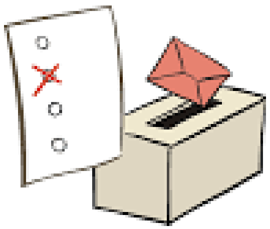
Ba-Wü: BG
Neuer Lehrplan Mathematik
Modul-5: Prozesse
Teil 3a: stochastische Übergangsprozesse

Stoffverteilungsplan 1

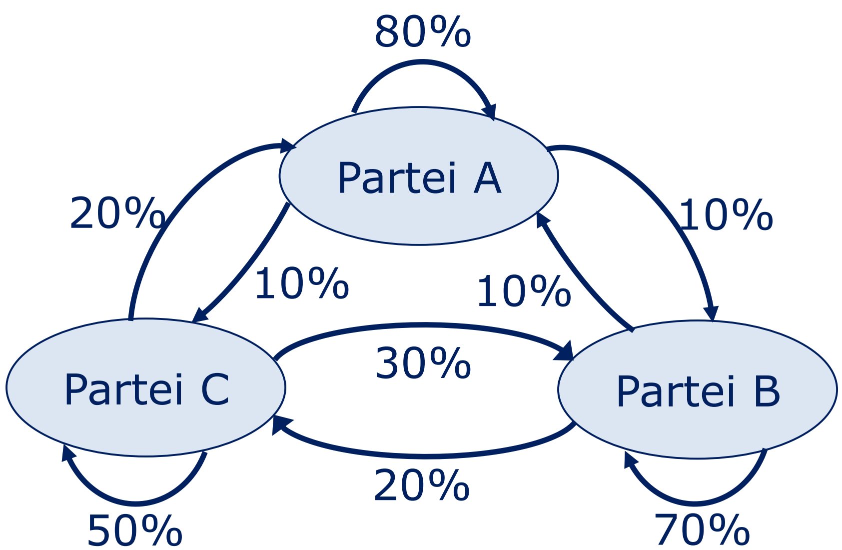
Woche	Inhalte
1 + 2	Einstufige Prozesse Darstellung mit Tabellen, Graph, Matrizen u. Vektoren Rechnen mit Matrizen und Vektoren
3 + 4	Umkehrung eines Prozesses Lineare Gleichungssysteme, inverse Matrix einfache Matrizengleichungen
5	Übungen
6 + 7	Zweistufige Prozesse Verflechtungsdiagramm, Verflechtungsmatrizen Bedarfs-, Kosten-, Gewinnermittlung
8 + 9	Übungen, Klassenarbeit
10	Austauschprozesse, stochastische Matrizen neu Verteilungsvektor, Übergangsmatrix und –graph, Matrixpotenzen
11	Stabilitätsvektor, Grenzmatrix Absorbierender Zustand
12 + 13	Übungen
14 + 15	Entwicklungsprozesse, zyklische Matrizen Populationsentwicklungen
16 - 18	Übungen, Klassenarbeit



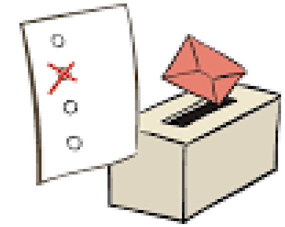
Beispiel Wählerwanderung

Zwischen je zwei Wahlen untersuchen Meinungsforschungsinstitute das Wahlverhalten der Wähler und veröffentlichen die ermittelten Wahrscheinlichkeiten in „Wählerwanderungsanalysen".

Übergangsgraph



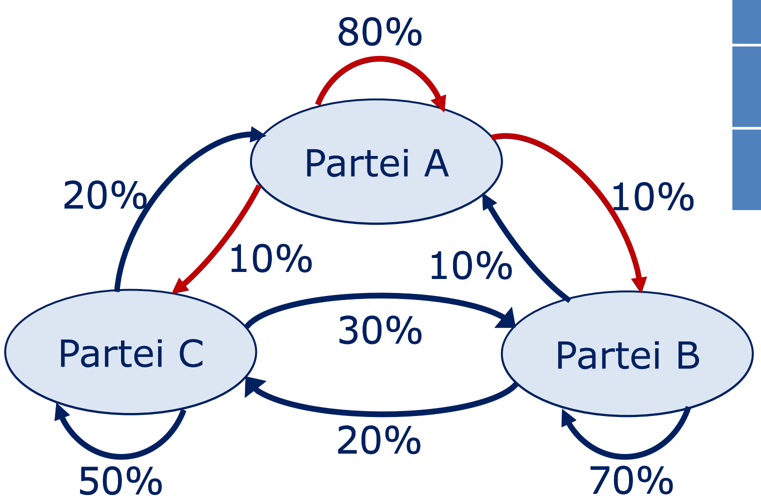
Übergangsprozesse



Beispiel Wählerwanderung

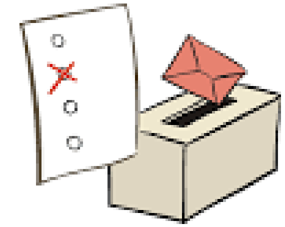
…. „Wählerwanderungsanalysen“ in Anteilen

