Πανεπιστήμιο Αθηνών – Μεταπτυχιακό τμήμα Δ.τ.Μ
'Παιδαγωγική αξιοποίηση των Ψ.Τ στα Μαθηματικά
Διδάσκων: Χ. Κυνηγός

Δημιουργία συνθηκών before formal proof με χρήση ψηφιακού δομήματος

Μ. Τσιλπιρίδης

Ιούνιος 2016

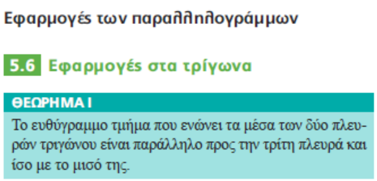
Περιεχόμενα

Περίληψη

Είναι γνωστό ότι στη σχολική καθημερινότητα, η απόδειξη μιας πρότασης ή ενός θεωρήματος, έχει πολύ συχνά τα χαρακτηριστικά μιας τυπικής διαδικασίας που ‘πρέπει’ να γίνει. Σπάνια δίνονται αφορμές και ερεθίσματα στους μαθητές προκειμένου να ασχοληθούν σε ένα πρώτο πειραματικό – εμπειρικό στάδιο με κατάλληλες διαδικασίες, προκειμένου να καταλήξουν στη διατύπωση μιας πρότασης και στη συνέχεια να προχωρήσουν στη φορμαλιστική απόδειξη. Στην εργασία ασχολούμαστε με τις προκλήσεις που μπορούν να δημιουργηθούν από τη χρήση ψηφιακών δομημάτων, ώστε να προκύψουν οι πρώτερες συνθήκες που τις ονομάζουμε συνθήκες ‘before formal proof’ (bfp). Πρόκειται για τις –απαραίτητες- εκείνες διαδικασίες, που προηγούνται της τυπικής απόδειξης και οι οποίες είναι δυνατό να καλλιεργήσουν στους μαθητές το απαραίτητο εννοιολογικό πλαίσιο ώστε να οδηγηθούν στη διατύπωση μιας πρότασης, στη διερεύνηση υποπεριπτώσεων της αλλά και στην ανάγκη να απαντήσουν στο «γιατί ισχύει αυτό;». Στην εργασία χρησιμοποιούμε ένα δόμημα του Geogebra προκειμένου οι μαθητές να ανακαλύψουν και στη συνέχεια να αποδείξουν την ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να ισχύει μια συγκεκριμένη ιδιότητα που αφορά στα μέσα των πλευρών τριγώνου.

Λέξεις κλειδιά: Δυναμική γεωμετρία, εξερεύνηση, λειτουργίες της απόδειξης, φάσεις της απόδειξης, απόδειξη

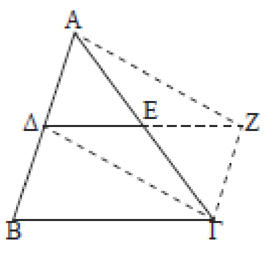
1. Σύντομη ανασκόπηση του σεναρίου


Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα

ΘΕΩΡΗΜΑ I

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.



Σχήμα 20

Στο συγκεκριμένο σενάριο προτείνεται μέσω συγκεκριμένου προβλήματος, ο αναστοχασμός σε ένα βασικό Θεώρημα της Γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου: στο Θεώρημα που αφορά στην ιδιότητα του τμήματος που ενώνει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου.

Ως γνωστό το συγκεκριμένο Θεώρημα έχει πολλές εφαρμογές σε αποδεικτικές ασκήσεις. Στο σενάριο προτείνεται μια σημαντική επέκταση του Θεωρήματος η οποία στοχεύει να προκαλέσει κατάλληλα ερεθίσματα στους μαθητές ώστε να προκληθεί ο επαγωγικός συλλογισμός σχετικά με την εύρεση και διερεύνηση ειδικών θεμάτων. Στο παρόν σενάριο επιχειρούμε να καταδείξουμε τη σημασία της Ψ.Τ καθώς και ότι τα προηγούμενα είναι εφικτά μέσω του πειραματισμού των μαθητών με συγκεκριμένο ψηφιακό δόμημα το οποίο θα χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές ως εργαλείο πειραματισμού και ανατροφοδότησης των σκέψεων και των αποφάσεων που πρέπει να λάβουν.

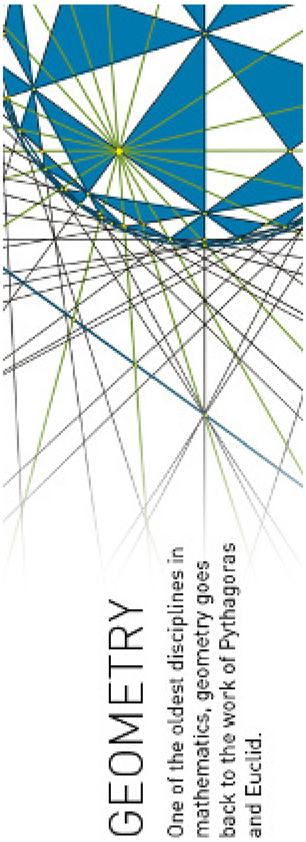
Ισχυριζόμαστε επίσης ότι το παρόν σενάριο δίνει αφορμή στους μαθητές να ασχοληθούν με δραστηριότητες πρόσθετης παιδαγωγικής αξίας που μπορούν να υποστηριχθούν από τη Ψ.Τ. Επιχειρούμε να ενσωματώσουμε διαδικασίες:

- Γραπτής και συμβολικής έκφρασης
- Ελεύθερης έκφρασης
- Διαχείρισης πληροφορίας
- Επικοινωνίας
- Πειραματισμό και διαχείριση μοντέλων
- Οικοδόμησης γνώσης
- Μάθησης μέσω συμμετοχής – εμπλοκής
- Δημιουργία νοημάτων εν χρήσει καθώς και νέων νοημάτων

Ως βασικές αρχές για το σχεδιασμό και την υλοποίηση του παρόντος σεναρίου ελήφθησαν οι εξής:

- η «αποδοχή -ως βασικής αρχής για τη διδασκαλία-, της μάθησης μέσω ανακάλυψης (ή της “καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης” -Freudenthal)» καθώς και
- η «ανάδειξη της συμπληρωματικότητας της “καθαρής” και “εφαρμοσμένης” πλευράς των μαθηματικών».

Σχόλιο: Το παρόν σενάριο αποτελεί τροποποίηση και επέκταση του δομήματος που υπάρχει στο Ψηφιακό Σχολείο για τη Γεωμετρία της Α΄ Λυκείου: (http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5701)



Η Γεωμετρία είναι ένα πολύπλοκο συνδεδεμένο δίκτυο εννοιών, συλλογισμών και αναπαραστασιακών συστημάτων που χρησιμοποιείται για να αναλύσει φυσικά και φανταστικά χωρικά περιβάλλοντα

2. Εισαγωγή Προβλήματος

Για την κατασκευή ενός τμήματος μιας γέφυρας που θα ενώνει το μέσο Δ της πλευράς ΑΒ ενός τριγώνου ΑΒΓ, με την πλευρά ΑΓ, έχει καταρτιστεί προϋπολογισμός που επαρκεί ακριβώς, για μήκος ίσο με το μισό της πλευράς ΒΓ.

Οι δύο μηχανικοί του έργου διαφώνησαν ως προς το σημείο της πλευράς ΑΓ που πρέπει να τερματίζει η γέφυρα.

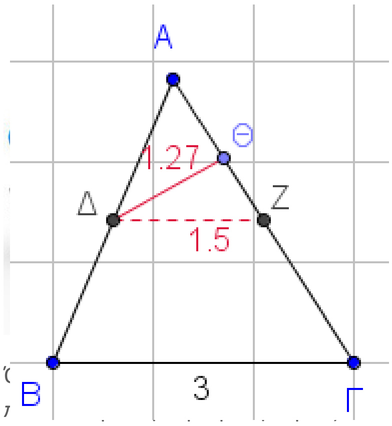
- Ο πρώτος υποστήριξε ότι θα πρέπει υποχρεωτικά να είναι το μέσο Ζ της πλευράς ΑΓ και η διεύθυνση της γέφυρας θα πρέπει να είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ.

- Ο δεύτερος υποστήριξε ότι αυτό δεν είναι απαραίτητο. Ότι δηλαδή μπορεί να υπάρχει και άλλο σημείο Θ διαφορετικό από το Ζ, έτσι ώστε η γέφυρα να έχει μήκος ίσο με το μισό της πλευράς ΒΓ και να μην είναι παράλληλη προς τη ΒΓ

Ποιος από τους δύο μηχανικούς είχε δίκιο;

2.1 Τεχνολογικά Εργαλεία

Οι μαθητές αρχικά καλούνται να σχεδιάσουν μερικά τρίγωνα στο χαρτί και να προσπαθήσουν να εξετάσουν την ορθότητα των δύο ισχυρισμών. Γρήγορα διαπιστώνουν ότι κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό δεδομένης της χρονοβόρας διαδικασίας για την εύρεση των μέσων



Μοντέλο του προβλήματος στο Geogebra

πρότασης κατόπιν των συνεχών μετασχηματισμών που μπορούν να δημιουργούν μόνοι τους σε περιβάλλοντα DGEs» (De Villiers, 1993 & 2003).

Επιπλέον, «…τα περιβάλλοντα DGEs βοηθούν τους μαθητές ώστε να ανακαλύψουν ή/και να προσδιορίσουν γεωμετρικές ιδιότητες αλλά δεν συμβάλλουν κατ΄ ανάγκη και στην ανάπτυξη της αποδεικτικής τους ικανότητας.» (Hoyles και Healy ,1999)

των πλευρών του τριγώνου αλλά και της δυσκολίας να πειραματιστούν με ευθύγραμμα τμήματα ΔΘ (Θ εσωτερικό της ΑΓ).

Τους προτείνετε συνεπώς να σχεδιάσουν ένα μοντέλο του προβλήματος στο λογισμικό Geogebra. Στη συνέχεια να θεωρήσουν ένα ελεύθερο τμήμα ΔΘ με τις μετρήσεις των μηκών εμφανείς και να αρχίσουν πειραματισμούς.

Παράλληλα τους δίνονται ορισμένα εργαλεία του λογισμικού. Σκοπός μας να αποφύγουμε τη σύγχυση που μπορεί να προκληθεί από την πληθώρα των εργαλείων και παράλληλα διευκρινίζεται ότι για τον πειραματισμό τους απαιτούνται ορισμένα από αυτά.

3. Προσδοκούμενες παιδαγωγικές και μαθησιακές κατακτήσεις

Τόσο ο σκοπός όσο και η ιδέα στην οποία έχει στηριχτεί ο σχεδιασμός του σεναρίου, είναι η πρόκληση ενδιαφέροντος κατά τη διαδικασία πειραματισμού, καθώς και στη φάση της τυπικής απόδειξης των ισχυρισμών των μαθητών. Θεωρούμε ότι η συγκεκριμένη εισαγωγική φάση απαιτεί προσεκτικούς σχεδιασμούς κι αυτό γιατί εστιάζουμε στη δημιουργία bfp συνθηκών ώστε να προκληθεί το απαιτούμενο ενδιαφέρον από την πλευρά των μαθητών. Το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο έχει έντονο το στοιχείο της διερεύνησης, ενώ παράλληλα τίθεται μέσω ενός ρεαλιστικού προβλήματος αφού εισάγεται με πιθανό πρόβλημα που αφορά σε εργασιακή πρακτική.

Μέσω του πειραματισμού και την αξιοποίηση του dragging, οι μαθητές είναι πιθανό να διαπιστώσουν ότι υπάρχουν τρίγωνα στα οποία υπάρχει και $2^{ο}$ σημείο που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος. Στο σημείο αυτό εισέρχεται αναπόφευκτα, η αναζήτηση της ικανής και αναγκαίας συνθήκης ώστε να συμβαίνει αυτό.

3.1 Διαδικασίες bfp (before formal proof)

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι ο σχεδιασμός της δραστηριότητας επικεντρώνεται στη φάση “before formal proof”. Στην εργασία ασχολούμαστε με τα ερεθίσματα που μπορούν να προκληθούν από τη χρήση των DGEs, ώστε να δημιουργηθούν κατάλληλες συνθήκες ‘before formal proof’ (bfp). Εκείνες δηλαδή οι αρχικές διαδικασίες που προηγούνται της τυπικής απόδειξης και οι οποίες είναι δυνατό να οδηγήσουν τους μαθητές όχι μόνο στη διατύπωση μιας πρότασης, αλλά και στην ανάγκη να απαντήσουν στο «γιατί ισχύει αυτό;».

Επιπλέον οι μαθητές εισάγονται στις διάφορες φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας (παρατήρηση, διερεύνηση, διατύπωση και έλεγχος εικασίας, αιτιολόγηση). Η λειτουργικότητα των εργαλείων κατασκευής, των μετρήσεων και του dragging γίνεται αισθητή και προκύπτει ως κρίσιμος και καθοριστικός παράγοντας στις διάφορες φάσεις ανακάλυψης και διερεύνησης.

'Η αντίληψη του εκπαιδευτικού λογισμικού ως εργαλείου έχει θεωρηθεί ως ένας αποτελεσματικός τρόπος χρήσης της τεχνολογίας για την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών '(Lederman & Niess, 2000).

Δυνατότητα ερμηνείας και ορθολογικού συλλογισμού

3.2 Οργανωτικό και πολιτισμικό περικείμενο

Με τη χρήση του δομήματος, οι μαθητές αμφισβητούν καταστάσεις, διαπραγματεύονται νοήματα και επιδιώκουν αρχικά την απάντηση στο πρόβλημα και στη συνέχεια την ανακάλυψη εκείνων των συνθηκών που επηρεάζουν την έκβαση του προβλήματος.

Με αυτό τον τρόπο μέσα από τη δράση και την επικοινωνία μεταξύ των ομάδων των μαθητών, την αλληλεπίδραση με το δυναμικό περιβάλλον του δομήματος, οι έννοιες οικοδομούνται από τους μαθητές, αφού θεωρούν ότι οι δραστηριότητες που υλοποιούν έχουν εφαρμογή σε πραγματικές συνθήκες, αλλιώς δεν έχουν νόημα να γίνονται (Κυνηγός 2006).

