslutet eftersom triangelolikhet:s-kravet är uppfyllt:
$a + b > c$ och $a + c > b$ och $c + b > a$

(**c**) kan inte vara korrekt , om triangeln finns , så går vinkeln att återfinna med till exempel sinussatsen och cosinussatsen

Den minsta vinkeln står mot den kortaste sidan: $\sqrt{13}$, och
då gäller alltså:

$$\frac{\sin C}{\sqrt{13}} = \frac{\sin B}{\sqrt{41}} = \frac{\sin A}{\sqrt{52}}$$

<och om det skulle gälla att sin 30° = ½ , (vilket vi kommer att motbevisa) så skulle

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{13}} = \frac{\sin B}{\sqrt{41}} = \frac{\sin A}{\sqrt{52}}$$

samt att cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, så . . .

istället ska vi hitta vinkel C med cosinussatsen:

$$\cos C = \frac{\sqrt{41}^2 + \sqrt{52}^2 - \sqrt{13}^2}{2 \cdot \sqrt{41} \cdot \sqrt{52}}$$

$$\cos C = \frac{41 + 52 - 13}{2 \cdot \sqrt{41} \cdot \sqrt{52}} = \frac{80}{2 \cdot \sqrt{41} \cdot \sqrt{52}} = \frac{40}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{52}}$$

$$\frac{40}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{52}} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

så $C \neq 30°$ och detta är den minsta vinkeln i triangeln.

den kan bestämmas:

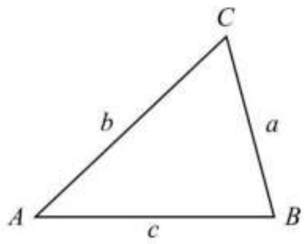
C	30°
$\cos^{-1}\left(\frac{40}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{52}}\right) =$	cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{40}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{52}} = 0{,}866296\ldots$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx$ 0,8660254...

från formelblad till Ma3: (Skolverket) :

Sinussatsen $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Areasatsen $T = \frac{ab\sin C}{2}$



Trigonometriska funktionsvärden

Vinkel v	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																						b											
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

20. Givet är en tetraeder $ABCD$, sådan att $|AB| = |AC| = |AD| = \sqrt{2}$ längdenheter, och de tre plana vinklarna vid hörnet A är räta. Tetraederns höjd från hörnet A mot sidan BCD har i samma längdenheter längden

(a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; (b) annat tal;

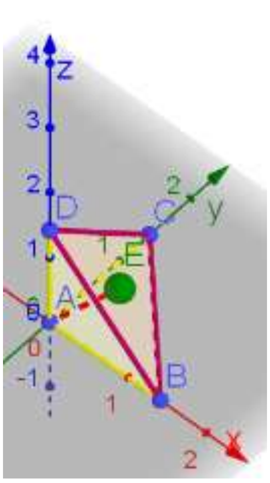
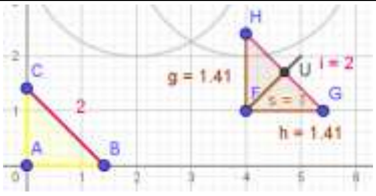
(c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan tetraeder.

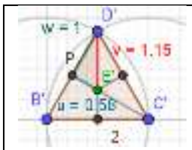
20. Givet är en tetraeder *ABCD*, sådan att $|AB| = |AC| = |AD| = \sqrt{2}$ längdenheter, och de tre plana vinklarna vid hörnet *A* är räta. Tetraederns höjd från hörnet *A* mot sidan *BCD* har i samma längdenheter längden

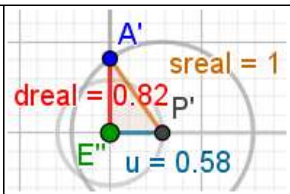
(**a**) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (**b**) annat tal

(**c**) det går inte att avgöra (**d**) det finns ingen sådan tetraeder

(utgår från att "sidan" BCD är den triangel som visas , och att sträckor längs med kanterna av tetraedern kallas just kanter och då INTE "sidor".)

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$ l.e.
tetradern från sidan mäts här upp


triangeln BCD
ytterst, : betrakta nu $PD'E'$:
$PD' = 1$ l.e.
$D'E' = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$ l.e.
$PE' = \sqrt{\frac{4}{3} - 1} = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}58$ l.e.</td>
<td rowspan="2">

beräknar dreal , som är *AE* i figuren för tetraeder ,
"Tetraederns höjd från hörnet *A* " är alltså denna sträcka.
$d^2 + u^2 = 1^2$
$d^2 + (P'E'')^2 = 1^2$
$d^2 + (A'E'')^2 = 1^2$
$d^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = 1^2$
$d^2 + \frac{1}{3} = 1$
$d = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}816$ l.e.</td>
</tr>
<tr>
<td>Tetraedern etableras med sitt unika hörn i A , och alla kanter
$AB = AC = AD = \sqrt{2}$
(dessa kanter visas **gula**)</td>
<td>(**a**) $\frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1{,}225$ l.e. (**b**) annat tal
(**c**) det går inte att avgöra
(**d**) det finns ingen sådan tetraeder
(**b**), annat tal gäller : $\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}816$ l.e.
är "Tetraederns höjd från hörnet *A* "</td>
</tr>
</table>

Matematikuppgift	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																					$-\frac{10}{7}$										
Ma/Fy CTH KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024 SU GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