Übergangstabelle



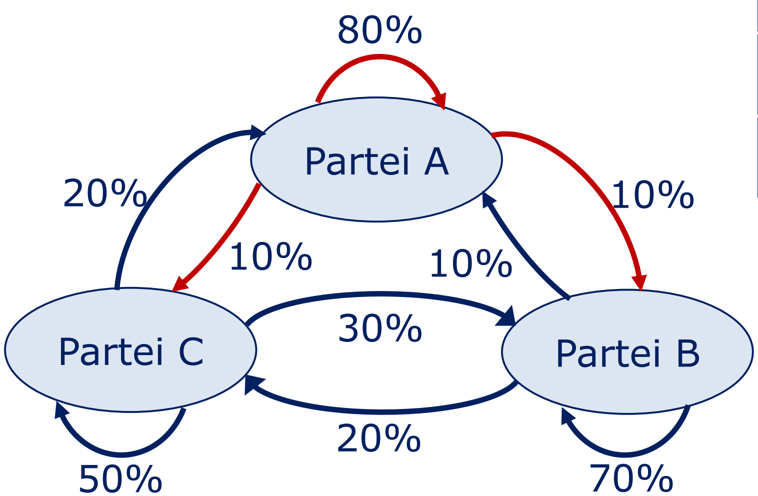
von \ nach	Partei A	Partei B	Partei C
Partei A	0,8	0,1	0,1
Partei B	0,1	0,7	0,2
Partei C	0,2	0,3	0,5

Zeilensumme ist immer 1.



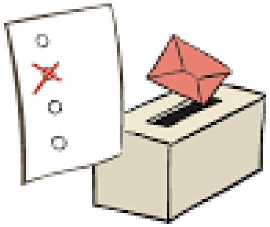
Beispiel Wählerwanderung

Übergangstabelle



von / nach	Partei A	Partei B	Partei C
Partei A	0,8	0,1	0,2
Partei B	0,1	0,7	0,3
Partei C	0,1	0,2	0,5

Spaltensumme ist immer 1.



Beispiel Wählerwanderung

Wir entscheiden uns für diese Darstellung, weil Übergänge mit Spaltenvektoren weiterbearbeitet werden können

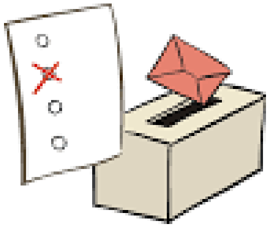
Spaltenstochastische Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Spaltensumme ist immer 1.

Übergangsprozesse

Beispiel Wählerwanderung



Bei der letzten Landtagswahl erreichte Partei A 50 %, Partei B 40 % und Partei C 10 % der Stimmen. Welche Verteilung wird nach der Wählerwanderungsanalyse bei der nächsten Landtagswahl erwartet?

Anfangsverteilungsvektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$

Übergangs-matrix

alter Zustand

spaltenstochastisch $\vec{v}_1 = M \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}46 \\ 0{,}36 \\ 0{,}18 \end{pmatrix}$

neuer Zustand

zeilenstochastisch $\vec{v}_1^T = \vec{v}_0^T \cdot M^T = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}46 & 0{,}36 & 0{,}18 \end{pmatrix}$

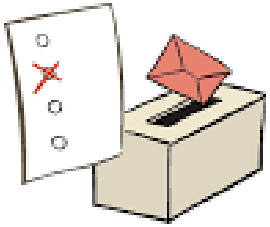
Übergangsprozesse *stochastische Matrix*

In den Übergangsmatrizen stochastischer Prozesse sind stets relative Häufigkeiten oder Wahrscheinlichkeiten für die Übergänge eingetragen.

- Für jedes Element gilt $0 \leq a_{ij} \leq 1$.
- Die Übergangsmatrix ist immer quadratisch.
- Die Spaltensumme beträgt immer 1.

Eine solche quadratische Matrix heißt stochastische Matrix.