3.3 Αναλυτικό πρόγραμμα και σχέδιο μαθήματος vs εκπαιδευτικό σενάριο

Το ΕΣ διαφέρει ουσιαστικά από το παραδοσιακό σχέδιο μαθήματος, το οποίο συνιστά ένα τεχνικό κείμενο με προκαθορισμένη γραμμική δομή (Davis et al, 2001), αλλά και από το επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα, που αποτελεί ένα κεντρικά σχεδιασμένο, ανεπτυγμένο σώμα γνώσεων (Κυνηγός, 2003), ως προς το κειμενικό ύφος, αλλά και τον τρόπο αναφοράς στις πτυχές του εκπαιδευτικού περιβάλλοντος. Ενώ δηλαδή ένα ΕΣ διακρίνεται από σαφείς αναφορές στις δραστηριότητες και τους τρόπους χρήσης των εργαλείων κατά την εκπαιδευτική πράξη, δεν υπακούει ωστόσο σε κάποιο συγκεκριμένο κειμενικό είδος. Εξάλλου, παρά τον επιτελικό του χαρακτήρα, δεν έχει την καθοδηγητική μορφή μίας συστημικής οδηγίας, αφήνοντας στον εκπαιδευτικό σημαντικό πεδίο περαιτέρω σχεδιασμού και τελικών αποφάσεων για τον ακριβή τρόπο διεξαγωγής του μαθήματος. Έτσι, το ΕΣ ωθεί τον εκπαιδευτικό να εκφράσει την προσωπική του παιδαγωγική με ρητό και σαφή τρόπο, και μ' αυτή την έννοια θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως άτυπο αναλυτικό πρόγραμμα.

«Η έμφαση τέλος, στις εναλλακτικές χρήσεις της τεχνολογίας μέσα στις συγκεκριμένες εκπαιδευτικές συνθήκες και όχι στις λειτουργικότητες της τεχνολογίας αυτής καθεαυτής επιτρέπει τη δόμηση ενός ρεπερτορίου διαφορετικών ρόλων για τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές, που διαφέρει από το παραδοσιακό σχήμα του «πομπού-δέκτη», αλλά και την επαναχρησιμοποίηση και επεκτασιμότητα των προτεινόμενων δραστηριοτήτων σε διαφορετικό κοινό, ηλικία και εκπαιδευτικό πλαίσιο»(Kynigos & Argyris, 2004).

3.4 Τα είδη νοήματος που αναμένεται να δομήσουν οι μαθητές μέσω πειραματισμού

Υπάρχει ένα καίριο σημείο: η ανάγκη να έχει η χρήση της τεχνολογίας κάποια πρόσθετη παιδαγωγική αξία ως προς την εκπαιδευτική πράξη, δηλαδή τη μαθησιακή και διδακτική διαδικασία (Κυνηγός 2007).

Είναι γνωστό ότι κατά την παραδοσιακή διδασκαλία οι μαθητές παρακολουθούν ουσιαστικά αμέτοχοι την απόδειξη μιας πρότασης ή ενός θεωρήματος, χωρίς με αυτό τον τρόπο να έχουν κάποιο ενδιαφέρον για τη συμμετοχή τους στην κατασκευή της. Πολύ περισσότερο, να συνθέσουν τις ιδέες που υπάρχουν και που ασφαλώς προηγούνται της τυπικής απόδειξης. Στη λεγόμενη παραδοσιακή διδασκαλία, μια μαθηματική πρόταση είναι αληθής αν και μόνο αν μπορεί να αποδειχθεί (σαφής διάκριση μεταξύ απόδειξης και διερευνητικής δραστηριότητας).

Από την άλλη «..φαίνεται να αγνοείται ότι η αξιοπιστία δεν προέρχεται, πρωτίστως, από αυστηρούς ελέγχους ορθότητας τυπικών ισχυρισμών, αλλά από προσεκτική σκέψη και κριτική θεώρηση των μαθηματικών ιδεών». (W. Thurston, 1994)

«Τα μαθηματικά γενικά και ειδικά η απόδειξη, παρουσιάζονται ως ένα τελειωμένο προϊόν. Ο μαθητής δεν είναι συμμέτοχος στην κατασκευή της γνώσης αλλά περισσότερο ένας παθητικός δέκτης της.» (Alibert&Thomas, 1991)

Ο εκπαιδευτικός πρέπει να προτείνει έναν «μπούσουλα» (παράθεση γνώσης) στα ερωτήματα και στις ασκήσεις που θέτει, ειδικά αυτά που διερευνούνται μέσω τεχνολογίας

Στο συγκεκριμένο σενάριο, οι μαθητές καλούνται να εξετάσουν την ορθότητα δύο ισχυρισμών, οι οποίοι αφορούν σε πραγματικό πρόβλημα. Μέσα από τη συμμετοχή τους στη διερεύνηση και την ανακάλυψη της απάντησης στο πρόβλημα, εμπλέκονται με γεωμετρικές ιδέες που προκύπτουν από τις δυναμικές προσλαμβάνουσες που παίρνουν από το λογισμικό.

Με το παρόν σενάριο, επιχειρείται να δοθεί έμφαση στους παρακάτω τομείς:

- Κατανόηση εννοιών, διαδικασιών και διάκριση σχέσεων.
- Ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να εκτελούν διαδικασίες με ευελιξία, ακρίβεια και στρατηγική.

- Δυνατότητα ερμηνείας και ορθολογικού συλλογισμού.
- Χρήση του δυναμικού περιβάλλοντος του δομήματος για τη διατύπωση μαθηματικών εικασιών .
- Καλλιέργεια και συστηματοποίηση της μαθηματικής ικανότητας που αφορά στην τυπική απόδειξη των εικασιών, ως αίτημα για την απάντηση στο καίριο ερώτημα «γιατί να ισχύει κάτι τέτοιο γενικά;».
- Ανάπτυξη στρατηγικών και ικανότητα σχηματισμού κατάλληλων αναπαραστάσεων και επίλυσης μαθηματικού προβλήματος.
- Καλλιέργεια της ικανότητας ελέγχου και συγκριτικής σκέψης των διαφορετικών αναπαραστάσεων του προβλήματος, μέσω του δυναμικού χειρισμού του δομήματος.
- Ανάπτυξη θετικής στάσης για τα Μαθηματικά και εδραίωση της άποψης ως χρήσιμου εργαλείου για επίλυση πραγματικών προβλημάτων αλλά και ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης και τεκμηρίωσης.

4. Προσδοκούμενες μέθοδοι διδακτικής και στρατηγικές εφαρμογής

Η σύλληψη αλλά και η μορφολογία του συγκεκριμένου σεναρίου εστιάζει σε δύο τομείς:

- Στα ερεθίσματα που μπορούν να προκληθούν από τα ψηφιακά εργαλεία του δομήματος και τα οποία θα δημιουργήσουν το κατάλληλο υπέδαφος πριν την τυπική απόδειξη (συνθήκες before formal proof)
- «Έμφαση στους τρόπους με τους οποίους τα νοήματα που παράγονται κατά τη διάρκεια της ατομικής και συλλογικής εμπλοκής με ψηφιακά αντικείμενα, επηρεάζεται από τις αλλαγές σε αυτά τα αντικείμενα και τη διαπραγμάτευση μεταξύ των μαθητών» (Constructionism: Κυνηγός, 2012)

Επιπλέον εστιάζουμε στους ρόλους των μαθητών καθ' όλη τη διάρκεια υλοποίησης του σεναρίου, οι οποίοι εναλλάσσονται διαρκώς. Οι μαθητές μετατρέπονται σε εξερευνητές που θα πρέπει να αναπτύξουν κατάλληλες στρατηγικές και να λάβουν πρωτοβουλίες. Οι ίδιοι θα είναι ενεργοί κατασκευαστές της γνώσης που θα δημιουργηθεί καθώς και συμμέτοχοι στην οικοδόμηση και την ανάπτυξη της. Το δόμημα δίνει πολυποίκιλες αφορμές για αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών κάθε ομάδας αλλά και συνολικά όλων των ομάδων.

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να τονιστεί, ότι σε τέτοιου τύπου διδασκαλίες, διατυπώνεται συχνά (και από εκπαιδευτικούς) η θέση ότι τα μαθηματικά μπαίνουν σε δεύτερη μοίρα ή σχεδόν είναι ανύπαρκτα! Ότι δηλαδή, τα μαθηματικά επισκιάζονται από τον πειραματικό – εμπειρικό τρόπο παρουσίασής τους μέσω του δομήματος. Βασικός στόχος του συγκεκριμένου σεναρίου είναι να αναδείξει τα μαθηματικά που θα απαιτηθούν προκειμένου να αποδειχθούν οι εικασίες που θα διατυπωθούν από τους μαθητές. Μάλιστα στο σχεδιασμό έχει ληφθεί υπόψη η συνεχής ανατροφοδότηση από το δόμημα μέσω πειραματισμού (βλ. και σχήμα σελ. 19 – λειτουργία artefact). Είναι συνεπώς επιδιωκόμενος ο συνδυασμός από τη μία των ψηφιακών εργαλείων ως μέσο πειραματισμού και διερεύνησης καθώς και την καλλιέργεια εννοιολογικού εδάφους που προηγείται της τυπικής απόδειξης , και από την άλλη των καθαρών μαθηματικών που θα απαιτηθούν προκειμένου η εικασία να αποδειχθεί με τυπικό φορμαλισμό.

Καθοριστικός ο ρόλος του εκπαιδευτικού για την εφαρμογή και δημιουργία μοντέλων εξωτερικής έκφρασης και σκέψεων, αμφισβητήσιμα, διαρκώς μεταβαλλόμενα, με συνεχείς συζητήσεις για την αναδιαμόρφωση τους.

(Κυνηγός: Θεωρία μάθησης Constructionism)

4.1 Ο ρόλος του διδάσκοντα

Κύριο χαρακτηριστικό του ρόλου του διδάσκοντα είναι να δημιουργεί διαρκώς εκείνες τις συνθήκες που θα οδηγήσουν τους μαθητές να κατασκευάσουν τη νέα γνώση. Συνεπώς ο ρόλος του είναι κυρίως καθοδηγητικός και αφορά στην υποβολή κατάλληλων ερωτήσεων και επισημάνσεων, την πρόκληση ερωτημάτων που έχουν χαρακτηριστικά πρόκλησης ενδιαφέροντος των μαθητών «για το τι μπορεί να συμβαίνει και γιατί». Είναι επίσης δυνατό να χρησιμοποιηθούν «μισοψημένες απαντήσεις μαθητών» για έλεγχο της ορθότητάς τους.

Το ερώτημα του τι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν προκειμένου να ενσωματώσουν κατάλληλα την τεχνολογία στη διδασκαλία τους έχει λάβει μεγάλη προσοχή (International Society for Τεχνολογία στην Εκπαίδευση, το 2000? Εθνικό Συμβούλιο Διαπίστευσης της Εκπαίδευσης Εκπαιδευτικών, 1997? ΗΠΑ Κογκρέσο γραφείο αξιολόγησης τεχνολογίας, 1995? Τμήμα των ΗΠΑ Παιδείας, 2000? Zhao, 2003)

(Punya Mishra , Matthew J. Koehler (2015) Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge)

Σημαντικότατο σημείο στο ρόλο του διδάσκοντα, είναι η συνεχής πρόκληση διαλόγου μεταξύ των μελών κάθε ομάδας και αναφοράς σε προηγούμενες γνώσεις που μπορούν να συνδράμουν στην προσπάθεια των μαθητών.

Είναι επίσης σημαντικό να τονιστεί ότι θα πρέπει να αποφεύγεται η αποκάλυψη των απαντήσεων, καθώς και της πορείας που πρέπει να ακολουθηθεί για την επίλυση του προβλήματος, ιδιαίτερα μάλιστα σε ότι αφορά στο στάδιο του πειραματισμού. Είναι γνωστό ότι αυτό περιορίζει τη δράση και την αυτενέργεια των μαθητών, ενώ στην αντίθετη περίπτωση είναι δυνατό να διαπιστώσει προσεγγίσεις μαθητών που εκπλήττουν θετικά.

«Ο εκπαιδευτικός πρέπει να προτείνει έναν «μπούσουλα» (παράθεση γνώσης) στα ερωτήματα και στις ασκήσεις που θέτει, ειδικά αυτά που διερευνούνται μέσω τεχνολογίας. Αν υποπέσει σε αυτή την παγίδα, στερεί την ευκαιρία από το μαθητή να σκεφτεί και να μάθει. Είναι απαραίτητο να εστιάζει στο μαθηματικό γραμματισμό και να παρουσιάζει ανοχή της διαπραγματευτικότητας των απαντήσεων» (**Κυνηγός, 2011**).

«Ιδιαίτερα ο εκπαιδευτικός που εφαρμόζει το σενάριο πρέπει να είναι αναστοχαζόμενος, ενεργός δημιουργός προσωπικής πρακτικής και άμεσα εμπλεκόμενος στην καινοτομία» (**Κυνηγός, 2011**).

Συνοπτικά ο ρόλος του εκπαιδευτικού εναλλάσσεται μεταξύ των εξής θέσεων ως: «εισηγητής , συντονιστής, εξηγών, σύμβουλος, πηγή, εμψυχωτής, συνερευνητής, σιωπηρός ερευνητής (**Κυνηγός, 2007**).

5. Προσδοκούμενη διαδικασία μάθησης

5.1 Διδασκαλία και μάθηση της Γεωμετρίας – Στοιχεία από την έρευνα της Δ.τ.Μ

Παραθέτουμε ορισμένα σημεία από την Έρευνα στη Δ.τ.Μ και ειδικότερα στο χώρο της Γεωμετρίας, που αποτέλεσαν αφορμές για την κατασκευή του συγκεκριμένου σεναρίου.

- Ξεκινώντας από τη φύση της Γεωμετρίας, ως γνωστό η Γεωμετρία είναι ένα πολύπλοκο συνδεδεμένο δίκτυο εννοιών, συλλογισμών και αναπαραστασιακών συστημάτων που χρησιμοποιείται για να αναλύσει φυσικά και φανταστικά χωρικά περιβάλλοντα.
- Ο γεωμετρικός συλλογισμός περιλαμβάνει τη χρήση τυπικών εννοιολογικών συστημάτων, στα οποία πρέπει να ενσωματωθούν διαδικασίες:

Ανακαλυπτικής μάθησης	Θεωρητικής τεκμηρίωσης
• Ανακάλυψη	• Επαλήθευση
• Επικοινωνία	• Επεξήγηση
• Οικοδόμηση εμπειρικής θεωρίας	• Συστηματοποίηση
• διαδικασίες οπτικοποίησης,	• Έλεγχος υποθέσεων
• διαδικασίες κατασκευής από εργαλεία,	• Εξερεύνηση ορισμών
	• Συλλογιστική.