21. Beräkna

$$\frac{\frac{4}{7}-\frac{3}{2}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{4}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

21. Beräkna

$$\frac{\frac{4}{7}-\frac{3}{2}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{4}}$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p och q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

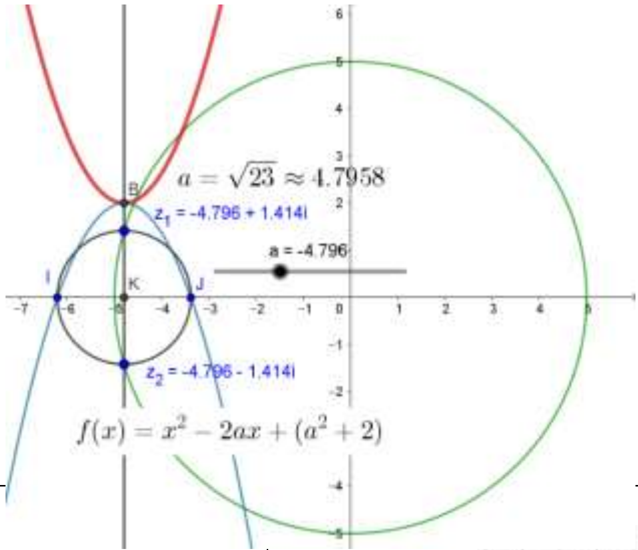
$$\frac{\frac{4}{7}-\frac{3}{2}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{4}{7}-\frac{3}{2}}{\frac{8}{20}+\frac{5}{20}} = \frac{\frac{8}{14}-\frac{21}{14}}{\frac{8}{20}+\frac{5}{20}} = \frac{\frac{-13}{14}}{\frac{13}{20}} = -\frac{20}{14} = -\frac{10}{7}$$

Svar : $-\frac{10}{7}$, där antingen p = -10 och q = 7 eller p = 10 och q = -7

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																								$-\sqrt{23}$									
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

22. Bestäm alla reella tal a, för vilka ekvationen $x^2 - 2ax + (a^2 + 2) = 0$ har två icke-reella lösningar som befinner sig på avstånd 5 från talet 0. Ange det| minsta talet a med den egenskapen.

22. Bestäm alla reella tal a, för vilka ekvationen $x^2 - 2ax + (a^2 + 2) = 0$ har två icke-reella lösningar som befinner sig på avstånd 5 från talet 0. Ange det minsta talet a med den egenskapen.



$x^2 - 2ax + (a^2 + 2) = 0$

…

$x = a \pm \sqrt{a^2 - (a^2 + 2)}$

…

$x = a \pm \sqrt{2} \cdot i$

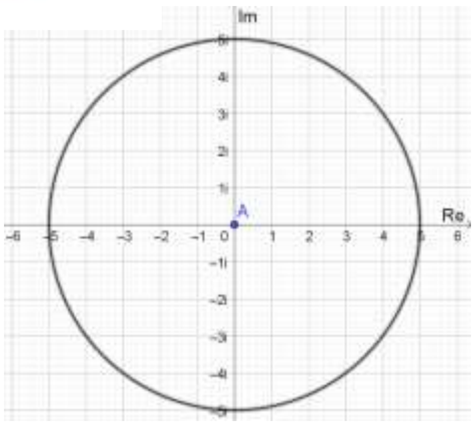
belopp av detta *x* ska vara 5 :

$|5| = |x|$

$5 = \sqrt{a^2 + (\sqrt{2})^2}$

$25 = a^2 + 2$

$a = \pm\sqrt{23}$, där det minsta a är $-\sqrt{23}$



Svar: $a = -\sqrt{23}$

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																									$\frac{32}{15}$								
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	5p

23. Givet funktionen $f(x) = \ln \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, beräkna $f'(x)$ och ange $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

23. Givet funktionen $f(x) = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$, beräkna $f'(x)$ och ange $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$f(x) = g(u(x))$, där $g(u) = \ln u$, och $u(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$\frac{d\, g(u(x))}{dx} = g'(u) \cdot u'(x)$$

och $g'(u) = \frac{1}{u}$ och $u'(x) = \frac{-2x\cdot(1+x^2) - 2x\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1+x^2)^2} = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$

$\frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

Så $f'(x) = g'(u) \cdot u'(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \left(-\frac{4x}{(1+x^2)^2}\right) = -\frac{4x}{(1-x^2)\cdot(1+x^2)}$

Och $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)} = \frac{2}{\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}} = \frac{2}{\frac{15}{16}} = \frac{2\cdot 16}{15} = \frac{32}{15}$.

så **Svar**: 32/15

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																										$\int$							
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	5p

24. Beräkna $\int_0^2 \left(e^{-2x} - \frac{2}{3-x} + \cos\frac{x}{3}\right) dx.$

24. Beräkna $\int_0^2 (e^{-2x} - \frac{2}{3-x} + \cos\frac{x}{3}\ ) \, dx$.

med färger : $e^{-2x} - \frac{2}{3-x} + \cos\frac{x}{3}$

$$\int_0^2 e^{-2x} \, dx = \left[\frac{1}{-2} \cdot e^{-2x}\right]_0^2 = \frac{1}{-2} \cdot e^{-2\cdot 2} - \frac{1}{-2} \cdot e^{-2\cdot 0} = \frac{1}{-2} \cdot e^{-4} + 1/2$$

$$\int_0^2 \frac{2}{3-x} \, dx = [-2 \cdot \ln(3-x)]_0^2 = -2 \cdot \ln 3 - -2 \cdot \ln 1 = 2 \cdot \ln 1 - 2 \cdot \ln 3 = -2 \cdot \ln 3$$

$$\int_0^2 \cos\frac{x}{3} \, dx = \left[\frac{1}{1/3} \cdot \sin\frac{x}{3}\right]_0^2 = 3 \cdot \sin\frac{2}{3} - 3 \cdot \sin\frac{0}{3} = 3 \cdot \sin\frac{2}{3}$$