Beispiel Wählerwanderung



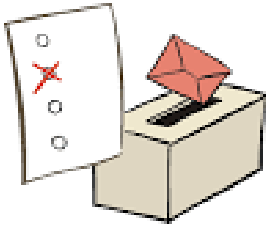
Welche langfristige Entwicklung kann für künftige Landtagswahlen erwartet werden, wenn sich die Übergangswahrscheinlichkeiten der Wähler nicht ändern?

$$\vec{v}_1 = M \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}46 \\ 0{,}36 \\ 0{,}18 \end{pmatrix}$$

iterativ $\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n$

$$\vec{v}_2 = M \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}46 \\ 0{,}36 \\ 0{,}18 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}440 \\ 0{,}352 \\ 0{,}208 \end{pmatrix}$$

Beispiel Wählerwanderung



… langfristige Entwicklung

$$\vec{v}_{13} = M \cdot \vec{v}_{12} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}410 \\ 0{,}363 \\ 0{,}227 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}409 \\ 0{,}363 \\ 0{,}227 \end{pmatrix}$$

Probieren

$$\vec{v}_{14} = M \cdot \vec{v}_{13} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}409 \\ 0{,}363 \\ 0{,}227 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}409 \\ 0{,}363 \\ 0{,}227 \end{pmatrix}$$

stabile Verteilung
Der Vektor ändert sich nicht mehr.

$$\vec{v}_{13} = M \cdot \vec{v}_{12} = M \cdot M \cdot \vec{v}_{11} = M \cdot M \cdot M \cdot \vec{v}_{10} = M^{13} \cdot \vec{v}_{0}$$

Übergangsprozesse

Wie findet man eine stabile Verteilung, falls sie existiert?

Beispiel $\qquad \vec{v}_{13} = M \cdot \vec{v}_{12} = M \cdot M \cdot \vec{v}_{11} = M \cdot M \cdot M \cdot \vec{v}_{10} = M^{13} \cdot \vec{v}_0$

Matrixpotenzen $\qquad \vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n = M \cdot M \cdot \vec{v}_{n-1} = \cdots = M^{n+1} \cdot \vec{v}_0$

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \qquad M^2 = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,19 & 0,29 \\ 0,18 & 0,56 & 0,38 \\ 0,15 & 0,25 & 0,33 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0,527 & 0,306 & 0,362 \\ 0,278 & 0,443 & 0,391 \\ 0,195 & 0,251 & 0,247 \end{pmatrix} \qquad M^8 = \begin{pmatrix} 0,433 & 0,388 & 0,400 \\ 0,346 & 0,379 & 0,370 \\ 0,221 & 0,233 & 0,230 \end{pmatrix}$$

$$M^{16} = \begin{pmatrix} 0,410 & 0,408 & 0,409 \\ 0,363 & 0,364 & 0,364 \\ 0,227 & 0,228 & 0,227 \end{pmatrix} \qquad M^{21} = \begin{pmatrix} 0,409 & 0,409 & 0,409 \\ 0,364 & 0,364 & 0,364 \\ 0,227 & 0,227 & 0,227 \end{pmatrix}$$

Übergangsprozesse

Wie findet man eine stabile Verteilung, falls sie existiert?

Grenzmatrix

Für n $\to \infty$ gilt $M^n \to \begin{pmatrix} 0{,}409 & 0{,}409 & 0{,}409 \\ 0{,}364 & 0{,}364 & 0{,}364 \\ 0{,}227 & 0{,}227 & 0{,}227 \end{pmatrix}$

Vermutung

Beliebige Verteilung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 - v_1 - v_2 \end{pmatrix}$$

Kontrolle

$$\begin{pmatrix} 0{,}409 & 0{,}409 & 0{,}409 \\ 0{,}364 & 0{,}364 & 0{,}364 \\ 0{,}227 & 0{,}227 & 0{,}227 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 - v_1 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}409 \\ 0{,}364 \\ 0{,}227 \end{pmatrix}$$

Bestätigung

Von jeder beliebigen Ausgangsverteilung erreicht man den gleichen Zustand

Stabiler Zustand

$$\vec{v}_n = M^n \cdot \vec{v}_0$$

Wenn sich die Matrixpotenz nicht mehr ändert …

$$\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n = M^{n+1} \cdot \vec{v}_0$$

… dann ändert sich der Vektor nicht mehr.

Grenzmatrix

Ein stochastischer Übergangsprozess, der eine Grenzmatrix besitzt hat genau eine stabile Verteilung.

Die Grenzmatrix ist der „Grenzwert“ der Potenzen M^n der Übergangs-matrix M für $n \to \infty$.

- Alle Spalten sind gleich.
- Die Spalten entsprechen der stabilen Verteilung.
- Die stabile Verteilung ist unabhängig von der Anfangsverteilung.
- Nicht jede stochastische Übergangsmatrix besitzt eine Grenzmatrix.
- Nicht zu jeder stochastischen Übergangsmatrix gibt es genau eine stabile Verteilung.

Stochastische Prozesse

Nicht zu jeder stochastischen Matrix gibt es eine stabile Verteilung.