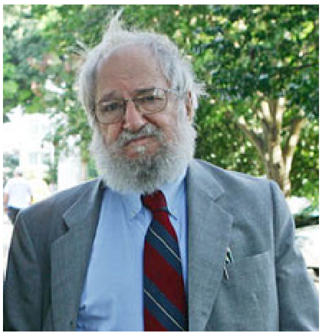
- Η φύση των πρωταρχικών αντικειμένων: Σχέδιο (drawing) – υλική οντότητα και Σχήμα (figure) – θεωρητικό αντικείμενο. Η διαφορά αυτών των δύο δεν είναι ευδιάκριτη στους μαθητές και δημιουργεί δυσκολίες (Δ. Πόταρη, διαφάνειες μαθήματος Έρευνα στη Δ.τ.Μ και Διδακτική Πράξη, 2015)
- Σχεσιακός συλλογισμός που στηρίζεται στις ιδιότητες:
- Εμπειρικές σχέσεις (οι μαθητές δίνουν εμπειρικές αιτιολογήσεις)

- Ανάλυση των επιμέρους ιδιοτήτων και των επιμέρους αλληλεπιδράσεων τους
- Λογικές συνεπαγωγές
- Ιεραρχικές ταξινομήσεις
- Τυπική απόδειξη
- Δυσκολία στη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων και στη μεταξύ τους μετάβαση (Mevarech & Kramarsky, Goldin 1998, Sedig K. & Sumner M.)
- Δυσκολία στην αντίληψη γεωμετρικών εννοιών και θεωρημάτων, (Healy L. & Hoyles C. (2001), Jones K. (2000))
- Δυσχέρεια στη διάκριση χωρικών – γραφικών και θεωρητικών γεωμετρικών σχέσεων (Laborde C., Kynigos C., Hollerbrands K. & Strasser R. (2006))
- Η διδασκαλία της γεωμετρίας μπορεί να κατανοηθεί μόνο αν η γεωμετρία θεωρηθεί ως μια δραστικότητα με τουλάχιστον δύο πτυχές: μελέτη των εννοιών και λογικές σχέσεις, και η αναφορά της σε χωρικές έννοιες-διαδικασίες (αρχιτεκτονική, κτίριο, δόμηση, χωριά, πόλεις, το σχεδιασμό συσκευασιών των προϊόντων και άλλους σκοπούς και δραστηριότητες (Strasser, 1996).
- Προβληματισμός: Είναι η γεωμετρία αυτό που ασχολείται με αυτό που αντιλαμβάνονται οι αισθήσεις μας ή πρόκειται για πνευματικές ιδέες; (C. Laborde, C. Kynigos , 2004)
- Κάθε μία από αυτές τις διαδικασίες πληροί μια συγκεκριμένη επιστημολογική λειτουργία αλλά είναι στενά συνδεδεμένες και αναφέρει ότι “η συνεργία τους είναι γνωστικά απαραίτητη για την επάρκεια στην γεωμετρία “ (Duval, 1998, σ. 38).
- Μικρός βαθμός οπτικοποίησης (Pattern imagery) δυσχέρεια στη διάκριση καθαρών σχέσεων που εμφανίζονται στα σχήματα (Battista M. T. & Clements D. H. (1996), Goldin 1998, Mevarech & Kramarsky)
- Δυσκολία σε γεωμετρικές αποδείξεις (Mariotti M. A. (2000), Jones K. (2000), Weber K. (2001)).

Ανάγκη για επαναπροσδιορισμό εκπαιδευτικών προτύπων της εκπαίδευσης και επιστημολογικών προσεγγίσεων των μαθηματικών (Papert, 1993)

5.2 Προτάσεις από την έρευνα στη Δ.τ.Μ

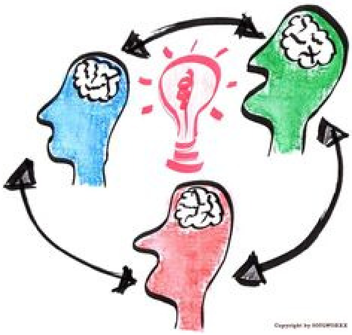
- Υπάρχει η ανάγκη συνδυασμού μαθηματικής πρόκλησης με ευαισθησία στους μαθητές τόσο στο γνωστικό, όσο και στο συναισθηματικό και κοινωνικό επίπεδο (Jaworski & Potari)
- Η δημιουργία ενός περιβάλλοντος μάθησης μέσω μιας δραστηριότητας που να υποστηρίζει την εννοιολογική κατανόηση, δίνει κίνητρο στους μαθητές να εμπλακούν στην κατάσταση και να καθορίσουν ενέργειες και στόχους (Jaworski & Potari)
- Η δραστηριότητα μετασχηματίζεται από τις επιλογές και τις αποφάσεις του εκπαιδευτικού, που οριοθετούνται από το τι θεωρεί ο ίδιος σημαντικό ως μαθηματική δραστηριότητα (Zaslavsky, 1995, 2005).
- Υπάρχει η ανάγκη αξιοποίησης των δυναμικών περιβαλλόντων και των Μικρόκοσμων ως εργαλεία στο περιβάλλον μάθησης (Laborde C., Kynigos C., Hollebrands K. & Strasser R. (2006), Mariotti, M. A. (2000))
- Η χρήση και ο ρόλος της τεχνολογίας στη μάθηση της Γεωμετρίας είναι καθοριστικά (Laborde C., Kynigos C., Hollebrands K. & Strasser R. (2006), Mariotti, M. A. (2000))
- Η διαδικασία της απόδειξης ειδικά στη Γεωμετρία γίνεται πιο κατανοητή και προσβάσιμη με τη χρήση της τεχνολογίας (Mariotti, M. A. (2000) , Jones, K. (2000), Weber, K. (2001))



Seymour Aubrey Papert (1928- 2006) is an MIT mathematician, computer scientist, and educator. He is one of the pioneers of artificial intelligence, and co-inventor, with Wally Feurzeig, of the Logo programming language.

5.3 Θεωρητικό πλαίσιο

Όσον αφορά στο θεωρητικό πλαίσιο του παρόντος σεναρίου, ελήφθησαν υπόψη σύγχρονες παιδαγωγικές και διδακτικές αντιλήψεις που αφορούν: στην ενεργητική μάθηση, στην οικοδόμηση της γνώσης από τον ίδιο το μαθητή, την ομαδοσυνεργατική μάθηση. Επίσης ελήφθησαν υπόψη μέθοδοι όπως επίλυσης προβλημάτων, ανακαλυπτικής και διερευνητικής μάθησης, καθώς και η βιωματική και επικοινωνιακή μέθοδος.



constructionist περιβάλλοντα: οι μαθητές προσπαθούν να κατανοήσουν τους κανόνες, τις ιδιότητες και τις σχέσεις που διέπουν ένα μοντέλο για να αλλάξουν ή να δημιουργήσουν κάποιο άλλο εκ νέου, δημιουργώντας νοήματα από τα μαθηματικά που χρησιμοποιούν (Κυνηγός: Θεωρία μάθησης constructionism)

«Παράλληλα, η μάθηση είναι αποτελεσματική όταν ο μαθητής πειραματίζεται κατασκευάζοντας ένα προϊόν που έχει νόημα για τον ίδιο» (Papert, constructionist).

«Με βάση τη θεωρία του κονστρουκτιβισμού, το άτομο κατασκευάζει τη γνώση και δεν τη δέχεται παθητικά. Ειδικότερα με βάση τη θεωρία Contructionism το άτομο μαθαίνει δίνοντας προσοχή στα δομήματα που χειρίζεται καθώς αναπτύσσει νοήματα» **(Κυνηγός 2011).**

«Κινητήρια δύναμη για την κατασκευή της νέας γνώσης είναι πάντα μια προβληματική κατάσταση, την οποία οι υπάρχουσες γνώσεις δεν μπορούν να αντιμετωπίσουν. Το να αποκρύπτεις πράγματα μερικές φορές, οδηγεί σε περισσότερη σκέψη από το να τα δίνεις «**(Κυνηγός 2007).**

Τα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας και οι Μικρόκοσμοι, δίνουν ευκαιρίες και προκλήσεις στους μαθητές προκειμένου να ενεργοποιηθούν, καθώς ενθαρρύνουν την ανακαλυπτική και διερευνητική μάθηση. Δεν είναι συνεπώς καθόλου τυχαίο, το γεγονός ότι οι διδασκαλίες που χρησιμοποιούν ψηφιακές τεχνολογίες και απαιτούν πειραματισμό και διερεύνηση, κινητοποιούν τους λεγόμενους «αδύνατους μαθητές» και μάλιστα σε ποσοστό συγκριτικά υψηλότερο από εκείνο των μαθητών που είναι συνηθισμένοι σε περισσότερο παραδοσιακά μοντέλα μάθησης.

5.4 Πλαίσιο εφαρμογής

Το παρόν σενάριο έχει προγραμματιστεί να διεξαχθεί σε 2 διδακτικές ώρες στο χώρο του εργαστηρίου πληροφορικής. Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες των 4 ατόμων και μοιράζονται στους υπολογιστές του εργαστηρίου. Με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατή η ανταλλαγή ιδεών και επιχειρημάτων μεταξύ των μελών κάθε ομάδας καθώς και επίσης για τον περιορισμό της ατομικής άποψης και την ενθάρρυνση της συλλογικότητας.

6. Διδακτική διαδικασία

Στο παρόν σενάριο επιχειρείται να αναδειχθεί η προστιθέμενη αξία του ψηφιακού δομήματος η οποία αφορά:

- Στις δυνατότητες που προσφέρει το dragging στους μαθητές, προκειμένου να ελέγξουν με ακρίβεια και σε μικρό χρονικό διάστημα την ορθότητα των ισχυρισμών του προβλήματος, πειραματιζόμενοι με πολλά και διαφορετικά τρίγωνα. Προκύπτει άμεσα ότι κάτι αντίστοιχο είναι δύσκολο έως ακατόρθωτο στο στατικό χαρτί.

- Στη χρήση συγκεκριμένων εργαλείων που κατ’ επιλογή προσφέρονται στο δόμημα ώστε να χρησιμοποιηθούν κατά τη διάρκεια του πειραματισμού.

- Ειδικά η χρήση του εργαλείου κατασκευής κύκλου με κέντρο και ακτίνα, αναμένεται να ανοίξει τη δίοδο ώστε οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι υπάρχουν τρίγωνα στα οποία είναι αληθής ο 2^{ος} ισχυρισμός. Επισημαίνεται στο σημείο αυτό ο «ξεχασμένος» ρόλος του κύκλου ως εργαλείο μέτρησης.

- Στην περίπτωση που οι μαθητές καταφέρουν να χρησιμοποιήσουν το εργαλείο του κύκλου για τον πειραματισμό τους, καλούνται στη συνέχεια να εξετάσουν τους παράγοντες που καθορίζουν την ύπαρξη της 2ης λύσης, δηλαδή τη συμμεταβολή των γωνιών Α και Γ του τριγώνου. Αυτή θα ανοίξει το δρόμο για τον έλεγχο και την τυπική απόδειξη της εικασίας που θα διατυπώσουν στο προηγούμενο βήμα.

Στο σημείο αυτό να τονίσουμε για μία ακόμη φορά, ότι στο σχεδιασμό έχει ληφθεί υπόψη η αναγκαιότητα της τυπικής απόδειξης των ισχυρισμών των μαθητών. Με αυτόν τον τρόπο επιχειρείται να αναδειχθεί η συμβολή του ψηφιακού δομήματος στη διαρκή και συνεχή ανατροφοδότηση τους προς αυτή την κατεύθυνση.

Charles Sanders Peirce, 1839 – 1914: Αμερικανός φιλόσοφος, επιστήμονας της λογικής, μαθηματικός, γνωστός και ως "ο πατέρας του πραγματισμού"

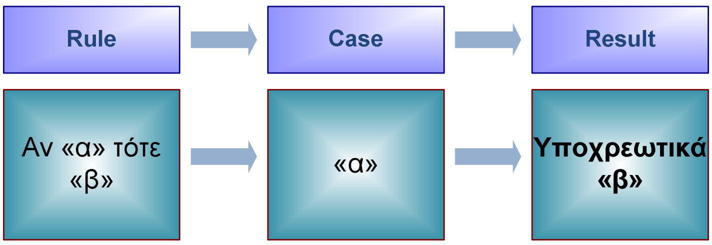
Επινόησε τον όρο «**απαγωγή**» για να περιγράψει μια συλλογιστική, μη-παραγωγικού, αλλά και μη-επαγωγικού τύπου

6.1 Παραγωγικός , Επαγωγικός και Απαγωγικός τρόπος σκέψης

Στα επόμενα, δίνεται μια κατηγοριοποίηση των βασικών τύπων συλλογιστικής πορείας – ειδών συμπερασματολογίας κατά τη διαδικασία απόδειξης ή/και επιχειρηματολογίας στα Μαθηματικά:[1]

Α. Παραγωγικός (Deduction)

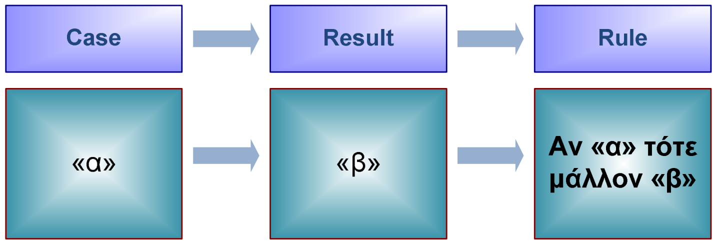
Το «β» συνάγεται από το «α» ως τυπική λογική συνέπειά του αλλά αν «α» αληθές τότε αναγκαστικά/υποχρεωτικά και «β» αληθές.