Svar:

Summa / Totalt : $\int_0^2 (e^{-2x} - \frac{2}{3-x} + \cos\frac{x}{3}\ ) \, dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-4} + 1/2 \ -2 \cdot \ln 3 + 3 \cdot \sin\frac{2}{3}$

Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																											-1						
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

25. En geometrisk talföljd har kvoten q. Bestäm de värden q kan ha givet att det andra elementet i följden är 1 och summan av de fyra första elementen i följden är 4. Ange summan av dessa värden.

25. En geometrisk talföljd har kvoten q. Bestäm de värden q kan ha givet att det andra elementet i följden är 1 och summan av de fyra första elementen i följden är 4. Ange summan av dessa värden.

$$S_4 = \frac{1}{q} + 1 + q + q^2 = 4$$

$\frac{1}{q} + 1 + q + q^2 = 4$, här kan man se att med $q = 1$ så stämmer likheten, ekvationen , $q_1 = 1$

$$q^3 + q^2 + q + 1 = 4q$$

$$q^3 + q^2 - 3q + 1 = 0$$

(en lösning: $q = 1$, bryt ut $(q-1)$)

$$\frac{q^3 + q^2 - 3q + 1}{q-1} = \frac{0}{q-1}$$

polynomdivsionen till vänster , i vänster led
kan utföras med liggande stolen / trappan
ELLER
med koeffecient-identifiering:

$$x^3 + x^2 - 3\,x + 1 = (x-1)\cdot(x^2 + yx + z)$$
$$x^3 + x^2 - 3\,x + 1 = x^3 + x^2\,y - x^2 - x\,y + x\,z - z$$
$$x^3 + x^2 - 3\,x + 1 = x^3 + (y + (-1))x^2 + (2\,y + (z))x + (2\,z)$$

x^3 :
$1 = 1$
x^2 :
$y + (-1) = 1$
x :
$2\,y + (z) = -3$
1 :
$2\,z = 1$

Om
$y = 2$ och $z = -1$
stämmer med
$-1y + z = -3$
alltså
$-1\cdot(2) + (-1) = -3$
så har polynomdivisionen ingen rest och
$x^3 + x^2 - 3\,x + 1$ är delbart med $x - 1$
$(x^3 + x^2 - 3\,x + 1)/(x-1) = x^2 + 2\,x - 1$

$x-1$	$x^2+2\,x-1$
	$x^3+x^2-3\,x+1$
	x^3-x^2
	$2\,x^2-3\,x+1$
	$2\,x\,(x-1)$
	$-x+1$
	$-x+1$
	0

$$(q-1)\cdot(q^2 + 2q - 1) = 0$$

ger genom lösning av andragradsekvationen:

$$(q-1)\cdot\left(q + 1 - \sqrt{2}\right)\cdot\left(q + 1 + \sqrt{2}\right) = 0$$

$q^2 + 2q - 1 = 0$ $q^2 + 2q = 1$ $q^2 + 2q + 1 = 2$ $(q+1)^2 = 2$ $q + 1 = \pm\sqrt{2}$	$q_2 = -1 + \sqrt{2}$ $q_3 = -1 - \sqrt{2}$

$q_1 = 1$, $q_2 = -1 + \sqrt{2}$, $q_3 = -1 - \sqrt{2}$

och summan av rötterna

$$q_1 + q_2 + q_3 =$$

$1 + (-1 + \sqrt{2}) + (-1 - \sqrt{2}) = -1$

SVAR: -1

Matematikuppgift	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																										$\frac{\pi}{4}$					
Ma/Fy CTH KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024 SU GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

26. Lös ekvationen

$$\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x} = 4\sin 2x.$$

Ange summan av de två minsta positiva lösningarna.

26. Lös ekvationen

$$\frac{1\ +\ \tan^2 x}{1-\ \tan^2 x} = 4 \cdot \sin 2x$$

Ange summan av de två minsta positiva lösningarna.

Börja med att identifiera trigonometriska identiteter (för substitution):

för VÄNSTER LED:

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

för HÖGER LED:

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

vi börjar med VÄNSTER LED:

$$\frac{1\ +\ \tan^2 x}{1\ -\ \tan^2 x} = \frac{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x\ +\ \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x -\ \sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

. . . vilket förenklat blir :

$$\frac{\cos^2 x\ +\ \sin^2 x}{\cos^2 x\ -\ \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x\ -\ \sin^2 x}$$

HÖGER LED:

$$\frac{1}{\cos^2 x\ -\ \sin^2 x} = 4\ \cdot\ \sin 2x$$

$$1 = 4 \cdot \sin 2x\ \cdot (\cos^2 x\ -\ \sin^2 x)$$

utnyttja att $\cos 2x\ = \cos^2 x\ -\ \sin^2 x$

$$1 = 4 \cdot \sin 2x\ \cdot \cos 2x = 2 \cdot 2 \cdot \sin 2x\ \cdot \cos 2x$$

och $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

$$\sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$1 = 4 \cdot \sin 2x\ \cdot \cos 2x$$

$$1\ = 2 \cdot 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$1 = 2 \cdot \sin 4x$$

då gäller: $\sin 4x\ = \frac{1}{2}$

och alltså $4x\ = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

generellt gäller

$$4x\ = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi \quad \text{och} \quad 4x\ = \frac{5\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi$$