Satz: (Existenz einer Grenzmatrix)
P sei eine stochastische Matrix. Wenn es unter den Matrizen P, P^2 ,P^3 , ... eine Matrix mit mindestens einer Zeile gibt, in der alle Einträge positiv (>0, echt größer) sind, dann besitzt der Austauschprozess eine stabile Verteilung g und eine Grenzmatrix G, deren Spalten alle gleich sind.

Aus Lambacher-Schweizer "Analytische Geometrie und lineare Algebra"
1.Auflage 2012 S.175

Stochastische Prozesse

Wie findet man eine stabile Verteilung, falls sie existiert?

Gleichungssystem lösen

Wenn es eine stabile Verteilung gibt, gilt für einen Vektor $\vec{x}$

$$M \cdot \vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow M \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow (M - E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$$

LGS mit nichttrivialen Lösungen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}3 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}5 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1{,}8 & 0 \\ 0 & 1 & -1{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 1{,}6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

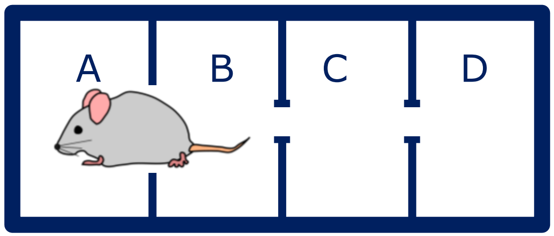
Mit der Nebenbedingung: $x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Leftrightarrow \vec{x} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

Matrizen-rechner.de

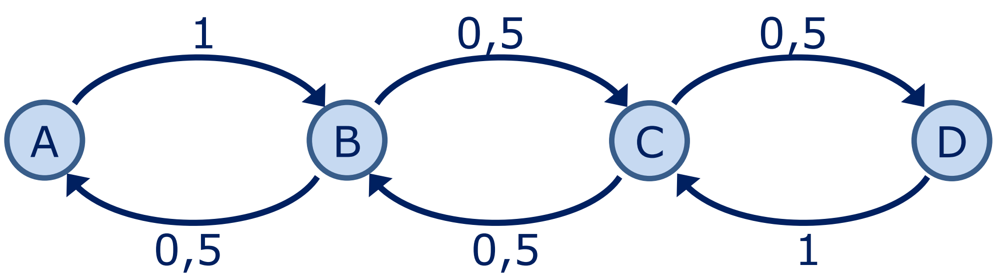
Übergangsprozesse — stochastische Matrix

Nicht jeder Übergangsprozess konvergiert gegen den stabilen Zustand.

Beispiel



In einem biologisches Experiment wird das Verhalten von Mäusen untersucht.
Die Mäuse befinden sich in vier Räumen, die durch Türen miteinander verbunden sind.
Die Forscher haben festgestellt, dass jede Maus innerhalb einer Minute in einen Nachbarraum wechselt - ob nach rechts oder links ist zufällig.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

Nicht jeder Übergangsprozess konvergiert gegen einen stabilen Zustand.

Beispiel Berechnung des stabilen Zustandes

$$(M - E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & -1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$\Rightarrow x_1 = x_4 = \tfrac{1}{6}$$
$$\Rightarrow \wedge \quad x_2 = x_3 = \tfrac{1}{3}$$

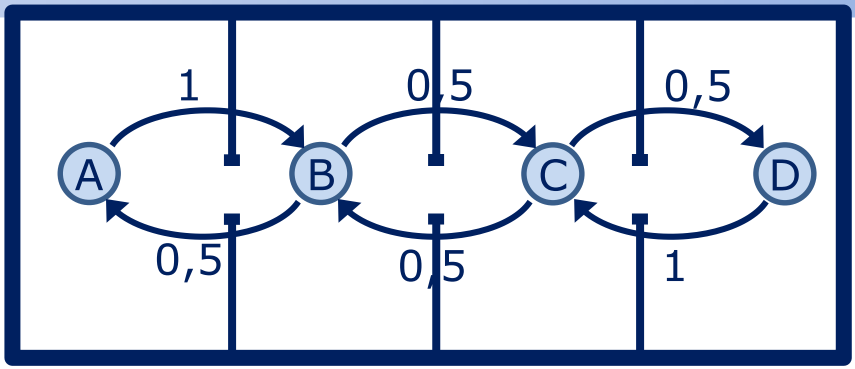
Probe

$$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

stabiler Zustand

Übergangsprozesse

Nicht jeder Übergangsprozess konvergiert gegen einen stabilen Zustand.