Β. Επαγωγικός (Induction)

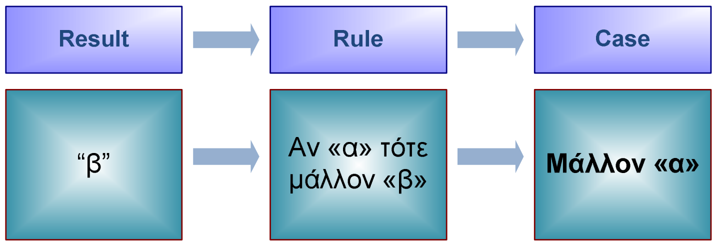
[1] F. Arzarello . 1998. Abduction and conjecturing in Mathematics

Το «β» συνάγεται από το «α», όχι ως αναγκαστική συνέπειά του αλλά το «α» είναι καλή αιτία για το «β», δεν το εξασφαλίζει απαραίτητα.



Γ. Απαγωγικός (Abduction) [2]

Το «α» συνάγεται ως η καλύτερη, μεταξύ άλλων, εξήγηση για το «β» - τυπικά ισοδύναμη με τη λογική πλάνη “Post hoc ergo propter hoc”: κατόπιν τούτου, άρα εξ αιτίας τούτου



Στη συνέχεια επισυνάπτουμε τα χαρακτηριστικά στοιχεία της ανακαλυπτικής Λογικής και της Λογικής της τεκμηρίωσης. Ημεταξύ τους (άτυπα) αναπτυσσόμενη διαλεκτική αποτελεί και τον καθοριστικό παράγοντα για τον απαγωγικό τρόπο σκέψης.

Λογική της ανακάλυψης	***Λογική της τεκμηρίωσης***
▪ **Εικασία**	▪ Απόδειξη

[2] Λειτουργία της λογικής:

- Παραγωγική/επαγωγική μέθοδος έπονται: παραγωγική → βοηθά στην εξαγωγή ελέγξιμων συνεπειών από τις επεξηγηματικές υποθέσεις που διαμορφώθηκαν μέσω απαγωγής,
- επαγωγική → αποφαινόμαστε οριστικά για τις υποθέσεις, από το πλήθος των ελέγξιμων συνεπειών που επαληθεύτηκαν
- Η μόνη από τις τρεις (παραγωγική – επαγωγική – απαγωγική) που εισάγει νέες ιδέες

▪ **Αναλυτική μέθοδος** ▪ **Ευρετική**	▪ Συνθετική μέθοδος ▪ Τυπική απόδειξη

Κρίσιμο σημείο: η (άτυπη και ίσως σιωπηλή) διαλεκτική που αναπτύσσεται ανάμεσα στις δύο διαδικασίες (abduction)

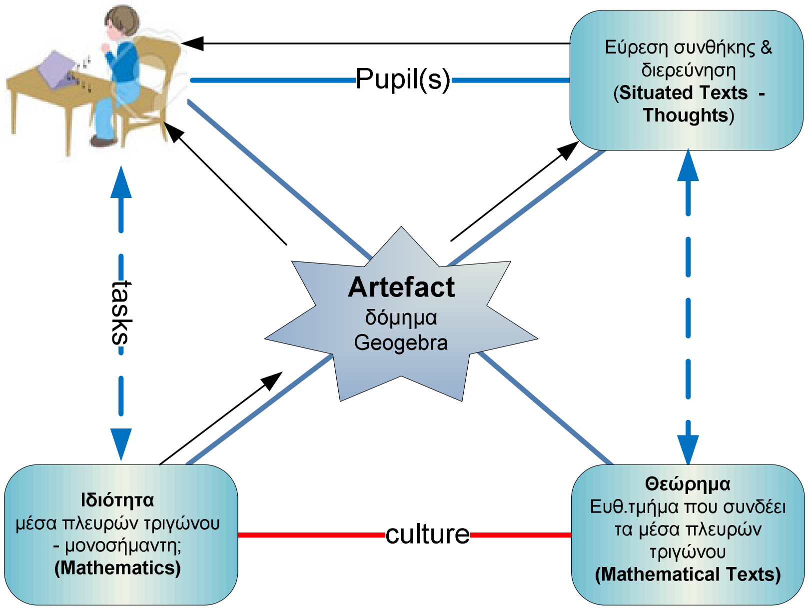
Στην παρούσα εργασία επιχειρούμε να αναδείξουμε τη συμβολή του συγκεκριμένου δομήματος, για την πρόκληση και των τριών κατηγοριών συλλογιστικής σκέψης. Μέσω της εργασίας επιχειρούμε να αναδείξουμε το περιβάλλον των DGEs ως ένα ισχυρό εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού, προκειμένου να προκληθούν στους μαθητές εκείνες οι αναπαραστάσεις που θα συντελέσουν στην λογική κυρίως της ανακάλυψης και στη συνέχεια της τεκμηρίωσης. Με την παρούσα εργασία δεν επιχειρείται να αγνοηθούν οι εγγενείς περιορισμοί αυτών των περιβαλλόντων ως προς τη χρήση τους , όπως για παράδειγμα η αδυναμία αποδεικτικής δυνατότητας. Τουναντίον, επιχειρείται μέσω ακριβώς αυτής της οδού, να αναδειχθεί η σημασία της απόδειξης ως μέσου επαλήθευσης των ισχυρισμών που θα διατυπωθούν από τη χρήση τους.

6.2 Διδακτικό πλαίσιο λειτουργίας των DGEs, Θεωρία σημειωτικής διαμεσολάβησης (TSM)

Θεωρητικό πλαίσιο της Θεωρίας της Σημειωτικής Διαμεσολάβησης ((Bartolini Bussi και Mariotti, 2008). Semiotic Mediation (TSM)- Vygotskij (1978), λαμβάνοντας υπόψη τον κρίσιμο ρόλο της ανθρώπινης διαμεσολάβησης (Κοζούλιν 2003, p. 19) στη διδακτική-μαθησιακή διαδικασία.

«Ερμηνεύοντας την teachinglearning διαδικασία από μια σημειωτική σκοπιά σημαίνει ότι η συγκεκριμένη διαδικασία αναγνωρίζει τον κεντρικό ρόλο των σημειωτικών διαδικασιών και περιγράφει τη διδασκαλία-μάθηση ως εξέλιξη (μετασχηματισμός σε μια δεδομένη κατεύθυνση) των σημείων. Σύμφωνα με τη σημειολογική προσέγγιση που αναπτύχθηκε από άλλους ερευνητές (Radford, 2003, Arzarello, 2006), χρησιμοποιείται ο όρος sign consistently με την ιδέα της αλληλεπίδρασης των περίπλοκων σημείων. Μετά από αυτή τη διάκριση που εισήγαγε ο Rabardel (1995) χρησιμοποιείται ο όρος artefact προκειμένου να γίνεται διάκριση μεταξύ της φύσης του εργαλείου και του συγκεκριμένου τρόπου, που χρησιμοποιήθηκε αυτό το εργαλείο προκειμένου να ολοκληρώσει μια συγκεκριμένη εργασία.»

«Η TSM επικεντρώνεται στην παραγωγή των σημείων, όπως προέρχονται σε σχέση με τα προσωπικά νοήματα που προκύπτουν από τη χρήση ενός συγκεκριμένου δομήματος (artefact), και σχετικά με τη διαδικασία μετασχηματισμού των εν λόγω σημείων μέσω των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων στην τάξη. Όταν χρησιμοποιείται ένα artefact για την ολοκλήρωση μιας εργασίας, αναδύονται προσωπικά νοήματα των μαθητών.»(Maria Alessandra Mariotti*, 2012)



The Theory of Semiotic Mediation (TSM) model for the teaching-learning process.

[Χρήση του artifact (δομήματος) για τη δημιουργία και ανάδειξη των προσωπικών νοημάτων που αποδίδονται από το μαθητή]

Στην παρούσα εργασία επιχειρούμε να αναδείξουμε το ρόλο της χρήσης των DGEs για τη δημιουργία σημειωτικών διαδικασιών, που με βάση τα προσωπικά νοήματα που θα αναδυθούν από κάθε μαθητή καθώς και από την αλληλεπίδραση μεταξύ τους, να οδηγήσουν στο μετασχηματισμό αυτών των διαδικασιών προς την ολοκλήρωση της εργασίας (εύρεση ικανής και αναγκαίας συνθήκης υπό μορφή ισχυρισμού και στη συνέχεια την παραγωγή της τυπικής απόδειξης του ισχυρισμού).

Η έννοια του semiotic potential (σημειωτικού δυναμικού)

«Στο πλαίσιο της TSM, δίνεται ο ακόλουθος ορισμός: Μια διπλή σχέση μπορεί να προκύψει μεταξύ ενός αντικειμένου από τη μία πλευρά και των προσωπικών εννοιών (σε μαθηματικό επίπεδο) που ανακύπτουν από τη χρήση ενός εργαλείου για να ολοκληρωθεί ένα έργο. Ορίσαμε αυτό το διπλό σημειωτικό σύνδεσμο ως semiotic potential (s.p) ενός artefact. Η έννοια του semiotic potential συλλαμβάνει την ιδέα ότι ένα δόμημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί από το μαθητή για να εκτελέσει ένα έργο, αλλά και από το δάσκαλο ως όχημα για τη μάθηση.»

(Bartolini Bussi και Mariotti , 2008).

Βασικοί στόχοι της διδασκαλίας της Γεωμετρίας

(1) Διάκριση μεταξύ χωρικών/ γραφικών σχέσεων και θεωρητικών γεωμετρικών σχέσεων,

(2) Η μεταβολή των θεωρητικών αντικειμένων και η χωρική αναπαράσταση τους,

(3) Η αναγνώριση των γεωμετρικών σχέσεων σε ένα διάγραμμα,

(4) Η ικανότητα να φανταστεί κανείς όλα τα πιθανά διαγράμματα που συνδέονται με ένα γεωμετρικό αντικείμενο (4) Η ικανότητα να φανταστεί κανείς όλα τα πιθανά διαγράμματα που συνδέονται με ένα γεωμετρικό αντικείμενο.

Ειδικά για το (4) σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας οδηγούν μερικούς ερευνητές να επικεντρωθούν στο ρόλο των γρ. αναπαραστάσεων που παρέχονται από υπολογιστικά περιβάλλοντα.

TEACHING AND LEARNING GEOMETRY WITH TECHNOLOGY

(COLETTE LABORDE, CHRONIS KYNIGOS, KAREN HOLLEBRANDS, AND RUDOLF STRÄSSER)

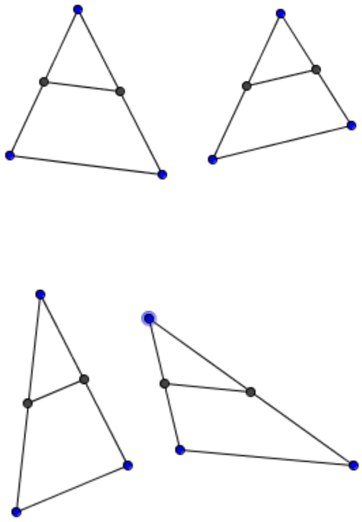
Έτσι, το σημειωτικό δυναμικό (s.p) των DGEs, έγκειται στη διπλή σχέση που έχουν τα εργαλεία και η λειτουργία τους : μαθηματική έννοια που σχετίζεται με την έννοια κάποιου Θεωρήματος και έννοιες που ανακύπτουν από τη χρήση των εργαλείων σχεδίασης και μέτρησης του λογισμικού.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε ένα δόμημα με το λογισμικό Geogebra, προκειμένου να αναδειχθεί αυτή η διπλή σχέση μεταξύ του αντικειμένου (περιεχόμενο δομήματος) και των προσωπικών εννοιών που θα αποδοθούν από τους μαθητές. Οργανώνουμε τα βήματα αυτής της διπλής σχέσης, με το πέρασμα από τη φάση της κατασκευής (ορισμός ιδιοτήτων μιας κατασκευής) στη φάση της παρατήρησης παράγωγων ιδιοτήτων. Αυτό αναμένουμε να δημιουργήσει τη λογική σύνδεση ανάμεσα στην παραδοχή και στο συμπέρασμα. Στη λεγόμενη παραδοσιακή διδασκαλία, η έλλειψη του δυναμικού περιβάλλοντος του λογισμικού που είναι απαραίτητο για τη δραστηριότητα που επιλέξαμε, δεν δημιουργεί τις ίδιες συνθήκες s.p. Και αυτό διότι, όπως προκύπτει και από την περιγραφή της δραστηριότητας, απαιτούνται πειραματισμοί για την εύρεση παράγωγων σχέσεων, που μόνο με τη δυνατότητα του dragging καθώς και των υπολογιστικών εργαλείων του λογισμικού, μπορούν να επιτευχθούν. Ή αναδιατυπώνοντας διαφορετικά το προηγούμενο, είναι ιδιαίτερα δύσκολο για τους μαθητές να πραγματοποιήσουν αντίστοιχους πειραματισμούς στο στατικό περιβάλλον του χαρτιού. Αυτό συχνά τους αποθαρρύνει προκειμένου να ολοκληρώσουν μια εργασία.

Επιπλέον, ο διαχωρισμός μεταξύ των αναλλοίωτων (invariants) αντικειμένων και των δυνητικά διαμορφούμενων (configurationmay) αντικειμένων, δεν είναι εύκολο -αν όχι αδύνατον- να γίνει στο στατικό περιβάλλον του πίνακα. Η συγκεκριμένη δυνατότητα είναι δυνατό να δημιουργήσει συνδέσεις για τις αρχικές ιδιότητες, οι οποίες στη συνέχεια θα προκαλέσουν επάλληλα φαινόμενα. Με αυτό τον τρόπο ο μαθητής δύναται να κάνει συσχετισμούς μεταξύ έμμεσων και άμεσων αναλλοίωτων σταθερών ιδιοτήτων καθώς και των παραγόμενων ιδιοτήτων εξαιτίας αυτών. Η ανακάλυψη της αιτίας αυτής είναι ο κύριος στόχος της δημιουργίας bfp συνθηκών.