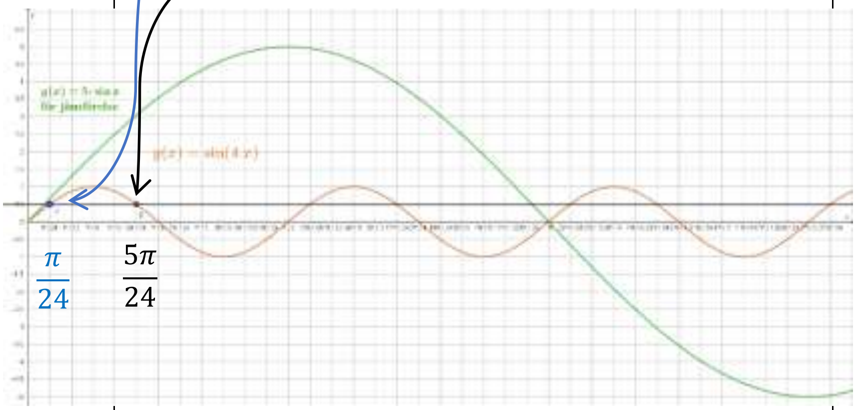
alltså

$$x\ = \frac{\pi}{24} + \frac{k \cdot \pi}{2} \quad \text{och} \quad x\ = \frac{5\pi}{24} + \frac{k \cdot \pi}{2}$$

Summan av de två minsta lösningarna är:

$$\frac{\pi}{24} + \frac{5\pi}{24} = \frac{6\pi}{24} = \frac{\pi}{4}$$

A + B



Matematikuppgift	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																											**-15**				
Ma/Fy CTH KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024 SU GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

27. Lös olikheten

$$(2x-3)^3(x+7)^7(x+5)^4 < 0.$$

Ange summan av olikhetens heltalslösningar.

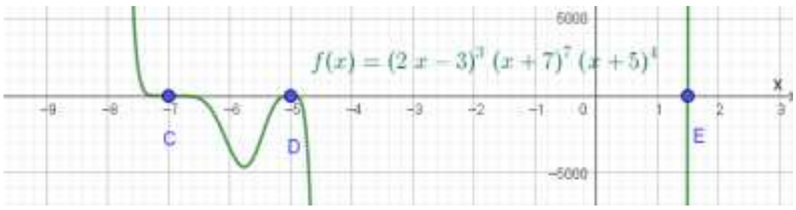
27. Lös olikheten

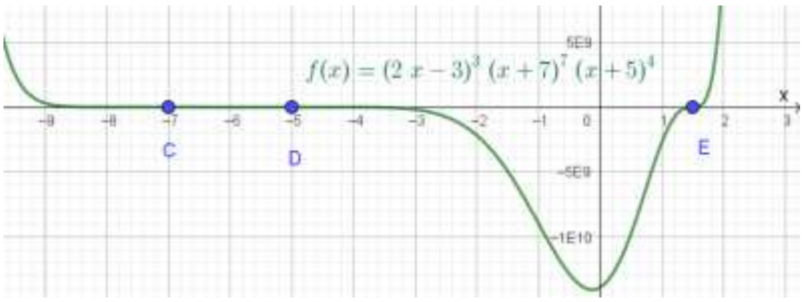
$$(2x - 3)^3(x + 7)^7(x + 5)^4 < 0$$

Ange summan av olikhetens heltalslösningar.

Lösning:

C vid $x = -7$, alltså för $(x+7)^7$	**D** vid $x = -5$, alltså för $(x+5)^4$	**E** vid $x = 1{,}5$, alltså för $(2x-3)^3$





$f(x) = (2x - 3)^3(x + 7)^7(x + 5)^4$

x	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	1.5	2	
$(x+7)^7$	−	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	**C**
$(x+5)^4$	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	**D**
$(2x-3)^3$	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+	**E**
$f(x)$	**+**	**0**	**−**	**0**	**−**	**−**	**−**	**−**	**−**	**−**	**0**	**+**	
	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	1.5	2	

heltalen -6, -4, -3, -2, -1, 0, 1 har negativt , - , minus tecken , alla heltal $x > 2$ är positiva ,
alla heltal $x < -7$ är också positiva

summa av heltalslösningar för vilka $(2x - 3)^3(x + 7)^7(x + 5)^4 < 0$:
= -6 -4 -3 -2 -1 + 0 + 1 = -15

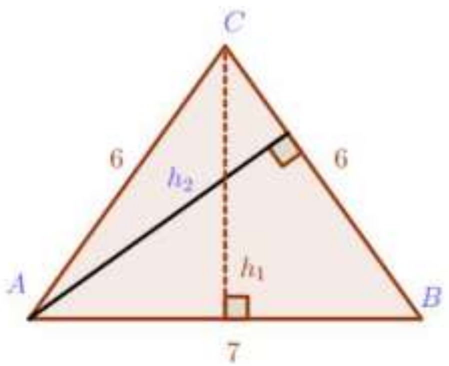
SVAR: -15

Matematikuppgift	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																												$\frac{7}{12} \cdot \sqrt{95}$			
Ma/Fy CTH KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024 SU GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B,2p	delB	B,2p	delB	B,2p	delB	B,2p	delB	B,2p	delB	5p

28. I triangeln ABC gäller att $|AB| = 7$ l.e., $|AC| = |BC| = 6$ l.e. Beräkna och ange längden av höjden från hörnet A mot sidan BC.