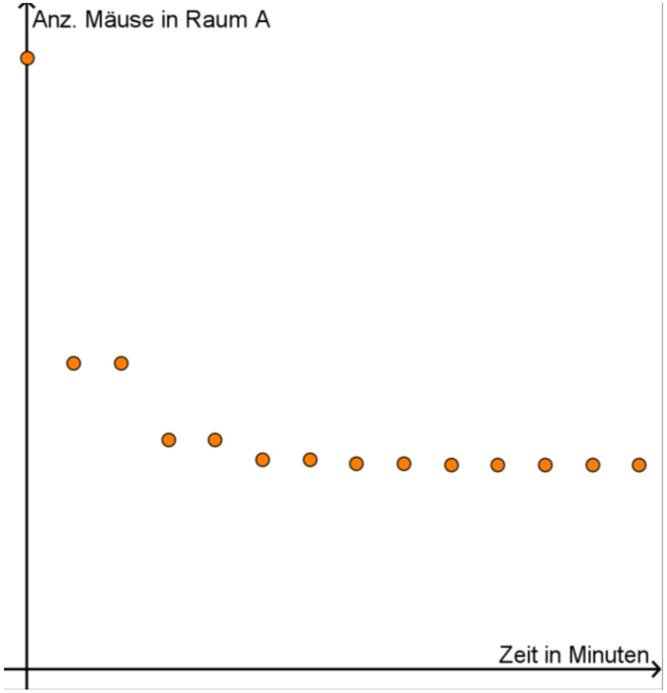


Beispiel

1. Fall: Am Anfang setzen die Forscher je 30 Mäuse in Raum **A und B**.

$$M^{10} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}167 \\ 0{,}333 \\ 0{,}333 \\ 0{,}167 \end{pmatrix}$$

konvergiert gegen den stabilen Zustand



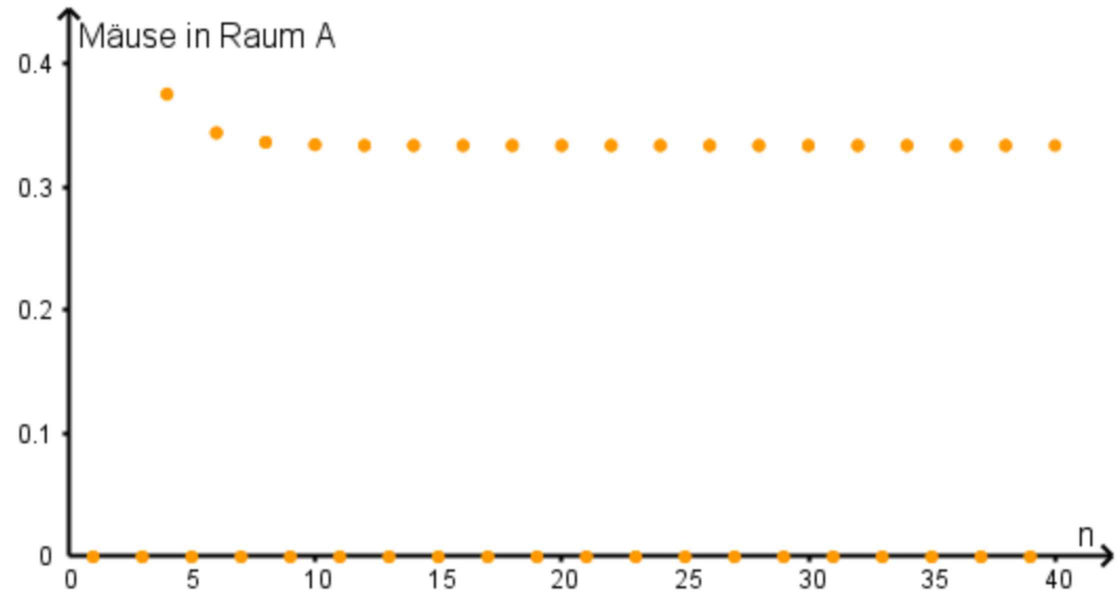
Übergangsprozesse

Nicht jeder Übergangsprozess konvergiert gegen einen stabilen Zustand.

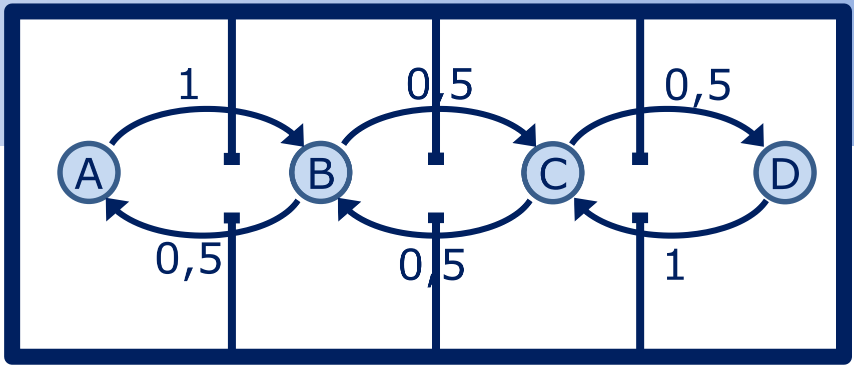
2. Fall: Am Anfang setzen die Forscher alle 60 Mäuse in Raum A.