6.3 Μέτρηση στα DGEs και αποδεικτική ισχύς

Ο ρόλος της μέτρησης στα DGEs έχει διερευνηθεί σε αποδεικτικές δραστηριότητες (Kakihana, Shimizu & Nohda, 1996? Vadcard,1999? Flanagan, 2001? Hollebrands, 2002). Μελέτες γενικά καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η μέτρηση δεν περιορίζεται σε εμπειρικά επιχειρήματα, αλλά χρησιμοποιείται επίσης σε αφαιρετικής υφής επιχειρήματα.

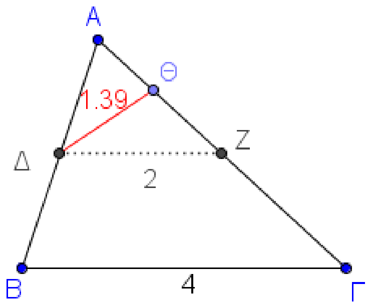


«Λαμβάνοντας υπόψη ότι η απόδειξη θεωρείται συχνά ως ένα μέσο για να αποφασίσει για την αλήθεια των δηλώσεων (εικασιών), γίνεται ένα μέσο για την εξήγηση των φαινομένων που παρατηρήθηκαν στην οθόνη του υπολογιστή που προκαλούν εντύπωση και έκπληξη» (DeVilliers, 1991? Chazan, 1993? Hanna, 1998) (σελ. 289)

«Με τη βοήθεια μιας κατάλληλης ακολουθίας εργασιών σε ένα DGE, η ανάγκη για την απόδειξη δημιουργείται μέσω μιας γνωστικής σύγκρουσης που δημιουργεί στους μαθητές μια νοητική περιέργεια σχετικά με το γιατί μια απρόσμενη ιδιότητα είναι αληθής» (Hadas, Hershkowitz &Schwarz, 2000)

«Μία κατασκευή των μαθητών προέρχεται από ένα σύστημα από αξιώματα και θεωρήματα και υλοποιείται με ένα σύστημα εντολών που εισάγονται στο λογισμικό, το οποίο δεν αποδεικνύει γεωμετρικές σχέσεις Η απόδειξη είναι το μέσο για να δικαιολογήσει ότι η νέα εντολή θα δώσει το αναμενόμενο αποτέλεσμα.» (Mariotti, 2000).

Σε δύο έγγραφα (Marrades & Gutiérrez, Mariotti) αναφέρουν ότι η απόδειξη πληροί διττό ρόλο: Για την εγκυρότητα μιας κατασκευής για κάθε άτομο αλλά και για να πείσει τους άλλους μαθητές να αποδεχθούν τη διαδικασία κατασκευής.

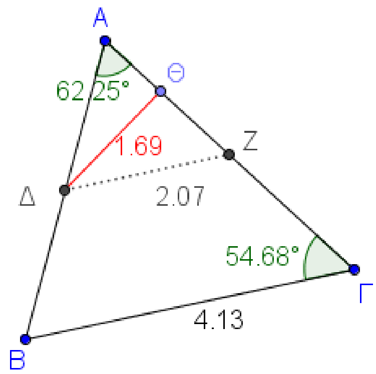


Πειραματισμός με το συγκεκριμένο δόμημα για τον έλεγχο του ισχυρισμού

7. Ανάλυση της δραστηριότητας

7.1 Το σκεπτικό της πορείας προς την ανακάλυψη

Αρχικά διανέμεται ένα φύλλο εργασίας που περιέχει 4 τρίγωνα στα οποία έχει ήδη χαραχτεί το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των δύο πλευρών. Ζητείται από τους μαθητές να εξετάσουν στα συγκεκριμένα τρίγωνα την ορθότητα των δύο συλλογισμών ή αν το κρίνουν σκόπιμο να σχεδιάσουν οι ίδιοι δικά τους τρίγωνα..

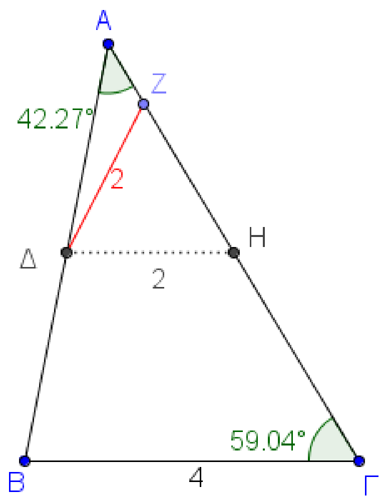


Για την εύρεση της ικανής και αναγκαίας συνθήκης, απαιτείται η μέτρηση των γωνιών Α και Γ

Στο σημείο αυτό έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε τις πρώτες αντιδράσεις των μαθητών στο στατικό περιβάλλον του χαρτιού και να τις συγκρίνουμε στη συνέχεια με εκείνες στο δυναμικό περιβάλλον του λογισμικού. Είναι φανερό ότι επιχειρούμε με αυτόν τον τρόπο να αναδείξουμε τους εγγενείς περιορισμούς που προκύπτουν από την έλλειψη δυναμικού περιβάλλοντος σε αντίθεση με το δυναμικό περιβάλλον του δομήματος που θα χρησιμοποιήσουν στην επόμενη φάση.

Σκοπός αυτής της φάσης είναι η αντίληψη της ανάγκης από τους μαθητές ενός δυναμικού περιβάλλοντος στο οποίο να υπάρχει η δυνατότητα για πολλαπλούς μετασχηματισμούς των στοιχείων του τριγώνου και επομένως η συγκριτική των δύο περιβαλλόντων: στατικό χαρτί έναντι του δυναμικού περιβάλλοντος του λογισμικού.

Επομένως σε εύλογο διάστημα παροτρύνουμε τους μαθητές να δημιουργήσουν οι ίδιοι ένα μοντέλο του προβλήματος στο περιβάλλον του Geogebra και να ξεκινήσουν με αυτό τον πειραματισμό τους. Σε αυτή τη φάση απαιτείται οι μαθητές να μετασχηματίζουν διαρκώς το τρίγωνο, ώστε να είναι σίγουροι ότι πήραν όλες τις περιπτώσεις.[3]



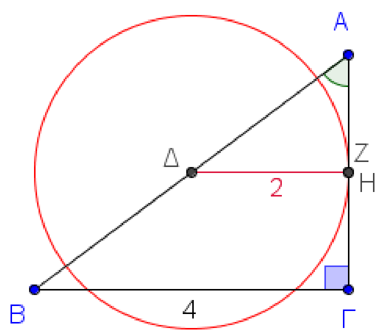
Πειραματισμός με το συγκεκριμένο δόμημα για τον έλεγχο του ισχυρισμού

7.2 Η πορεία προς την ανακάλυψη της συνθήκης

Η 2η φάση περιλαμβάνει τον πειραματισμό που αφορά στην εύρεση της ικανής και αναγκαίας συνθήκης που καθορίζει την ύπαρξη και 2ου σημείου στην πλευρά ΑΓ.

Παροτρύνουμε τους μαθητές να πειραματιστούν με όσο το δυνατό διαφορετικά τρίγωνα προκειμένου να αντιληφθούν τη συμμεταβολή εκείνων των μεγεθών που καθορίζουν την έκβαση του προβλήματος. Στο σημείο αυτό μάλιστα αναμένεται να έχει υπάρξει η απαιτούμενη εξοικείωση τόσο με τις λειτουργίες του δομήματος όσο και με τις δυναμικές μεταβολές των τριγώνων ΑΒΓ.

Θεωρείται επομένως αρκετά πιθανό οι μαθητές να εντοπίσουν τη συμμεταβολή μεταξύ των γωνιών Α και Γ του τριγώνου ως τον ζητούμενο ρυθμιστικό παράγοντα. Σε κάθε περίπτωση παρουσιάζει ενδιαφέρον η διατύπωση καθώς και η έκφραση των σκέψεων που κάνουν επ’ αυτού οι μαθητές όπως επίσης και η διαρκής παρακολούθηση από τον εκπαιδευτικό, του βαθμού αποτελεσματικότητας της διαμεσολάβησης του εργαλείου, για την πρόκληση σημειωτικού δυναμικού ως προς το καίριο αυτό σημείο της δραστηριότητας.[4]



Όταν η γωνία Γ είναι ορθή, τότε δεν υπάρχει 2ο σημείου στην πλευρά ΑΓ.

7.3 Διαδικασίες διερεύνησης - Διατύπωση εικασίας:

Στο στάδιο αυτό οι μαθητές καλούνται να διατυπώσουν μια γενική εικασία, η οποία να περιγράφει τις παρατηρήσεις τους.

[3] Όσον αφορά τα είδη των τριγώνων ως προς τις γωνίες τους: Εδώ σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που θεωρήσουν το τρίγωνο αμβλυγώνιο στην κορυφή Γ 9και όχι μόνο) βρίσκονται αρκετά κοντά στην ανακάλυψη του 2ου σημείου.

[4] Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει απαιτούμενος χρόνος, είναι δυνατό να παροτρύνουμε τους μαθητές να εξετάσουν με μετρήσεις τις γωνίες του τριγώνου.

Θα υπάρχει εσωτερικό σημείο Ζ της ΑΓ διαφορετικό του μέσου Η με $\Delta Z=\Delta H=\frac{B\Gamma}{2}$ αν και μόνο αν $\hat{A}<\hat{\Gamma}$.

Είναι γνωστό ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες τόσο στη διατύπωση όσο και κυρίως στην αντιληπτική τους ικανότητα, να διαπιστώνουν ότι μια πρόταση αποτελεί ικανή και –όχι απαραίτητα και - αναγκαία συνθήκη για την ισχύ μιας άλλης.

Αναμένεται συνεπώς να υπάρξει δυσκολία στην αντίληψη της ανάγκης για τη διατύπωση ικανής και αναγκαίας συνθήκης στην παραπάνω εικασία. Είναι συχνό το φαινόμενο να διατυπώνεται από τους μαθητές η αναγκαία συνθήκη ώστε να ισχύει μια ιδιότητα (επειδή είναι αυτή που φαίνεται…) και να υπάρχει καταγεγραμμένη δυσκολία τόσο στη διατύπωση όσο και –στην προγενέστερη- δυσκολία αντίληψης ελέγχου και του ικανού μιας συνθήκης.

Επομένως σε αυτή την περίπτωση απαιτείται η παρέμβαση του εκπαιδευτικού: Ο εκπαιδευτικός ζητάει τώρα από τους μαθητές να βρουν τρόπο ώστε να κατασκευάζουν το 2^{o} σημείο Ζ στην πλευρά ΑΓ. Με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατό να προκαλέσει την υποψία για το «ποια συνθήκη θα είναι και ικανή ώστε να κατασκευάζεται (δηλαδή να υπάρχει) το 2^{o} σημείο Ζ στην πλευρά ΑΓ». Επίσης με αυτόν τον τρόπο δίνεται το περιθώριο στους μαθητές, να υποψιαστούν την αναγκαιότητα να εξετάσουν αν ισχύει το αντίστροφο, το οποίο «κατοχυρώνει» τις ιδέες τους για το «πότε» μπορούμε να ισχυριστούμε με βεβαιότητα την ύπαρξη του σημείου Ζ. Με άλλα λόγια να εξετάσουν αν η συνθήκη $\hat{A}<\hat{\Gamma}$ είναι και **ικανή** για την ύπαρξη του σημείου Ζ, ώστε $AZ=\frac{B\Gamma}{2}$.

Τέλος, ακόμη και αν διατυπωθεί με την παραπάνω τυπικότητα η εικασία των μαθητών, παραμένει ανοικτό το ερώτημα αν υπάρχει περίπτωση και όταν $\hat{A}<\hat{\Gamma}$ να μην ισχύει η πρόταση.

Στο σημείο αυτό αναδεικνύεται η προστιθέμενη αξία του ψηφιακού δομήματος: οι μαθητές μπορούν να διαπιστώσουν μέσω του πειραματισμού τους ότι για τις περιπτώσεις όπου $\hat{A}<\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Gamma}=90^\circ$ δεν ισχύει το παραπάνω και από το συγκεκριμένο εύρημα να προχωρήσουν στην ολοκλήρωση της διερεύνησης και του τελικού σχηματισμού της εικασίας τους.

Επισημαίνουμε σε αυτή τη φάση στους μαθητές ότι έχουμε ενσωματώσει ορισμένα από τα εργαλεία του Geogebra από τα οποία θα πρέπει να επιλέξουν οι ίδιοι ποιο θα χρησιμοποιήσουν και που θα τους διευκολύνουν στον πειραματισμό τους. ([5])

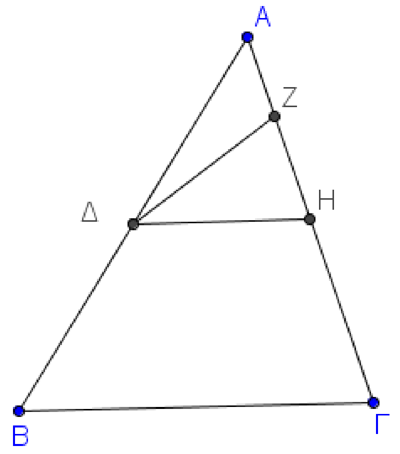
[5] Είναι ίσως δυνατό να λειτουργήσει ως επιπλέον κίνητρο για τους μαθητές, αν τεθεί ότι η άσκοπη χρήση εργαλείων αφαιρεί πόντους από την τελική επίδοση της ομάδας… Κατά τη διάρκεια επίσης του πειραματισμού είναι ενδιαφέρον, ο εκπαι-

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι σε όλη τη διάρκεια του πειραματισμού ο εκπαιδευτικός δεν δίνει καμία υπόδειξη που να αφορά στη χρήση των εργαλείων εκτός μόνο από το γενικό τρόπο χρήσης τους αν και εφόσον ζητηθεί κάτι τέτοιο.

Επομένως η τελική διατύπωση της εικασίας θα πρέπει να είναι η εξής:

Θα υπάρχει εσωτερικό σημείο Ζ της ΑΓ διαφορετικό του μέσου Η με $\Delta Z = \Delta H = \frac{B\Gamma}{2}$ αν και μόνο αν $\hat{A} < \hat{\Gamma} \neq 90^\circ$.

Σχόλιο: Η αναφορά στο ότι το σημείο Ζ είναι εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, είναι καίριας σημασίας, αφού αυτό αποτελεί βασικό στοιχείο της τυπικής απόδειξης (βλ. παρακάτω).



Για την απόδειξη της αναγκαίας συνθήκης του προβλήματος.