28. I triangeln *ABC* gäller att $|AB|$ = 7 l.e. , $|AB|$ = $|BC|$ = 6 l.e. Beräkna och ange längden av höjden från hörnet *A* mot sidan *BC* .

Lösning: (l.e. är längdenheter)
Beräkna höjden mot benen i en likbent triangel med sidorna 6, 6 och 7. (se bild)



Höjden h_1 mot basen . . . . . . (se fotnot). . . (*1*)

$h_1^2 = s^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$

= 6^2 - $(7/2)^2$

= 95/4 = 23,75 , vilket ger $h_1 = \sqrt{23{,}75} \approx 4{,}873397$

Höjden h_2 mot benen . . . . . . (se fotnot). . . (*2*)

$h_2 = h_1 \cdot (b_1 / b_2)$

$h_2 = \frac{\sqrt{95}}{2} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{12} \cdot \sqrt{95}$

SVAR: $\frac{7}{12} \cdot \sqrt{95}$

fotnot (*1*) **:**
Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 = c^2 - b^2$
Exempel: Höjden mot basen i en likbent triangel.
höjd² = sida² - (bas/2)²

fotnot (*2*):
Areaformeln för en triangel: $A = \frac{b \cdot h}{2}$
således är $2 \cdot A = b_1 \cdot h_1 = b_2 \cdot h_2$ $\qquad h_2 = h_1 \cdot \frac{b_1}{b_2}$

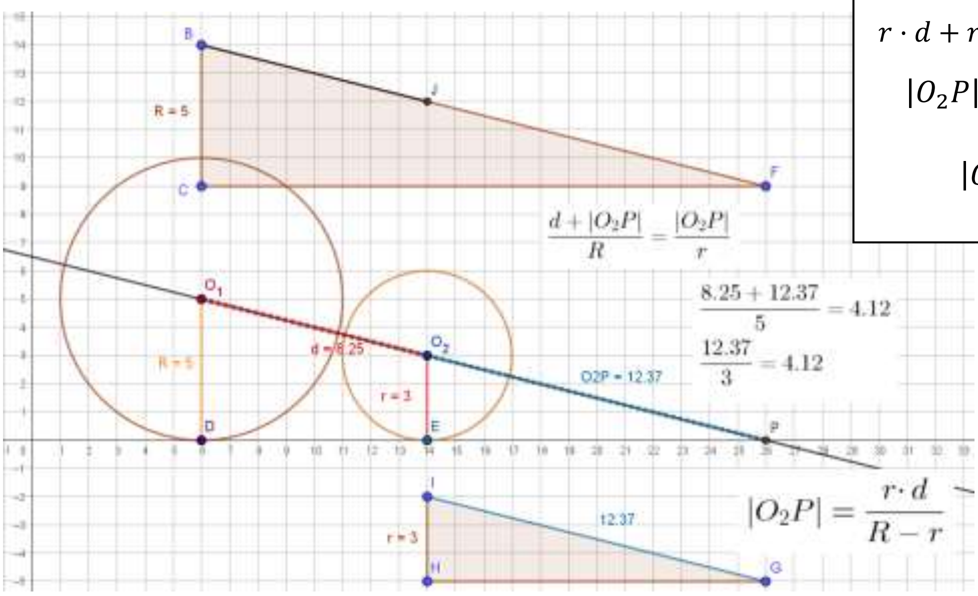
Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																															nn		
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	5p

29. Två cirklar tangerar den räta linjen t och ligger på samma sida om den. Den ena cirkeln har medelpunkt O_1 och radie R, den andra har medelpunkt O_2 och radie r, där $r < R$. Avståndet mellan de två medelpunkterna är $|O_1O_2| = d > R + r$. Linjen t skär linjen som binder samman cirklarnas medelpunkter i punkten P. Beräkna och ange avståndet $|PO_2|$. (Alla längder och avstånd mäts i samma längdenhet.)

29. Två cirklar tangerar den räta linjen *t* och ligger på samma sida om den. Den ena cirkeln har medelpunkt O_1 och radie R, den andra har medelpunkt O_2 och radie r, där $r < R$. Avståndet mellan de två medelpunkterna är $|O_1O_2| = d > R + r$.
Linjen *t* skär linjen som binder samman cirklarnas medelpunkter i punkten *P*.
Beräkna och ange avståndet $|PO_2|$. (Alla längder och avstånd mäts i samma längdenhet.)