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_{10} = \begin{pmatrix} 0{,}33 \\ 0 \\ 0{,}66 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}66 \\ 0 \\ 0{,}33 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_{12} = \begin{pmatrix} 0{,}33 \\ 0 \\ 0{,}66 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

kein stabiler Zustand,
wechselnd

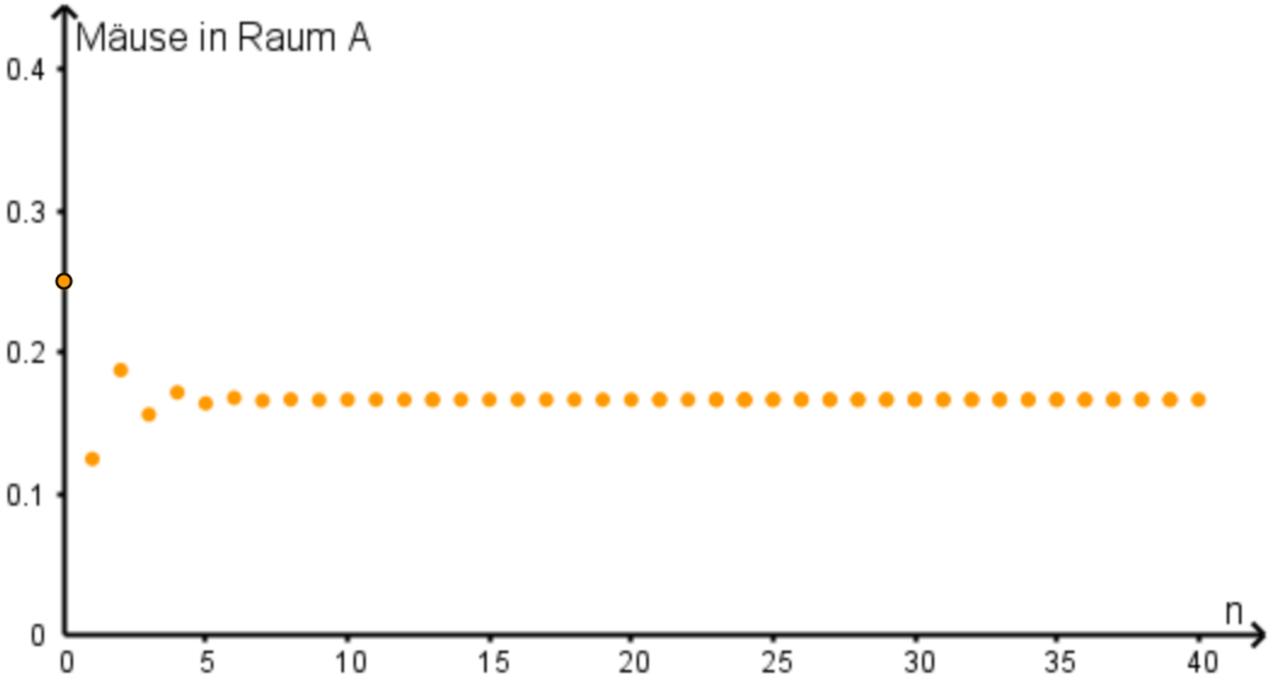


Übergangsprozesse



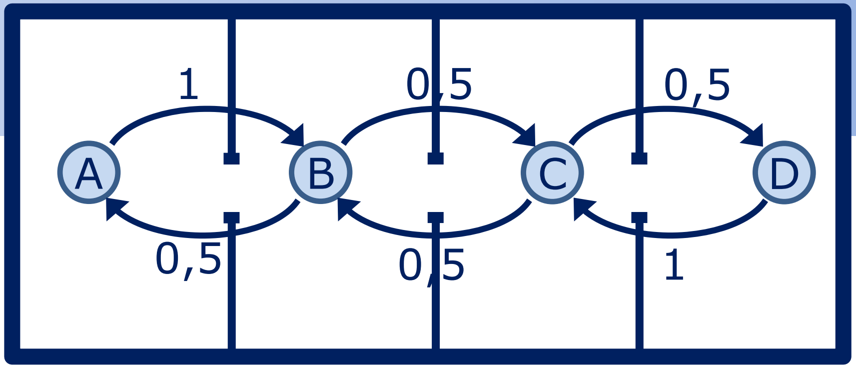
3. Fall: Am Anfang setzen die Forscher in alle Räume **je 15** Mäuse.

