Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																												$\frac{\pi}{4}$					
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

26. Lös ekvationen

$$\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x} = 4\sin 2x.$$

Ange summan av de två minsta positiva lösningarna.

26. Lös ekvationen

$$\frac{1\ +\ \tan^2 x}{1-\ \tan^2 x} = 4\cdot\sin 2x$$

Ange summan av de två minsta positiva lösningarna.

Börja med att identifiera
trigonometriska identiteter (för substitution):

för VÄNSTER LED:

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

för HÖGER LED:

$$\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$$

vi börjar med VÄNSTER LED:

$$\frac{1\ +\ \tan^2 x}{1\ -\ \tan^2 x} = \frac{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x\ +\ \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x-\ \sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

. . . vilket förenklat blir :

$$\frac{\cos^2 x\ +\ \sin^2 x}{\cos^2 x\ -\ \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x\ -\ \sin^2 x}$$

HÖGER LED:

$$\frac{1}{\cos^2 x\ -\ \sin^2 x} = 4\ \cdot\ \sin 2x$$

$$1 = 4\cdot\sin 2x\ \cdot(\cos^2 x\ -\ \sin^2 x)$$

utnyttja att $\cos 2x$ = $\cos^2 x\ -\ \sin^2 x$

$$1 = 4\cdot\sin 2x\ \cdot\cos 2x = 2\cdot 2\cdot\sin 2x\ \cdot\cos 2x$$

och $\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$

$$\sin 4x = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x$$

$$1 = 4\cdot\sin 2x\ \cdot\cos 2x$$

$$1\ = 2\cdot 2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x$$

$$1 = 2\cdot\sin 4x$$

då gäller: $\sin 4x\ = \frac{1}{2}$

och alltså $4x\ = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

generellt gäller

$$4x\ = \frac{\pi}{6} + 2\cdot k\cdot\pi \quad \text{och} \quad 4x\ = \frac{5\pi}{6} + 2\cdot k\cdot\pi$$

alltså

$$x\ = \frac{\pi}{24} + \frac{k\cdot\pi}{2} \quad \text{och} \quad x\ = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\cdot\pi}{2}$$

Summan av de två minsta lösningarna är:

$$\frac{\pi}{24} + \frac{5\pi}{24} = \frac{6\pi}{24} = \frac{\pi}{4}$$

A + B