$\dfrac{d + \vert O_2P\vert}{R} = \dfrac{\vert O_2P\vert}{r}$ **Svar**: $\vert O_2P\vert = \dfrac{r \cdot d}{R - r}$	Exempel: d är här $\sqrt{20^2 + 5^2} - \sqrt{12^2 + 3^2} \approx 8{,}246$ l.e. R = 5 l.e. och r = 3 l.e. $\vert O_2P\vert = \dfrac{r \cdot d}{R - r} = \dfrac{3 \cdot 8{,}25 \text{ l. e.}}{5 - 3} \approx 1{,}5 \cdot 8{,}246 \text{ l. e.} \approx 12{,}37 \text{ l. e.}$

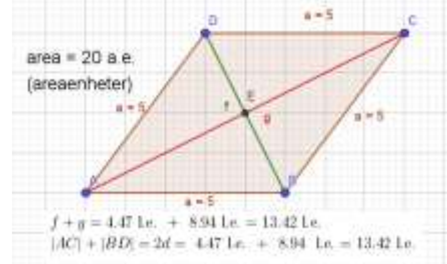
$$r \cdot (d + |O_2P|) = R \cdot |O_2P|$$
$$r \cdot d + r \cdot |O_2P| = R \cdot |O_2P|$$
$$|O_2P| \cdot (R - r) = r \cdot d$$
$$|O_2P| = \frac{r \cdot d}{R - r}$$



Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																																d^2-a^2 a.e.	
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd										= *A*	del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	**B, 2p**	**delB**	5p

30. Romben $ABCD$ har sidlängd a (längdenheter). Summan av dess diagonallängder är $|AC| + |BD| = 2d$ (längdenheter). Beräkna och ange rombens area.

30. Romben *ABCD* har sidlängd *a* (längdenheter). Summan av dess diagonallängder är $|AC| + |BD| = 2d$ (längdenheter). Beräkna och ange rombens area.



testar lösningens validitet på mitt fall:

13,42 = 2*d* *a* = 5 *d* = 6,71

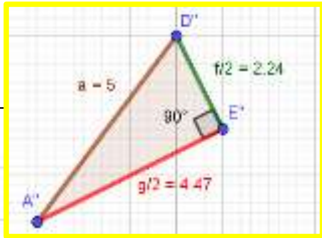
och då är Area $A = d^2 + a^2 = 6{,}71^2 - 5^2 =$

= 45 a.e. – 25 a.e = 20 a.e. stämmer!

$2A = f \cdot g$ (se figur med **blå** area)

$\left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 = a^2$ (se figur med gul ram)

$f^2 + g^2 = 4a^2$



$(f+g)^2 - 2fg = 4a^2$

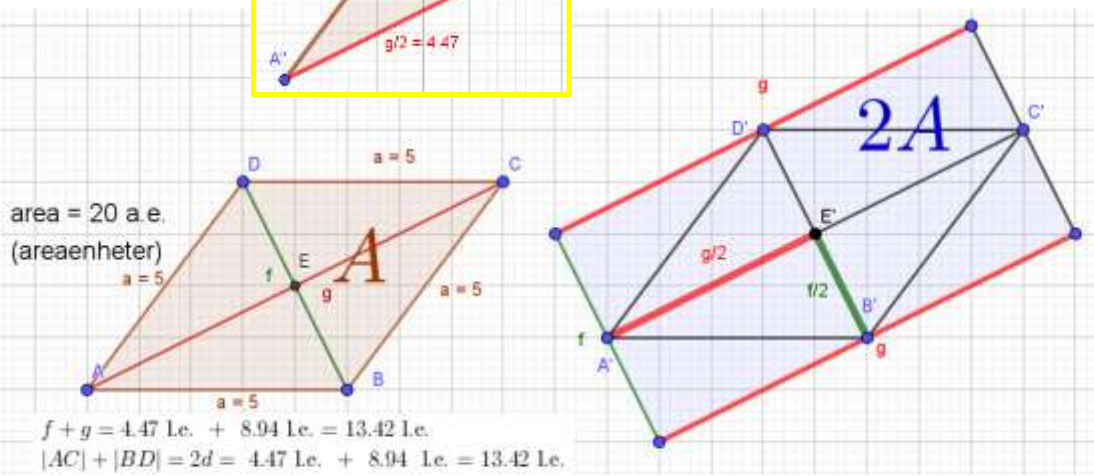
$(2d)^2 - 2fg = 4a^2$

$(2d)^2 - 4A = 4a^2$

$4d^2 - 4A = 4a^2$

$A = d^2 - a^2$

Svar: romben *ABCD*s area $= d^2 - a^2$



Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																																	nn
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös olikheten

$$\sqrt{4x-3-x^2}-\sqrt{7x-10-x^2}\geq 1.$$

Lös olikheten $\sqrt{4x-3-x^2} \;-\; \sqrt{7x-10x-x^2} \;\geq\; 1$

3 lösningar: 1.provskaparnas, 2.extra , 3.egen

1.provskaparnas :

C. *Lösning:* Vi börjar med att bestämma definitionsmängden för vänsterledet. Det krävs att uttrycken under båda rottecknen är icke-negativa. Vi behöver lösa olikheterna $4x-3-x^2\geq 0$ samt $7x-10-x^2\geq 0$. Vi har

$$4x-3-x^2=-(x-1)(x-3)\geq 0, \text{ vilket är ekvivalent med } 1\leq x\leq 3,$$

och

$$7x-10-x^2=-(x-2)(x-5)\geq 0, \text{ vilket är ekvivalent med } 2\leq x\leq 5.$$

Definitionsmängden för vänsterledet är alltså mängden av alla x som uppfyller $2\leq x\leq 3$.