7.4 Η τυπική απόδειξη

Ευθύ:

Αν υπάρχει σημείο $Z \neq H$ εσωτερικό στην ΑΓ ώστε: $\Delta Z = \Delta H = \frac{B\Gamma}{2}$ τότε $\hat{A} < \hat{\Gamma}$.

Απόδειξη:

Θεωρήστε ένα τρίγωνο ΑΒΓ για το οποίο υπάρχει σημείο Ζ στην ΑΓ, ώστε : $\Delta Z = \Delta H = \frac{B\Gamma}{2}$.

1. Ποια σχέση συνδέει τις γωνίες $\Delta\hat{H}Z$ και $\hat{\Gamma}$; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας:

____

____

2. Ποια σχέση συνδέει τις γωνίες $\Delta\hat{Z}H$ και $\hat{A}$; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας:

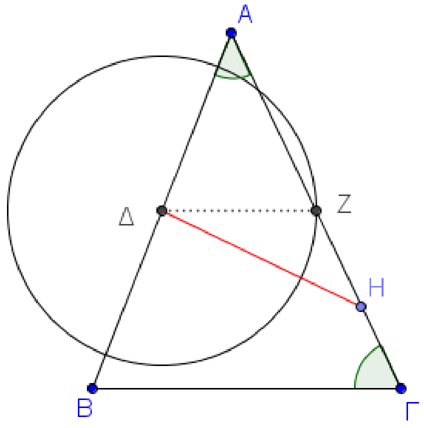
δευτικός να παρατηρεί τους διαλόγους των μαθητών για το ποια εργαλεία θα χρησιμοποιήσουν προκειμένου να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα και να υπάρξει διάλογος μετά το πέρας της δραστηριότητας, που θα αφορά στην αιτιολόγηση των μαθητών για τους λόγους που αφορούσαν στη συγκεκριμένη χρήση εργαλείων.

____

____

3. Από το συνδυασμό των προηγουμένων προκύπτει το συμπέρασμα ότι:

____



Για την απόδειξη της αναγκαίας συνθήκης του προβλήματος.

Αναμενόμενες Απαντήσεις:

Από την υπόθεση το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ισοσκελές και άρα $\Delta\hat{Z}H = Z\hat{H}\Delta$ και επειδή $Z\hat{H}\Delta = \hat{\Gamma}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά) άρα $\Delta\hat{Z}H = \hat{\Gamma}$. Όμως $\Delta\hat{Z}H > \hat{A}$ γιατί το σημείο Ζ είναι εσωτερικό της ΑΓ και άρα η γωνία ΔΖΗ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΔΖ.

Επομένως τελικά θα είναι: $\hat{A} < \hat{\Gamma}$.

Αντίστροφο:

Έστω ότι $\hat{A} < \hat{\Gamma} \neq 90°$. Τότε θα αποδείξουμε ότι υπάρχει εσωτερικό σημείο Ζ της ΑΓ, ώστε $\Delta Z = \Delta H = \frac{B\Gamma}{2}$.

Απόδειξη: ([6])

1. Πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε κατάλληλο εργαλείο από τα υπάρχοντα, ώστε να κατασκευάσουμε ένα σημείο Ζ; (Αξιοποιήστε το λογισμικό).Με βάση την κατασκευή σας, διατυπώστε μια ισοδύναμη πρόταση που αρκεί να αποδείξουμε:

____

____

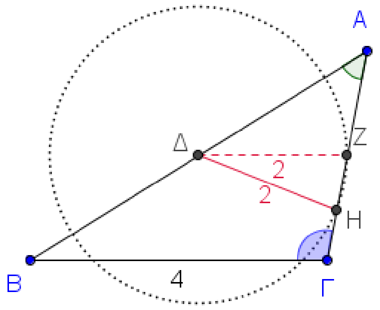
2. Ποια σχέση προκύπτει για τις γωνίες $\Delta\hat{H}A$ & $\hat{A}$;

____

____

3. Μπορούμε να γνωρίζουμε τώρα και σχέση μεταξύ των πλευρών ΑΔ και ΔΗ;

[6] Στα ερωτήματα που ακολουθούν παροτρύνουμε τους μαθητές να παίρνουν διαρκή ανατροφοδότηση από το δόμημα και να τεκμηριώνουν τις απαντήσεις τους με μαθηματικές διαδικασίες απόδειξης.



Για την απόδειξη της αναγκαίας συνθήκης του προβλήματος.

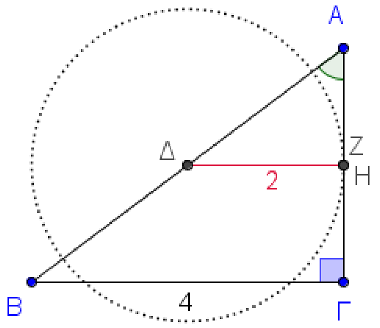
4. Μπορεί το σημείο Η να βρίσκεται μεταξύ των Ζ και Γ;

   Ένας μαθητής έδωσε την παρακάτω απάντηση:

   Αν το Η ήταν εσωτερικό του τμήματος ΖΓ θα έπρεπε $\Delta\hat{Z}A > \Delta\hat{H}Z$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΔΗΖ που είναι άτοπο αφού ΔΗ=ΔΖ

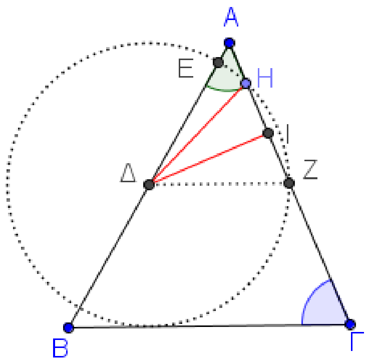
   Συμφωνείτε με την απάντηση του μαθητή; Εξετάστε με το λογισμικό την ορθότητα του ισχυρισμού του.

5. Θεωρήστε τώρα το τμήμα $\Delta I \perp A\Gamma$. Το σημείο Ι θα είναι εσωτερικό της ΑΓ και διαφορετικό από το σημείο Ζ;



5η Ερώτηση

6. Πώς μπορείτε να αξιοποιήσετε το τμήμα ΔΙ για τους σκοπούς της απόδειξης;



6η Ερώτηση

Αναμενόμενες Απαντήσεις:

1. Κατασκευάζουμε τον κύκλο (Δ,ΔΗ). Το πρόβλημα ανάγεται στο να αποδειχθεί ότι ο κύκλος (Δ,ΔΗ) τέμνει την πλευρά ΑΗ σε εσωτερικό σημείο της Ζ.

2. Επειδή είναι: $\Delta\hat{H}A = \hat{\Gamma} \Rightarrow \Delta\hat{H}A > \hat{A}$

3. ΑΔ>ΔΗ γιατί $\Delta\hat{H}A > \hat{A}$

4. Δεν έλαβε υπόψη την περίπτωση η γωνία Γ να είναι αμβλεία.

5. Ναι γιατί διαφορετικά θα έπρεπε $\hat{A} > 90^\circ$ που είναι άτοπο αφού $\hat{\Gamma} > \hat{A}$. Αν το σημείο Ι ταυτίζεται με το σημείο Ζ τότε αφού $\Delta I \perp A\Gamma$ και ΔΙ//ΒΓ άρα θα πρέπει $\hat{\Gamma} = 90^\circ$. Επομένως σε αυτή την περίπτωση αν και $\hat{\Gamma} > \hat{A}$ ωστόσο δεν υπάρχει 2ο σημείο Η στην ΑΓ ώστε $\Delta H = \frac{B\Gamma}{2}$.

6. Επειδή το ΔΙ είναι το κάθετο τμήμα στην ΑΓ, αρκεί ΙΗ<ΙΑ (ή ΙΖ<ΙΓ) οπότε αρκεί τα αντίστοιχα πλάγια τμήματα να είναι ομοίως άνισα. Δηλαδή αρκεί: ΔΗ<ΔΑ ή ισοδύναμα ΔΕ<ΔΑ που το τελευταίο ισχύει αφού ΑΔ>ΔΗ=ΔΕ. ([7])

7.5 Μαθηματικό υπόβαθρο:

Από την απόδειξη γίνεται σαφές ότι υπάρχει ένας πλούτος νοημάτων και στοιχείων ανακαλυπτικής μάθησης στο παραπάνω Θεώρημα. Ειδικότερα παρατηρούμε ότι οι μαθητές θα πρέπει να αναπτύξουν στρατηγικές απόδειξης αλλά και διερεύνησης, έχοντας ταυτόχρονα δυναμικές αναπαραστάσεις του προβλήματος μέσω του ψηφιακού δομήματος, από το οποίο είναι δυνατό να αντλήσουν ιδέες για την τυπική απόδειξη. Συνοψίζοντας το μαθηματικό υπόβαθρο του σεναρίου εστιάζει στα εξής σημεία:

- Σύγκριση πλευρών και γωνιών σε ένα τρίγωνο
- Σύγκριση πλάγιων τμημάτων ως προς μια ευθεία και των αποστάσεων τους από το ίχνος της καθέτου.
- Σύγκριση εξωτερικής γωνίας τριγώνου με τις απέναντι εσωτερικές γωνίες.
- Χρήση του κύκλου ως εργαλείο μέτρησης, σύγκρισης και κατασκευής ευθυγράμμων τμημάτων.
- Απόδειξη ύπαρξης εσωτερικού σημείου σε ευθύγραμμο τμήμα, διαδικασία που κατά κανόνα είναι σύνθετη.
- Διερεύνηση ειδικών περιπτώσεων αλλά και υποπεριπτώσεων του γνωστού Θεωρήματος που αφορά στα μέσα των πλευρών τριγώνου.

Είναι ως εκ τούτου σαφής ο προσανατολισμός του σεναρίου, όσον αφορά τα πυκνά μαθηματικά νοήματα που καλούνται οι μαθητές να ανακαλύψουν αλλά και είναι απαραίτητα για την τυπική απόδειξη των εικασιών τους. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές αντιλαμβάνονται καθώς δημιουργούνται συνεχείς προκλήσεις από τα πειραματικά ευρήματά τους στο δόμημα, ότι –συχνά- υπάρχει αρκετή απόσταση από τη διατύπωση μιας εικασίας, μέχρι του σημείου αυτή να είναι μια «στέρεη» μαθηματική πρόταση. Υπό αυτή την έννοια, προκαλείται στους μαθητές η «ανάγκη για την τυπική απόδειξη» μιας εικασίας, προκειμένου αυτή να αποτελεί μια τεκμηριωμένη αλήθεια.

[7] Το συγκεκριμένο βήμα είναι καθοριστικό για την τελική έκβαση της απόδειξης.

Επιπρόσθετα, η επιλογή της συγκεκριμένης εργασίας στοχεύει στο να δημιουργήσει την αντίρροπη τάση στην άποψη που συχνά διατυπώνεται ότι "οι δραστηριότητες με Ψ.Τ περιθωριοποιούν τα μαθηματικά". Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, παρατηρούμε ότι τόσο το εύρος των λεπτομερειών που πρέπει να εξεταστούν είναι ευρύ αλλά ταυτόχρονα, οι μαθητές παίρνουν συνεχή ανατροφοδότηση από τον πειραματισμό τους στο δόμημα, προκειμένου να σχηματοποιήσουν την τυπική απόδειξη με τις απαιτούμενες λεπτομέρειες.

Σχετικά με τις διαδικασίες απόδειξης παραθέτουμε τα αποσπάσματα που ακολουθούν:

- Λαμβάνοντας υπόψη ότι η απόδειξη θεωρείται συχνά ως ένα μέσο για να αποφασίσει κάποιος για την αλήθεια των δηλώσεων (εικασιών), γίνεται ταυτόχρονα ένα μέσο για την εξήγηση των φαινομένων που παρατηρήθηκαν στην οθόνη του υπολογιστή που προκαλούν εντύπωση και έκπληξη (DeVilliers, 1991? Chazan, 1993? Hanna, 1998) (σελ. 289)

Οι μαθητές είναι εύκολο να πειστούν για την εγκυρότητα μιας πρότασης κατόπιν των συνεχών μετασχηματισμών που μπορούν να δημιουργούν μόνοι τους σε περιβάλλοντα DGS (De Villiers, 1993, 2003).

- Με τη βοήθεια μιας κατάλληλης ακολουθίας εργασιών σε ένα DGE, η ανάγκη για την απόδειξη δημιουργείται μέσω μιας γνωστικής σύγκρουσης που δημιουργεί στους μαθητές μια πνευματική περιέργεια σχετικά με το γιατί μια απρόσμενη ιδιότητα είναι αληθής (Hadas, Hershkowitz &Schwarz, 2000)

Η μετάβαση από την «εξερευνητική» φάση στην «αφαιρετική» δεν είναι ούτε εύκολη ούτε αυθόρμητη

7.6 Συγκριτικός πίνακας διαδικασιών bfp και fp. Το μοντέλο TPCK.

Παραθέτουμε παρακάτω τον πίνακα συγκριτικής μεταξύ της τυπικής διαδικασίας απόδειξης (formal proving) και των bfp διαδικασιών που προηγούνται αυτής. Επιχειρούμε με αυτόν τον τρόπο να καταδείξουμε την πρόσθετη παιδαγωγική αξία που υπάρχει με τη χρήση του ψηφιακού δομήματος, με το οποίο είναι δυνατή η εμπλοκή των μαθητών στις διαδικασίες της τυπικής απόδειξης, αφού προηγουμένως έχουν λάβει τα κατάλληλα ερεθίσματα (συνθήκες bfp) από αυτό.