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$



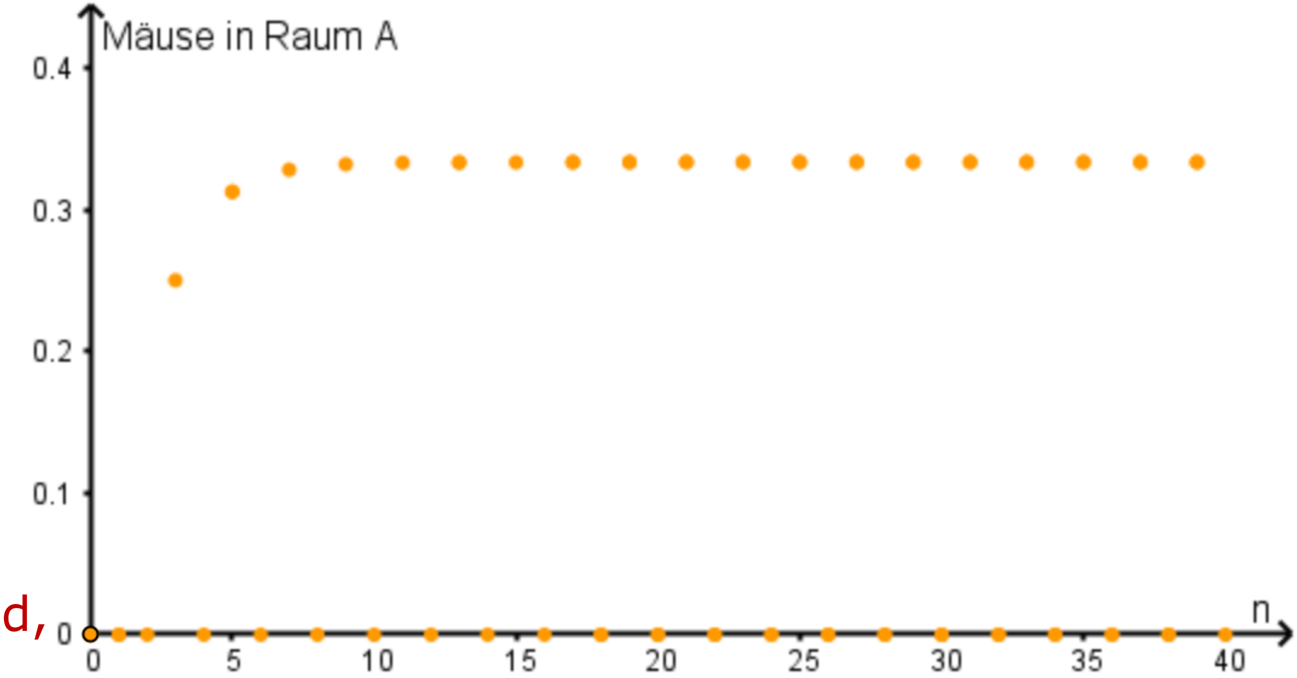
konvergiert gegen den stabilen Zustand

Übergangsprozesse



4. Fall: Am Anfang setzen die Forscher alle 60 Mäuse in Raum D.

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



kein stabiler Zustand, wechselnd

Nicht jeder Übergangsprozess konvergiert gegen einen stabilen Zustand.

Die Matrizenpotenzen dieser Übergangsmatrizen konvergieren nicht

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^{10} = \begin{pmatrix} 0{,}33 & 0 & 0{,}33 & 0 \\ 0 & 0{,}66 & 0 & 0{,}66 \\ 0{,}66 & 0 & 0{,}66 & 0 \\ 0 & 0{,}33 & 0 & 0{,}33 \end{pmatrix}$$

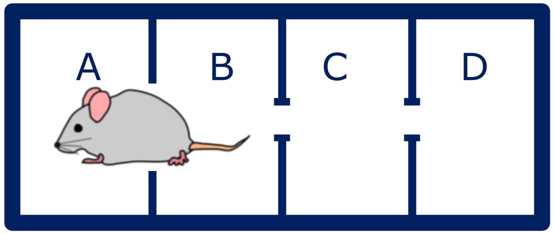
$$M^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}33 & 0 & 0{,}33 \\ 0{,}66 & 0 & 0{,}66 & 0 \\ 0 & 0{,}66 & 0 & 0{,}66 \\ 0{,}33 & 0 & 0{,}33 & 0 \end{pmatrix}$$

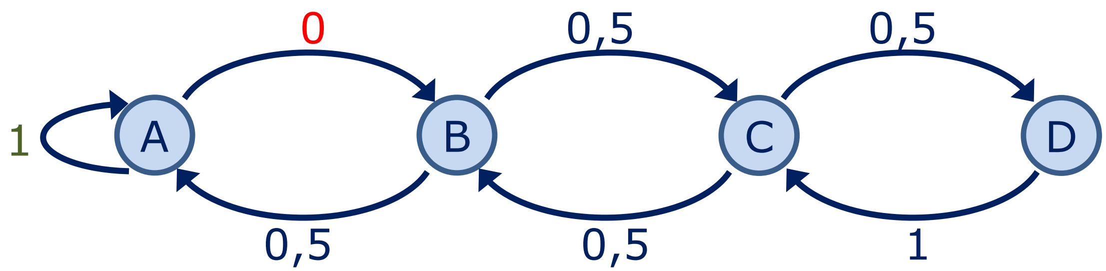
- Es gibt zwar einen stabilen Zustand aber keine Grenzmatrix.
- Nicht jeder Ausgangszustand konvergiert zum stabilen Zustand.

Absorbierender Zustand

Beispiel: Abänderung

Die Mäuse welche in Raum A gelangen verlassen diesen nicht mehr. (z.B. mit Tür welche nur von außen geöffnet werden kann, Fallgitter)

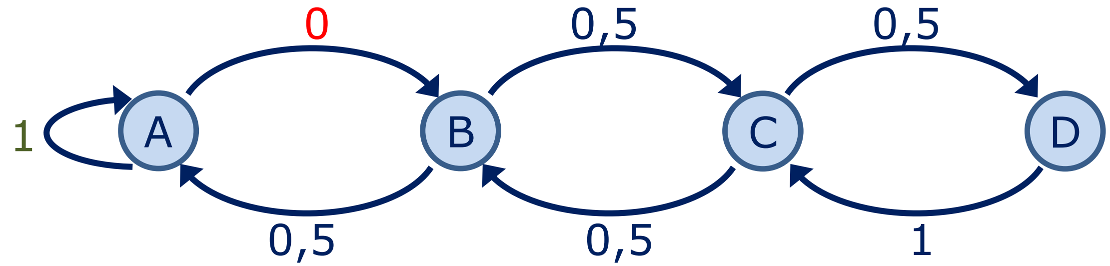




$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

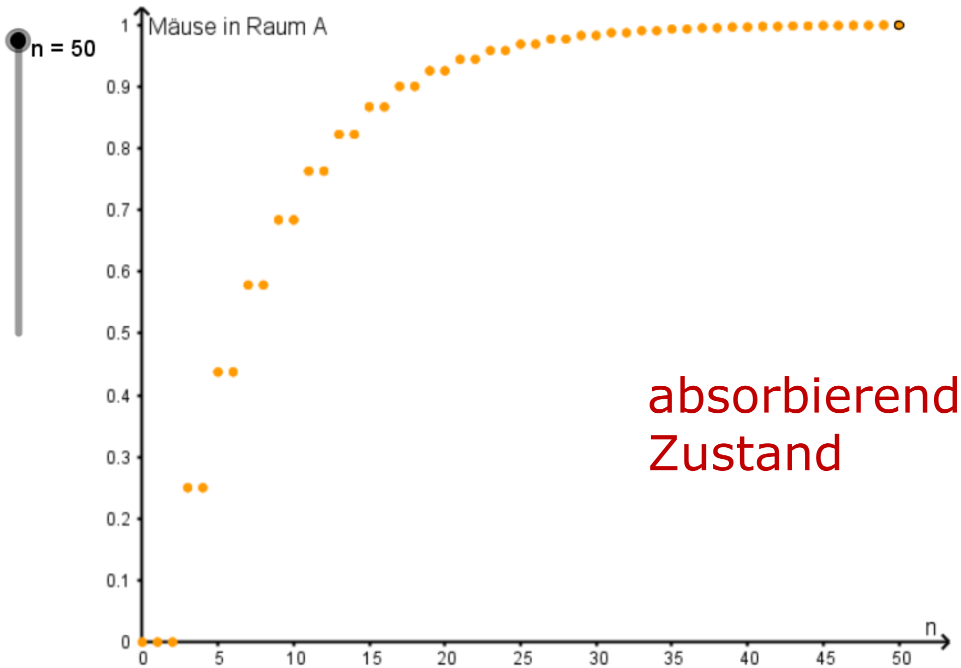
Übergangsprozesse

Absorbierender Zustand



5. Fall: Am Anfang setzen die Forscher alle Mäuse in Raum D.

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



absorbierender Zustand

$$v_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Absorbierender Zustand

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \qquad G=M_n=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_n=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Der Prozess konvergiert zum absorbierenden Zustand.
- In der Regel sind diese daran zu erkennen,
  dass (genau) ein <u>Diagonal</u>element der Übergangsmatrix gleich Eins ist
  und folglich alle anderen Elemente dieser Spalte gleich Null sind.