För att efter kvadrering få en olikhet ekvivalent med den vi har behöver vi säkerställa att båda leden har samma tecken. Vi flyttar därför först över den andra roten till högerledet

$$\sqrt{4x-3-x^2}\geq 1+\sqrt{7x-10-x^2}\ (\geq 0),$$

och kvadrerar därefter

$$4x-3-x^2\geq 1+7x-10-x^2+2\sqrt{7x-10-x^2}.$$

Den olikheten är ekvivalent med den givna. Vi flyttar över till vänsterledet alla termer utom den som innehåller ett rottecken och får

$$6-3x\geq 2\sqrt{7x-10-x^2}.$$

Eftersom det nya högerledet är icke-negativt måste eventuella lösningar uppfylla $6-3x\geq 0$, det vill säga $x\leq 2$. Eftersom lösningarna dessutom måste tillhöra definitionsmängden får vi att det enda tal som kan komma ifråga som lösning är $x=2$. Vi kontrollerar om det är en lösning genom att sätta in $x=2$ i den ursprungliga olikheten

$$\sqrt{8-3-4}-\sqrt{14-10-4}=\sqrt{1}-\sqrt{0}=1,$$

det vill säga $x=2$ är en lösning.

Den givna olikheten har alltså en enda lösning och den är $x=2$.

1.provskaparnas (word-ifierad) :

Lös olikheten $\sqrt{4x-3-x^2} \; - \; \sqrt{7x-10-x^2} \;\; \geq \;\; 1$

C. *Lösning*: Vi börjar med att bestämma definitionsmängden för vänsterledet. Det krävs att uttrycken under båda rottecknen är icke-negativa. Vi behöver lösa olikheterna $4x - 3 - x^2 \geq 0$ samt $7x - 10 - x^2 \geq 0$.
Vi har
$4x - 3 - x^2 = -(x-1)(x-3) \geq 0$, vilket är ekvivalent med $1 \leq x \leq 3$
och
$7x - 10 - x^2 = -(x-2)(x-5) \geq 0$, vilket är ekvivalent med $2 \leq x \leq 5$

Definitionsmängden för vänsterledet är alltså mängden av alla x som uppfyller $2 \leq x \leq 3$.
För att efter kvadrering få en olikhet ekvivalent med den vi har behöver vi säkerställa att båda leden har samma tecken. Vi flyttar därför först över den andra roten till högerledet

$$\sqrt{4x - 3 - x^2} \geq 1 + \sqrt{7x - 10 - x^2} \quad (\geq 0)$$

och kvadrerar därefter

$$4x - 3 - x^2 \geq 1 + 7 - 10 - x^2 + 2\sqrt{7x - 10 - x^2}$$

Den olikheten är ekvivalent med den givna. Vi flyttar över till vänsterledet alla termer utom den som innehåller ett rottecken och får
$$6 - 3x \geq 2\sqrt{7x - 10 - x^2}$$

Eftersom det nya högerledet är icke-negativt måste eventuella lösningar uppfylla $6 - 3x \geq 0$, det vill säga $x \leq 2$. Eftersom lösningarna dessutom måste tillhöra definitionsmängden får vi att det enda tal som kan komma ifråga som lösning är $x = 2$. Vi kontrollerar om det är en lösning genom att sätta in $x = 2$ i den ursprungliga olikheten

$$\sqrt{8 - 3 - 4} \; - \sqrt{14 - 10 - 4} \; = \sqrt{1} - \sqrt{0} \; = \; 1$$

det vill säga $x = 2$ är en lösning.
Den givna olikheten har alltså en enda lösning och den är $x = 2$.

2.extra :

I uppgift C kan vi också spara tid med litet begreppsförståelse inom analytisk geometri

Lös olikheten $\sqrt{4x-3-x^2} - \sqrt{7x-10-x^2} \geq 1$

Men vi ser att det är uppochnedvända parabler som radikander och efter litet kvadratkomplettering (se fotnot 1) kan vi skriva om uttryckena till cirkelhalvor på mittpunktsform

$$\sqrt{1-(x-2)^2} - \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{7}{2}\right)^2} \geq 1$$

Vi har halvcirklelbågar med radierna och mittpunkterna (2; 1) och (1,5; 3,5)

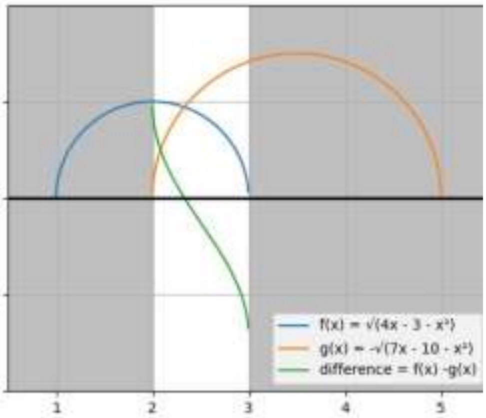
Cirkelhalvornas definitionsområden är [1,3] och [2, 5] med nollställen som ändpunkter. Skillnadens definitionsområde är snittet dvs. intervallet [2,3].

De x-värden i definitionsområdet för vilka differensen är minst 1 syns på bilden. Skillnaden minskar medan den blå bågen avtar och den oranga växer. Störst är den för definitionsintervallets lägsta gräns 2. (se fotnot 2)

Vi löser nu $\sqrt{p_1} \geq \sqrt{p_2} + 1$ med kvadrering $\Leftrightarrow$ $p_1 \geq p_2 + 2\sqrt{p_2} + 1$

$2\sqrt{p_2} \leq p_1 - p_2 - 1 = 6 - 3x$ Nu måste $6 - 3x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2$

Det enda talet i definitionsmängden [2,3] som uppfyller det är x = 2.



$$\begin{array}{ll}
y^2 = 4x - 3 - x^2 & y^2 = 7x - 10 - x^2 \\
y^2 + x^2 - 4x + 4 = 1 & y^2 + x^2 - 2\cdot\frac{7}{2}x + \frac{49}{4} = \frac{9}{4} \\
(x-2)^2 + y^2 = 1^2 & \\
|x-2| \leq 1 & y^2 + \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
-1 \leq x - 2 \leq 1 & -\frac{3}{2} \leq x - \frac{7}{2} \leq \frac{3}{2} \\
1 \leq x \leq 3 & -2 \leq x \leq 5
\end{array}$$

Då får vi vårt enda ställe där skillnaden är minst 1.

$$f(2) = \sqrt{4\cdot 2 - 3 - 2^2} - \sqrt{7\cdot 2 - 10 - 2^2} = 1 - 0 = 1$$

Svar : Då x=2.

Halvcirklarna C_1 och C_2 är definierade och kontinuerliga funktioner i [2; 3]. Då x = 2 får C_1 (2) = 1 sitt största värde och C_2 (2)=0 sitt minsta. Skillnaden C_1 - C_2 är strängt avtagande i intervallet. Således är skillnaden störst dvs. 1 för x=2 och det är det enda värde som är minst 1. (≥ 1.)

3.egen :

Lös olikheten $\sqrt{4x-3-x^2} \; - \; \sqrt{7x-10-x^2} \;\; \geq \;\; 1$

C. *Lösning*: Vi börjar med att bestämma definitionsmängden för vänsterledet.
Det krävs att uttrycken under båda rottecknen är icke-negativa.

Genom lösning av andragradsekvationerna fås gränserna för detta:

$4x-3-x^2=0$ har lösningarna

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3}$$, alltså $x_1 = 1$ och $x_1 = 3$

$7x-10-x^2=0$ har lösningarna

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 10}$$,

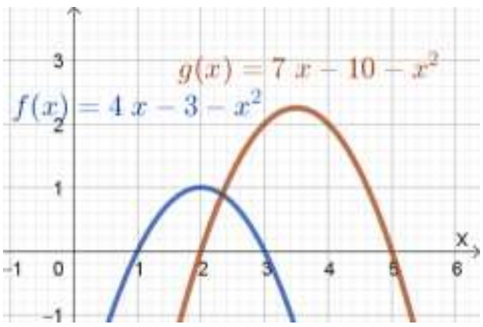
$$x_{1,2} = 3{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}$$, alltså $x_1 = 2$ och $x_1 = 5$

Genom till exempel symmetripunkter, samt tecknet minus (–) på $-x^2$, kan ses att dessa bådas motsvarande funktioner har maximipunkter:

$f(x) = 4x-3-x^2$
$f(2) = 4 \cdot 2 - 3 - 2^2 = 1$

$g(x) = 7x-10-x^2$
$g(3{,}5) = 7 \cdot 3{,}5 - 10 - 3{,}5^2 = 2{,}25$

Detta kan ses grafiskt också:



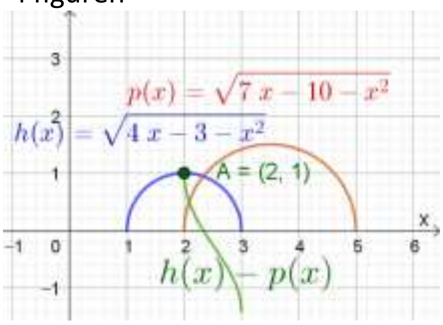
Det område / intervall som är möjligt för vänsterledet är alltså endast det område där båda uttrycken
$4x-3-x^2$ och $7x-10-x^2$
är definerade .
, alltså :

$$2 \leq x \leq 3$$

och inom detta område kan vi ska en skillnadsfunktion:

$h(x) = \sqrt{4x-3-x^2}$
$p(x) = \sqrt{7x-10-x^2}$

$h(x) - p(x)$ =
$\sqrt{4x-3-x^2} \; - \; \sqrt{7x-10-x^2}$
i figuren



den enda lösningen är alltså $x = 2$
, ett annat sätt att utesluta andra lösningar är att se att $f(x)$ når sitt maxvärde
$f(2) = 1$, samt att $g(x)$ aldrig kan vara negativt , så den enda lösningen som finns kan bara vara för $x = 2$, även av detta skäl.

$\sqrt{4x-3-x^2} \; - \; \sqrt{7x-10-x^2} =$
$\sqrt{4 \cdot 2 - 3 - 2^2} \; - \; \sqrt{7 \cdot 2 - 10 - 2^2} =$
$\sqrt{1} - \sqrt{0} = 1$

Samlat facit till uppgifter

del A: 1-20

och

del B: 21-30

B.

A.

1b
2b
3c
4d
5c
6c
7b
8a
9b
10c
11a
12c
13a
14d
15a
16b
17b
18d
19b
20b

21: $-\frac{10}{7}$;
22: $-\sqrt{23}$;
23: $\frac{32}{15}$;
24: $-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}-2\ln 3+3\sin\frac{2}{3}$;
25: -1;
26: $\frac{\pi}{4}$;
27: -15;
28: $\frac{7\sqrt{95}}{12}$ l.e.;
29: $\frac{rd}{R-r}$ l.e.;
30: d^2-a^2 a.e..