Τα περιβάλλοντα DGS βοηθούν τους μαθητές ώστε να ανακαλύψουν ή/και να προσδιορίσουν γεωμετρικές ιδιότητες αλλά δεν συμβάλλουν κατ΄ανάγκη και στην ανάπτυξη της αποδεικτικής τους ικανότητας. [Hoyles και Healy (1999)]

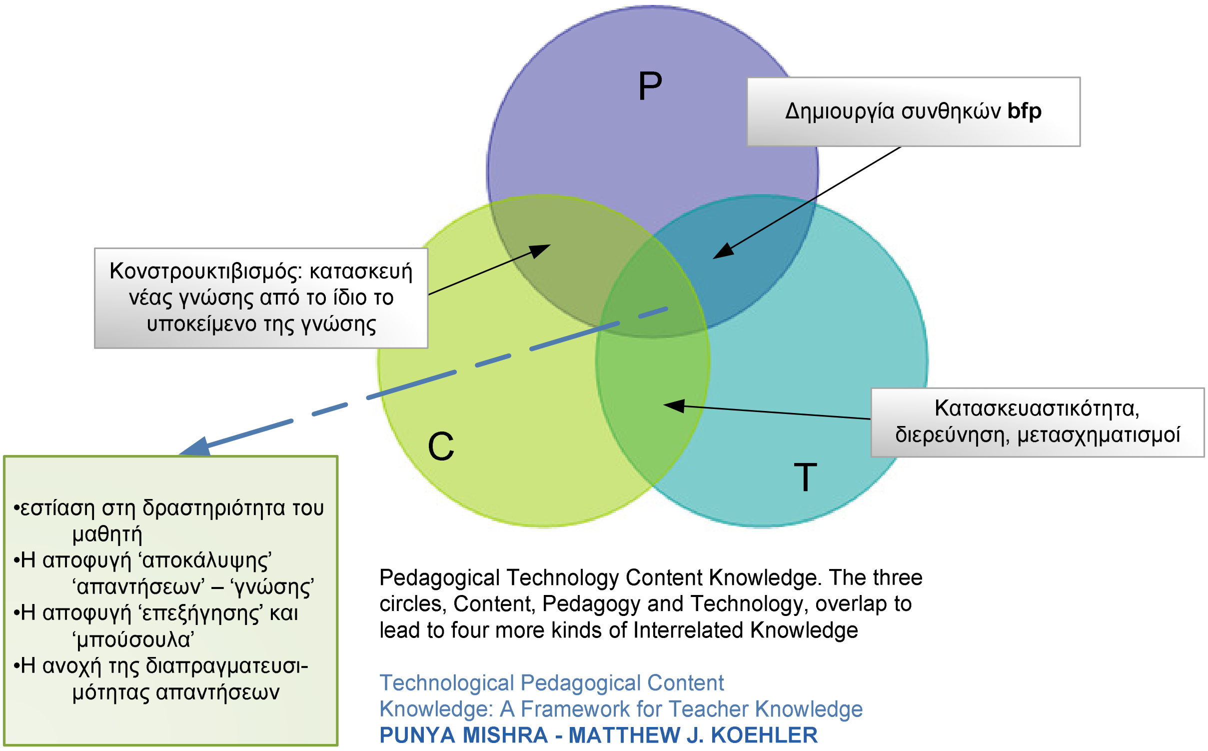
Ανησυχία για την εδραίωση της άποψης στους μαθητές για την περιττή παρουσία (ή/και) αξία της απόδειξης. [Pandiscio (2002)]

Φάσεις	**Bfp**	**fp**
Ευθύ & Αντίστροφο		
Υπάρχει και 2ο σημείο Η διαφορετικό από το μέσο Ζ της ΑΓ ώστε: ΔΗ=ΒΓ/2; (*)	Πειραματισμός με το δόμημα για την εξέταση της ορθότητας του ισχυρισμού.	Έστω σημείο Η που ικανοποιεί την απαίτηση. Τότε… (απευθείας εξέταση της ικανής συν-

		θήκης)
Ποιες παράμετροι καθορίζουν την ύπαρξη του 2ου σημείου;	Πειραματισμός με το δόμημα για την εύρεση των συμεταβαλλόμενων μεγεθών.	∅
Κατασκευή του 2ου σημείου Η	Επιλογή συγκεκριμένων εργαλείων του δομήματος με κατάλληλο τρίγωνο για την κατασκευή. Η ανάγκη της κατασκευής του σημείου υπαγορεύει την αναγκαιότητα διατύπωσης ικανής και αναγκαίας συνθήκης της πρότασης.	Θεωρούμε συγκεκριμένο κύκλο κέντρου Δ και ακτίνας ΒΓ/2…Τότε…
Διερεύνηση προβλήματος.	Πειραματισμός με πολλαπλούς μετασχηματισμούς τριγώνων και εξέταση ειδικών περιπτώσεων (ορθογώνιο στην κορυφή Γ)κ.λ.π	Παρατηρούμε … ότι αν η γωνία Γ είναι ορθή, τότε…

(*) semiotic mediation: αναγνωρίσιμο στις παρακάτω σχέσεις μεταξύ:

- άμεσων και έμμεσων σταθερών που οδηγούν σε μια παραδοχή και σε μια (υπό όρους) σύναψη μιας δήλωσης.
- η δυναμική αίσθηση της εξάρτησης μεταξύ των δύο τύπων σταθερών και η γεωμετρική ερμηνεία της λογικής εξάρτησης μεταξύ υπόθεσης και συμπεράσματος.



Pedagogical Technology Content Knowledge. The three circles, Content, Pedagogy and Technology, overlap to lead to four more kinds of Interrelated Knowledge

Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge
PUNYA MISHRA - MATTHEW J. KOEHLER

7.7 Τύποι συλλογιστικής πορείας μέσω των ερωτημάτων της εργασίας

Παραθέτουμε στη συνέχεια πίνακα με τα είδη συλλογιστικής πορείας που περιέχει κάθε ερώτηση. Να σημειωθεί ότι ο σχεδιασμός των ερωτήσεων, λαμβάνει υπόψη την πρόκληση για το κάθε είδος συλλογιστικής .

	Deduction (παραγωγικός)	**Induction (Επαγωγικός)**	**Abduction (Απαγωγικός)**
Ευθύ			
Ερώτηση 1	▣		
Ερώτηση 2		▣	
Ερώτηση 3		▣	
Αντίστροφο			
Ερώτηση 1	▣	▣	▣
Ερώτηση 2	▣	▣	
Ερώτηση 3	▣		
Ερώτηση 4			▣
Ερώτηση 5		▣	▣
Ερώτηση 6		▣	

8. Εφαρμογή στη σχολική μονάδα

8.1 Προτεινόμενες θεματικές ενότητες και χρονισμός εφαρμογής τους

Το παρόν σενάριο αφορά στη διδασκαλία των «Εφαρμογών στα Τρίγωνα» που περιέχεται στο σχολικό βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας της Α΄ & Β΄ Λυκείου (§ 5.6). Η συγκεκριμένη ενότητα είναι κομβική της ύλης της Γεωμετρίας για την Α΄ Λυκείου. Είναι όμως εφικτό μετά την υλοποίησή του, να τεθούν αντίστοιχα ερωτήματα και για τη διάμεσο τραπεζίου που έπεται στην ύλη και αφορά στις ιδιότητες της διαμέσου (§. 5.10).

Για την υλοποίηση απαιτούνται δύο (2) διδακτικές ώρες, ενώ είναι δυνατό να γίνει η 1η διδακτική ώρα που θα αφορά στον πειραματισμό των μαθητών και στη διατύπωση των πρώτων εικασιών τους και στη συνέχεια να οργανωθεί από τον εκπαιδευτικό διάλογος μαθητών μέσω κατάλληλου portal (π.χ πλατφόρμα LMS Moodle). Χρησιμοποιώντας κατάλληλα modules του Moodle που αφορούν τόσο στη δημιουργία κατάλληλων forum όσο και δημιουργία e-book που θα καταγράφονται οι φάσεις εξέλιξης της εργασίας, είναι σημαντικό να δημιουργηθεί καταθετήριο των βημάτων της συλλογιστικής των μαθητών. Αυτό στη συνέχεια μπορεί να αξιοποιηθεί ερευνητικά για την καταγραφή της συλλογιστικής πορείας των μαθητών και την αλληλεπίδραση τόσο μεταξύ τους όσο και μεταξύ των ομάδων με το ψηφιακό δόμημα.

Το υλικό που θα δημιουργηθεί, μπορεί εν συνεχεία να αξιοποιηθεί στις επόμενες σχολικές χρονιές, όπου με κατάλληλες προσθαφαιρέσεις διαλόγων από τον εκπαιδευτικό & διαχειριστή της πλατφόρμας, θα αποτελέσει τη βάση ανάπτυξης νέων προσεγγίσεων από τους μαθητές.

8.2 Αναλυτικό πρόγραμμα και εκπαιδευτικό σενάριο

Το συγκεκριμένο σενάριο αν και αφορά την ιδιότητα του τμήματος που ενώνει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου, εν τούτοις όπως προέκυψε και από τα βήματα απόδειξης των ισχυρισμών στα προηγούμενα, καλύπτει σημαντικό μέρος των βασικών ανισοτικών σχέσεων που διδάσκονται οι μαθητές στις παραγράφους 3,12, 3.13, 3.14 και οι οποίες αφορούν σύγκριση και σχέσεις ανάμεσα στις γωνίες ενός τριγώνου και τις πλευρές του καθώς και τη σημαντική τριγωνική ανισότητα.

Με αυτή συνεπώς την αφορμή γίνεται μέσω του σεναρίου χρήση ενοτήτων που “φαίνεται” να μη συνδέονται άμεσα μέσω της κατάτμησής τους στα προαναφερόμενα εδάφια.

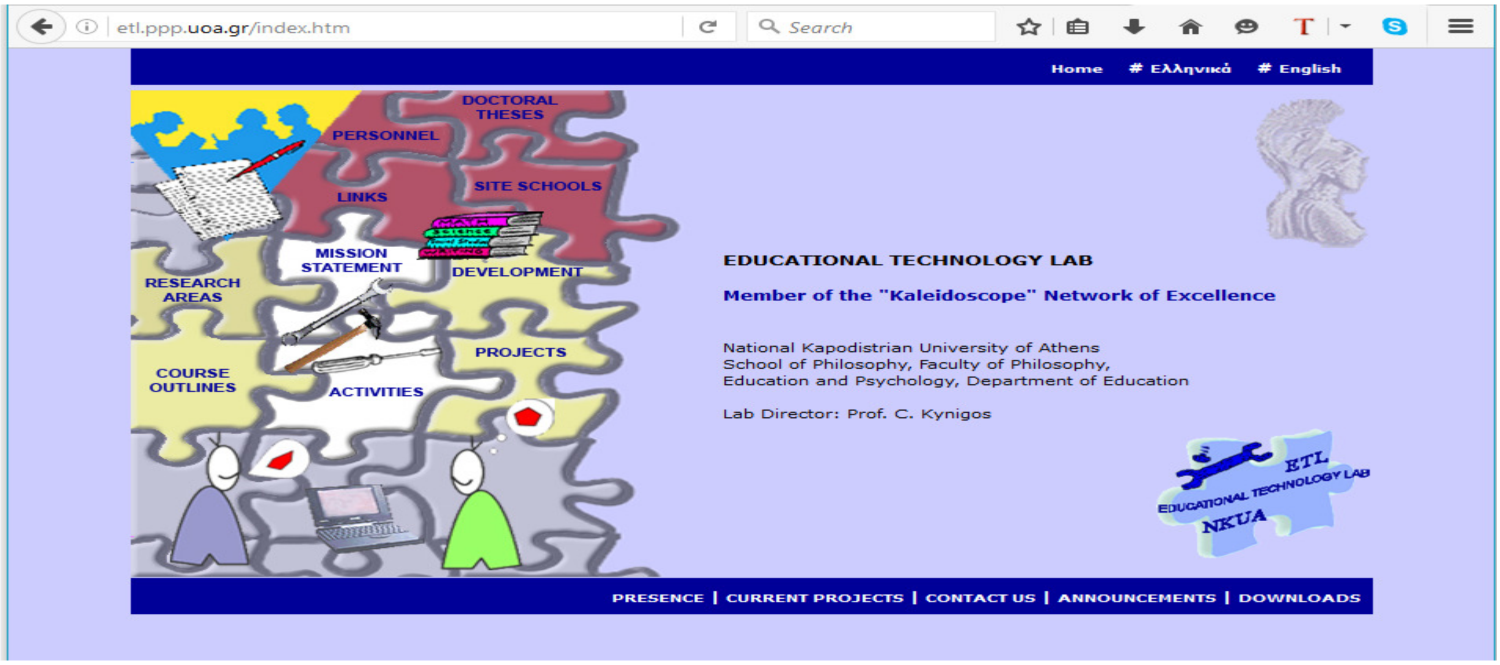
8.2.1 Προσδιορισμός της θέσης των τυχόν νέων διδακτικών παρεμβάσεων, μαθησιακών διαδικασιών στην πρακτική εφαρμογής του σεναρίου και βαθμός επιρροής τους στους συμμετέχοντες μαθητές και καθηγητές

Με τις αναφορές που προηγήθηκαν και που αφορούν στις πρακτικές εφαρμογής του σεναρίου, είναι σαφές ότι όπως έχει ήδη λεχθεί, αποσκοπούμε να δημιουργηθούν οι κατάλληλες εκείνες (bfp) συνθήκες που προηγούνται της τυπικής απόδειξης και που θα προκαλέσουν το ενδιαφέρον στους μαθητές προκειμένου να ψάξουν το «γιατί» και το «πότε» συμβαίνουν αυτά που παρακολουθούν στο περιβάλλον του δομήματος. Είναι προφανές ότι οι πρακτικές αυτού του τύπου μεταμορφώνουν ριζικά τον τρόπο τόσο της συμμετοχής των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία όσο και του εκπαιδευτικού. Ο καθοδηγητικός και περισσότερο «παρακολουθητικός» τρόπος του εκπαιδευτικού αποσκοπεί στη δημιουργία εκείνου του περιβάλλοντος που αναδεικνύει την ενεργό συμμετοχή των μαθητών ως τον πλέον καθοριστικό παράγοντα για την επιτυχή έκβαση του σεναρίου.

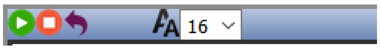
8.2.2 Ανάγκες επιμόρφωσης για τη χρήση των εργαλείων και του σεναρίου γενικότερα

Κρίνεται σκόπιμη μια αρχική επαφή των μαθητών με το λογισμικό Geogebra και τις βασικές – στοιχειώδεις εφαρμογές που αφορούν σε απλές κατασκευές και χρήσεις ορισμένων εργαλείων του λογισμικού.

Επιπλέον σε περίπτωση που υπάρχει σχεδιασμός για τη χρήση κάποιας LMS πλατφόρμας όπως του Moodle, κρίνεται σκόπιμη μια εισαγωγική αναφορά στη χρήση του όσον αφορά τα εργαλεία κατασκευής forum και θεματικών ενοτήτων στην πλατφόρμα. Πιθανό και για την κατασκευή που αφορά στη δημιουργία ‘Λεξικού όρων’ που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του σεναρίου και το οποίο στη συνέχεια μπορεί να αποτελέσει και το θεωρητικό υπόβαθρο για την αποσαφήνιση εννοιών της Γεωμετρίας που χρησιμοποιήθηκαν.



ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
Μέλος του δικτύου αριστείας "Καλειδοσκόπιο"



http://etl.ppp.uoa.gr/malt2/

χελωνόσφαιρα

μισοψημένος κώδικας

για συνευθειακά :α :φ :β

δ 90

μ :α

α :φ

μ :β

π :β/2

α 180-:φ

μ :α/3

σπ

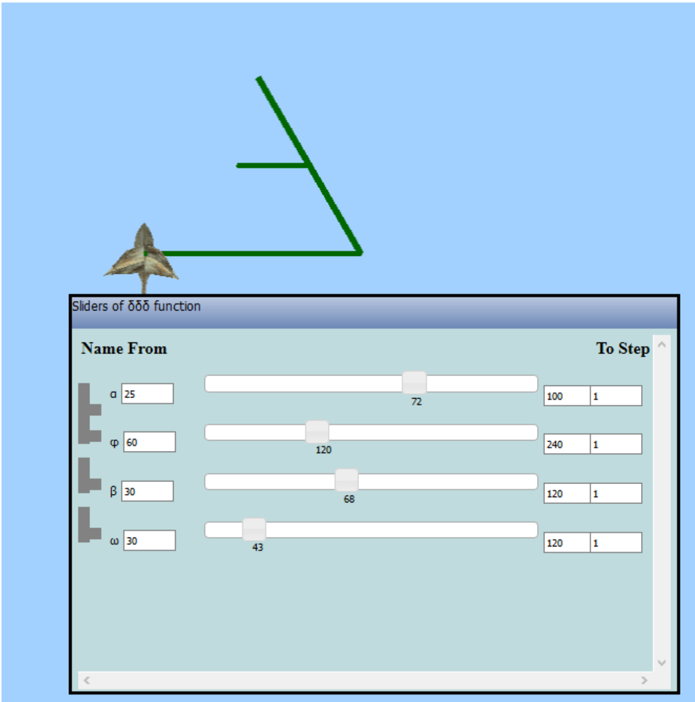
Στηναρχη

τελος

συνευθειακά 50 120 60

8.2.3 Επέκταση του σεναρίου

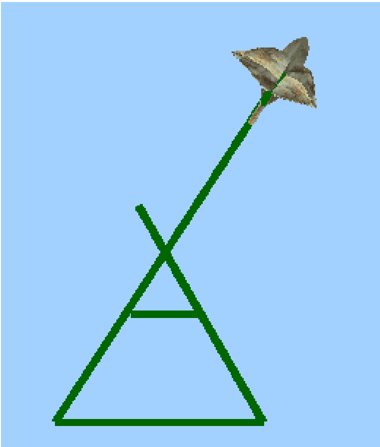
Το σενάριο μπορεί να επεκταθεί με μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή στη χελωνόσφαιρα. Στους μαθητές δίνεται ο διπλανός μισοψημένος κώδικας, που σχηματίζει το παρακάτω σχήμα με τα 3 ελεύθερα άκρα των τριών ελεύθερων ευθυγράμμων τμημάτων και τα δύο τμήματα είναι παράλληλα μεταξύ τους.



Από τους μαθητές ζητείται να μετασχηματίσουν κατάλληλα τον κώδικα ώστε τα 3 ελεύθερα άκρα να είναι συνευθειακά.

Η εμπειρία που έχουν αποκτήσει οι μαθητές από την προηγούμενη φάση, θα συντελέσει ώστε αρχικά να αλλάξουν τον κώδικα στην 7η γραμμή από “μ :α/3” σε “μ: α/2”.

Στη συνέχεια τίθεται το ερώτημα από τον εκπαιδευτικό “αν μόνο σε αυτή την περίπτωση τα τρία ελεύθερα άκρα γίνονται συνευθειακά”. Στόχος του ερωτήματος είναι οι μαθητές να οδηγηθούν στη γενική περίπτωση που αφορά στις εντολές της 5ης και 7ης γραμμής οι οποίες γενικά μπορούν να τροποποιηθούν σε: “π :β/:ν” και “μ :α/:ν” αντίστοιχα με ν τυχαία ακέραια μεταβλητή. Για τον έλεγχο των συνευθειακών σημείων, μπορεί να προταθεί από τον εκπαιδευτικό η κατασκευή κατάλληλης ημιευθείας από την αρχή του συστήματος, η οποία θα στρέφεται από δρομέα και θα “ελέγχει” αν τα σημεία είναι συνευθειακά (βλ. διπλανό σχήμα)



Η ευθεία διεύθυνσης του αντικειμένου, “ελέγχει” αν τα τρία ελεύθερα άκρα είναι συνευθειακά.

Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές διαπιστώνουν τη σημασία που έχουν οι αναλογίες τόσο για την παραλληλία ευθυγράμμων τμημάτων όσο και για τη δημιουργία ομοίων τριγώνων.

8.3 Κριτική προσέγγιση του σεναρίου και της εφαρμογής του

Σχετικά με το παρόν σενάριο παραθέτουμε τον παρακάτω συγκριτικό πίνακα που αφορά στα θετικά και στα αρνητικά σημεία του:

Θετικά	**Αρνητικά**
Πρωτοτυπία θέματος και διεύρυνση βασικού Θεωρήματος της ύλης της Γεωμετρίας Α΄ Λυκείου	Δυσκολία παραμετροποίησης
Στοιχεία διερεύνησης και κατασκευασιμότητας προστιθέμενης διδακτικής αξίας	Σύνθετο μαθηματικό υπόβαθρο
Σημαντική ανατροφοδότηση σε πολλά σημεία από το ψηφιακό δόμημα	Σημαντικό τμήμα προαπαιτούμενων γνώσεων
Ανάδειξη της συμβολής της ψ.τ στη διερευνητική και ανακαλυπτική μάθηση	Απαιτούμενος χρόνος για την υλοποίηση

Τα σημεία στα οποία ενδεχόμενα να απαιτείται αναστοχασμός, αφορούν στο πλαίσιο υλοποίησης του σεναρίου. Η επιλογή του εκπαιδευτικού να υλοποιήσει το συγκεκριμένο σενάριο είτε σε ένα δύωρο στο σχολικό εργαστήριο, είτε να «απλώσει» περαιτέρω την υλοποίηση μέσω κατάλληλα διαμορφωμένου portal σε μια πλατφόρμα όπως είναι το Moodle, εξαρτάται αποκλειστικά από τον ίδιο. Πιθανολογείται ότι η ανάπτυξη του σεναρίου μέσω μιας LMS πλατφόρμας, θα προσφέρει στους μαθητές πλουσιότερη εμπειρία τόσο σε ως προς τη χρήση τέτοιων εργαλείων, όσο και ως προς τις δυναμικές εφαρμογές που αφορούν στην κοινωνικοποίηση της γνώσης, που παρέχεται από τα εν λόγω εργαλεία. Είναι επίσης εφικτό μέσω της 2ης επιλογής, να χρησιμοποιηθεί το παραγόμενο υλικό (συζητήσεις στο forum, παραπομπές σε πηγές, διαδοχικές διαμορφώσεις του δομήματος κ.τ.ο) και σε επόμενες σχολικές χρονιές για την περαιτέρω ανάπτυξη του.

Επιπλέον η συγκεκριμένη επιλογή κάποιας LMS Πλατφόρμας για την υλοποίηση της εφαρμογής, δεν έχει τον παράγοντα χρόνο ως πιεστικό σημείο. Ο Εκπαιδευτικός μπορεί να “αφήσει” όσο κρίνει ο ίδιος το σενάριο να τρέχει. Με στοχευμένες παρεμβάσεις του μπορεί να παρακολουθεί την εξέλιξη και να καθοδηγεί τα βήματα των μαθητών. Η διαλεκτική που μπορεί να αναπτυχθεί στο ειδικό forum που θα διαμορφωθεί μεταξύ των ομάδων των μαθητών, μπορεί να διατρέξει πολλά και διαφορετικά σημεία του σεναρίου: αυτά που αφορούν στο πειραματικό, στο διερευνητικό και τέλος στο αποδεικτικό μέρος του σεναρίου.

8.3.1 πλεονεκτήματα & μειονεκτήματα του σεναρίου

Ως προς την κριτική των πλεονεκτημάτων έχει ήδη αναφερθεί ότι το παρόν σενάριο δίνει πολλές ευκαιρίες στους μαθητές να εμπλακούν εποικοδομητικά με πυκνά μαθηματικά νοήματα σε πειραματικό, διερευνητικό και αποδεικτικό επίπεδο με χρήση του ψηφιακού δομήματος. Επιπλέον το σενάριο είναι δυνατό να προκαλέσει σημαντικούς διαλόγους ανάμεσα στις ομάδες μαθητών που θα εμπλακούν και στα τρία επίπεδα που προαναφέρθηκαν. Με την ολοκλήρωση του σεναρίου οι μαθητές θα έχουν αποκομίσει σημαντική εμπειρία από την ενασχόλησή τους με αυτό, αφού σε όλη τη διάρκεια εξέλιξης του λειτουργούν ως ‘εξερευνητές’. Επιπλέον με το σενάριο δίνεται η ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να αναδείξει τη σπουδαιότητα του συνδυασμού των εμπειρικών μαθηματικών με την αυστηρή απόδειξη, καλλιεργώντας ο ίδιος το κατάλληλο bfp εννοιολογικό υπόβαθρο στους μαθητές του, που θα τους βοηθήσει να ασχοληθούν με το πρόβλημα και να οδηγηθούν στην ολοκλήρωση και του τυπικού μέρους της απόδειξης.

Στα μειονεκτήματα του σεναρίου μπορεί να περιληφθεί το αρκετά σύνθετο μαθηματικό υπόβαθρο που απαιτούν τα στάδια τόσο της διατύπωσης της πρότασης, όσο και της ολοκλήρωσης της απόδειξης της.

Όπως έχει όμως ήδη προαναφερθεί, η επιλογή του θέματος αφορά στο να αναδείξει ‘τα μαθηματικά’ έναντι του πειραματικού και εμπειρικού τρόπου εργασίας που είναι συνήθης στη χρήση των Ψ.Τ.

Εν κατακλείδι…

Η επιτυχής έκβαση της υλοποίησης του σεναρίου εξαρτάται σε καθοριστικό βαθμό από το μαστόρεμα του εκπαιδευτικού στις μεταβάσεις που χρειάζεται να κάνει από το εμπειρικό – πειραματικό στάδιο, στην πορεία προς την τυπική απόδειξη. Πολύτιμο εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού για το σκοπό αυτό το ψηφιακό δόμημα, που μέσω της συνεχούς ανατροφοδότησης των μαθητών καλλιεργεί τις κατάλληλες συνθήκες αλλά και το ενδιαφέρον τους προς αυτή την κατεύθυνση.

Κλείνοντας ας μη ξεχνάμε ότι «ένα από τα σημαντικότερα δώρα που ο ανθρώπινος πολιτισμός κληρονόμησε από την Αρχαία Ελλάδα είναι η αντίληψη της μαθηματικής απόδειξης»(Babai,1992)

Επομένως θεωρούμε ότι η δημιουργία πλαισίων παιδαγωγικής αξιοποίησης των Ψ.Τ θα πρέπει να αποτελεί κεντρική μας στόχευση προκειμένου να κινητοποιούμε τους μαθητές ώστε να χαρούν αυτό το δώρο!

Teaching is learning and learning is remembering?

9. Βιβλιογραφία

Κυνηγός Χ. (2016) Σημειώσεις & διαφάνειες μαθήματος e-class «Παιδαγωγική Αξιοποίηση Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση»

Πόταρη Δ. (2016) Σημειώσεις & διαφάνειες μαθήματος e-class «Έρευνα στη Δ.τ.Μ και Διδακτική Πράξη»

Ψυχάρης Γ. (2016) Σημειώσεις & διαφάνειες μαθήματος e-class «Ενσωμάτωση Τεχνολογίας στη Δ.τ.Μ»

Μούτσιος – Ρέντζος Α. (2016) Σημειώσεις & διαφάνειες μαθήματος e-class «Ειδικά Θέματα Διδακτικής: "Επιχειρηματολογία και Απόδειξη στα Μαθηματικά"»

Ευκλείδεια Γεωμετρία (2015) -Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων Διόφαντος

Kynigos C., (2012) Constructionism: Theory of learning or theory of design?

Kynigos, C., & Argyris, M. (2004). Teacher beliefs and practices formed during an innovation with computer-based exploratory mathematics in the classroom. Teachers and Teaching: Theory and Practice, 10(3), 247–273.

Collette Laborde, Chronis Kynigos, Karen Hollebrands and Rudolf Strasser (2006). Teaching and learning Geometry with Technology

Kynigos, C.(2012). Constructionism: Theory of Learning or Theory of Design?

Punya Mishra , Matthew J. Koehler (2015) Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge

Francesca Ferrara, Dave Pratt, Ornella Robutti, The role and uses of technologies for the teaching of Algebra and Calcullus

Richard Noss, Lulu Healy and Celia Hoyles (1997) The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic

C.Christou, N.Mousoulides, M.Pittalis and D.Pitta-Panatzi (2002). Proofs through exploration in Dynamic Geometry Environments

Ferdinando Arzarello, Valeria Andriano, Federica Olivero & Ornella Robutti, (1998). Abduction and Conjecturing in Mathematics.

Mariotti, M. A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland & J. Mason

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment

(Eds.), Exploiting mental imagery with computers in mathematics education (pp. 97–116). Ber-lin,Germany: Springer Verlag.

Mariotti, M.A (2012). Proof and proving in the classroom:Dynamic Geometry Systems as tools ofsemiotic mediation

Hanna G (2000). Proof, Explanation and Exploration: an overview

Kate Mackrell (2011). Design decisions in interactive geometry software

Anna Baccaglini-Frank , Maria Alessandra Mariotti (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model

F. Lopez-Real , A. Leung (2014).Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments