UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO:
Evolução Histórica, Fundamentos e Sugestões para o Ensino.

Santarém (PA)

2013

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO:

Evolução Histórica, Fundamentos e Sugestões para o Ensino.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Matemática em Rede Nacional* – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz

Santarém (PA)

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Gestão da Informação – SIGI/UFOPA

P813j Rodrigues, Aroldo Eduardo Athias

Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino / Aroldo Eduardo Athias Rodrigues. – Santarém, 2013.

166 f. : il.

Orientador Hugo Alex Carneiro Diniz.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional em Matemática. Santarém, 2013.

1. Sistemas de numeração. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Matemática - Metodologia. I. Diniz, Hugo Alex Carneiro, *orient*. II. Título.

CDD: 23 ed. 513.5

Bibliotecário - Documentalista: Mayco Ferreira Chaves – CRB/2 1357

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO:

Evolução Histórica, Fundamentos e Sugestões para o Ensino.

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação *Matemática em Rede Nacional* – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz

Orientador – UFOPA

Prof. Dr. Sebastián Mancuso

Examinador – UFOPA

Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz

Examinador – UFPA

Santarém (PA)

2013

DEDICATÓRIA

À minha linda e amada esposa *Kássya* e aos meus queridos filhos *Eduardo* e *Isabela* que, compreendendo minhas ausências, contribuíram muito para que este trabalho pudesse ser escrito.

AGRADECIMENTOS

A Deus, cuja permissão é necessária para que algo se concretize.

À minha mãe, Noemi, que com seu imenso amor, carinho e dedicação, possibilitou que eu tivesse uma trajetória de vida que me conduziu até aqui.

Aos meus professores, que na sublime tarefa docente, muitas vezes deixaram suas famílias para compartilhar seu saber comigo.

À minha tia Ruth e à minha madrinha Denise, que me deram abrigo e atenção quando precisei me estabelecer em sua casa.

Ao meu orientador, Prof. Hugo Diniz, cujas valiosas contribuições tornaram este trabalho muito melhor.

Aos meus amigos e colegas da turma do PROFMAT/UFOPA 2011 pelos momentos de alegria e angústia compartilhados.

Aos meus alunos e colegas de trabalho, os quais me ensinaram valiosas lições sobre o ser humano.

À minha cunhada, Thaiza, que gentilmente se dispôs a fazer as necessárias correções gramaticais e ortográficas deste trabalho.

*Os algarismos são uma substância poética,
permeados de humanidade.*

Georges Ifrah

RESUMO

São os sistemas de numeração que permitem a representação dos números, os quais, juntamente com as formas, constituem o principal objeto de estudo da Matemática. É através deles também que se podem justificar os procedimentos adotados para efetuar as quatro operações aritméticas básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. É, portanto, extremamente importante que o professor de Matemática tenha uma compreensão profunda do funcionamento dos sistemas de numeração, em especial, do sistema de numeração posicional decimal (SNPD), amplamente difundido e utilizado em todas as partes do mundo atual, e que está fundado sobre a base decimal e no chamado princípio de posição. Este trabalho é fruto de pesquisa bibliográfica, feita a respeito do tema “sistemas de numeração”, bem como das reflexões de seu autor acerca das propriedades dos sistemas de numeração, em especial aquelas relacionadas com os critérios de divisibilidade e a representação dos números reais em sistemas posicionais. O trabalho aborda o tema a partir de três aspectos principais: sua evolução histórica e aplicações; as propriedades puramente matemáticas dos sistemas de numeração posicionais; e a forma como o professor pode utilizar os dois aspectos anteriores em suas aulas. Seu objetivo é reunir, em um único material, as informações mais relevantes a respeito dos sistemas de numeração, dentro dos três aspectos citados anteriormente, para que tanto professores de Matemática quanto outros indivíduos interessados em saber mais sobre o tema, consultando-o, obtenham, com relativa facilidade, sólidas e confiáveis informações a respeito desta temática.

Palavras-chave: Sistemas de numeração. Critérios de divisibilidade. Base. Princípio de posição. Evolução histórica.

ABSTRACT

Numeral systems allow the representation of numbers. They all together with the forms constitute the main object of studying of the Mathematic. It is also through them that someone can justify procedures used to perform the four basic arithmetic operations: addition, subtraction, multiplication and division. It is therefore extremely important that the math teacher has a deep understanding of the functioning of numeral systems, in especial, the decimal positional numeral system (DPNS), widely disseminated and used in all parts of the world today, and that is founded on the decimal base and on the called positional notation. This work is the resulting of a bibliographical research, it has done on the topic “numeral systems” as well as the reflections of the author on the properties of numbering systems, in particular those related to the criteria for divisibility and the representation of real numbers in positional systems. The work addresses the topic from three main aspects: its historical evolution and applications; purely mathematical properties of positional numeral systems; and how the teacher can use the two previous aspects in their classes. Its goal is to gather, in a single material, the most relevant information about the numeral systems within the three aspects mentioned above. For both math teachers as other individuals interested in learning more about this topic, referring to it they can obtain with relative ease, solid and reliable information on this subject.

Keywords: Numeral systems. Criteria for divisibility. Base. Positional notation. Historical evolution.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A necessidade de representar os números levou os homens à criação de diversos sistemas com essa finalidade, chamados sistemas de numeração. O estudo de tais sistemas é o objetivo principal deste trabalho, que procura reunir, em um único lugar, diferentes aspectos relacionados ao estudo deste tema, como seu desenvolvimento histórico, aplicações, explicitação de propriedades importantes ou curiosas e sugestões para abordá-lo na escola.

Uma vez que os números ocupam um papel central na Matemática, todo aquele que deseje um dia ensinar ou fazer Matemática deve compreender a maneira pela qual os números são representados, o que leva ao estudo dos sistemas de numeração. Essa maneira, aliás, exerce também grande influência na realização das operações com estes números, portanto, encontrar uma boa notação para eles foi de suma importância para o desenvolvimento da Matemática.

O desenvolvimento de um sistema de numeração eficiente, como é o caso do sistema de numeração posicional decimal (SNPD), não foi algo que ocorreu rapidamente e, embora estejamos habituados com o seu uso, nem sempre os homens dominaram as regras que governam seu funcionamento, em especial, o princípio de posição. O fato de já termos automatizado muitas de suas propriedades, simplesmente utilizando-as, sem nos preocuparmos com o porquê de funcionarem, pode nos levar a crer que um estudo do SNPD é algo simplório. Porém, quem pensa dessa maneira, ignora certamente o fato de que os homens levaram milênios para poder desenvolvê-lo.

Certo dia, ainda quando estudante do curso de licenciatura em Matemática, consultando o livro Introdução à História da Matemática, de Howard Eves, entrei em contato com o mundo dos sistemas de numeração, esforçando-me para entender o que era a base de um sistema de numeração. Depois de encantar-me com a maneira prodigiosa como a inteligência dos homens os conduziu à invenção de diversos sistemas para representar os números, acabei me dando conta de que, mesmo estando em um curso de graduação em Matemática, não sabia por que realizava as operações aritméticas básicas seguindo os algoritmos que me foram ensinados. Não podendo admitir tamanha ignorância de um futuro professor de Matemática, comecei a refletir sobre tais algoritmos, redescobrindo as justificativas procuradas, utilizando apenas os novos conhecimentos adquiridos com o estudo dos sistemas de numeração e, muito provavelmente, os ensinamentos recebidos na infância, os quais deviam estar guardados em algum lugar em meu subconsciente. Apenas mais tarde comecei a entrar em contato, de maneira dispersa, com materiais de estudo que forneciam explicações sobre os algoritmos das quatro operações.

Através dessa experiência pessoal, percebi a grande influência que a compreensão do funcionamento dos sistemas de numeração tem sobre a aprendizagem das operações básicas, com as quais nossos alunos, muitas vezes têm dificuldades para lidar, especialmente a divisão.

Na busca de compreender o funcionamento do algoritmo da divisão, em particular, tentando entender quando o quociente será uma dízima periódica ou um decimal exato, acabei descobrindo que a periodicidade não era uma propriedade apenas dos números, mas também dos sistemas de numeração nos quais esses números são representados.

Acreditando ser capaz de encontrar métodos eficientes para identificar números primos a partir da representação dos números em sistemas posicionais, acabei deparando-me com padrões que se transformaram nos teoremas sobre critérios de divisibilidade apresentados no Capítulo 3. Hoje, acredito que a tentativa de identificar primos deste modo não renderia frutos, porém este é um bom exemplo, como muitos outros encontrados na História da Matemática, de como a busca da solução de um problema famoso pode conduzir a descobertas interessantes.

Além de tudo o que foi dito antes, este trabalho também é fruto de pesquisa feita nas mais variadas fontes, como livros sobre História da Matemática e Teoria dos Números, revistas como a RPM (Revista do Professor de Matemática), livros digitais relacionados à Informática, além da consulta a sites pela internet.

Este trabalho está organizado em quatro capítulos, sempre precedidos por uma breve introdução explicando o que será tratado neles e, ao final de cada um, há sempre uma seção denominada “Sugestões de Atividades”, voltada especificamente para professores de Matemática, na qual são fornecidas algumas orientações sobre diferentes formas de abordar os conteúdos trabalhados em cada capítulo com os alunos.

O Capítulo 1 faz um resgate histórico do desenvolvimento dos sistemas de numeração, desde o momento em que os homens aprenderam a contar até a introdução na Europa do engenhoso sistema de numeração hindu, que ali chegou por meio dos árabes. Este capítulo, contudo, não pode ser ignorado, pois está permeado de conceitos que ajudarão na compreensão dos capítulos seguintes, como o conceito de base de um sistema de numeração.

O Capítulo 2 começa apresentando algumas aplicações dos sistemas de numeração posicionais, descrevendo a seguir métodos para efetuarmos conversões de uma base para outra e mostrando depois disso algumas características dos sistemas desse tipo.

No Capítulo 3 estão reunidos diversos teoremas que estabelecem formas de encontrar critérios de divisibilidade para os números naturais em qualquer sistema de numeração posicional, utilizando-os a seguir para fazer uma análise comparativa entre o sistema decimal e outros sistemas posicionais, em especial o duodecimal.

Finalmente, no Capítulo 4 é discutida a representação de números reais na forma posicional. A abordagem histórica é retomada no começo deste capítulo, dando lugar mais tarde às análises relacionadas à periodicidade de números racionais.

Após esses quatro capítulos encontram-se as considerações finais, referências, relação de sites consultados e cinco apêndices. O APÊNDICE A traz uma tabela de caracteres imprimíveis, mostrando suas representações nas formas decimal e binária. O APÊNDICE B apresenta métodos de conversão do sistema binário para os sistemas hexadecimal e octal e vice-versa. O APÊNDICE C consiste em um material de apoio ao professor para o ensino das quatro operações. O APÊNDICE D apresenta e justifica a prova dos nove para cada uma das quatro operações. No APÊNDICE E, constam as tabuadas da adição e da multiplicação do sistema binário ao vigesimal e do sistema sexagesimal, as quais podem ser particularmente úteis durante a leitura do Capítulo 3.

Pensamos que o grande mérito deste trabalho é o de dar atenção tanto a aspectos puramente matemáticos relacionados aos sistemas de numeração posicionais quanto à suas aplicações e desenvolvimento histórico, coisa que não se encontra comumente nos livros que tratam do assunto. Esperamos que a leitura deste trabalho seja, ao mesmo tempo, útil e prazerosa.

CAPÍTULO 1

EVOLUÇÃO HISTÓRICA DOS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Ao longo deste capítulo serão trabalhados, dentro de uma perspectiva histórica, os conceitos básicos necessários para a compreensão dos sistemas de numeração. Nele compreenderemos, por exemplo, porque o sistema de numeração atualmente adotado em todo o mundo é um sistema posicional e decimal. Introduziremos o conceito de *senso numérico* e trataremos do desenvolvimento do processo de *contagem*, veremos também a distinção entre os conceitos de *número*, *numeral* e *algarismo* e o conceito de *base* de um sistema de numeração. Além disso, veremos como diferentes povos, isolados muitas vezes por imensos oceanos, encontraram soluções ao mesmo tempo parecidas e originais para o problema da representação dos números. Apresentaremos também uma classificação dos sistemas de numeração, de acordo com sua estrutura e lógica de funcionamento, observando sua evolução e o caminho que conduziu a humanidade até a formação do atual sistema de numeração posicional decimal (SNPD).

1.1 SENSO NUMÉRICO E CONTAGEM

Quando se fala sobre números, aqueles que surgem em nossas mentes com mais naturalidade são os números inteiros positivos, que são agrupados em uma coleção que não poderia receber nome melhor: *conjunto dos números naturais*.

Uma vez que os números naturais têm seu surgimento associado ao processo de contagem, algumas considerações sobre este assunto nos parecem pertinentes.

Embora contar nos pareça, hoje, algo muito natural, não podemos perder de vista que o processo de contagem é uma *invenção* da espécie humana e não uma característica inata ao homem. Ninguém nasce sabendo contar, o processo de contagem é aprendido pelas crianças e é de uma complexidade tal que não pode ser aprendido pelos animais.

Mas **de onde vem a necessidade que o homem tem de contar?** Segundo Ifrah (2005), o processo de contagem surge de necessidades materiais do homem:

> Aqueles que guardavam rebanhos de carneiros ou de cabras, por exemplo, precisavam ter certeza de que, ao voltar do pasto, todos os animais tinham entrado no curral. Os que estocavam ferramentas ou armas, ou que armazenavam reservas alimentares para atender a uma vida comunitária, deviam estar aptos a verificar se a disposição dos víveres, armas ou instrumentos era idêntica a que eles haviam deixado anteriormente. Aqueles, afinal, que mantinham relações de inimizade com grupos vizinhos necessitavam saber, ao final de cada expedição militar, se o efetivo de seus soldados estava completo ou não. Os que praticavam uma economia de troca direta deviam estar aptos a “avaliar” para poder trocar um gênero ou mercadoria por outro... (2005, p. 25).

Se a faculdade de saber quantos elementos possui um determinado conjunto fosse inata ao homem, a necessidade de contar certamente não teria emergido. Portanto, a contagem surge da busca pela superação da limitação humana em perceber exatamente quantos objetos pertencem a um conjunto.

Contudo, o ser humano não é totalmente desprovido dessa capacidade de perceber o número de objetos de uma coleção, ele consegue responder prontamente (sem precisar contar) quantos elementos tem um conjunto, desde que este conjunto possua uma quantidade reduzida de elementos. A esta capacidade de perceber quantos elementos possui um conjunto sem precisar contá-los é que chamamos de *senso numérico*. Ao que tudo indica, o senso numérico humano “esbarra” no número quatro. Ainda segundo Ifrah, isso se revela, por exemplo, na “existência de várias tribos na Oceania com o costume de declinar as formas gramaticais do *singular*, *dual*, *trial*, *quaternal* e... do *plural*.” (2005, p. 21). Ou seja, depois do número quatro, para os homens, qualquer quantidade se torna “muitos”.

Também denominamos senso numérico à capacidade de perceber se um conjunto possui mais ou menos elementos do que outro sem que precisemos efetuar a contagem do número de elementos de cada um desses conjuntos. Quando a diferença entre o número de elementos das duas coleções é significativa, o homem, e mesmo alguns animais, são capazes de fazer essa distinção.

Uma vez que estejamos convencidos de que contar não é uma ação instintiva, mas é, antes de tudo, uma invenção humana, a seguinte pergunta surge naturalmente: **como o homem aprendeu a contar?**

A resposta para essa pergunta está relacionada com o conceito de *correspondência biunívoca* ou *correspondência de um para um*. Como o próprio nome diz, a correspondência biunívoca consiste em fazer corresponder a cada elemento de um determinado conjunto, cujos elementos se deseja "contar", os elementos de outro conjunto, cuja quantidade de elementos é conhecida.

Para melhor ilustrar o que queremos dizer, tomemos o exemplo clássico do pastor de ovelhas que coloca dentro de uma sacola uma pedra para cada ovelha de seu rebanho. Quando estas retornam do pasto ele sabe que a cada ovelha que passar diante dele deve fazer corresponder uma pedra. Assim, sobrando pedras, ele sabe que há ovelhas perdidas, bem como sabe que para cada ovelha que nascer deve acrescentar uma pedra no saco.

Na verdade, podemos dizer que a correspondência biunívoca transforma-se em contagem a partir do momento em que um "conjunto padrão", cuja ordem dos elementos é pré-estabelecida, passa a ser sempre utilizado para efetuar a correspondência. Esse conjunto padrão pode ser um conjunto de símbolos gráficos, de palavras, de nós em cordas etc.

Contudo, é provável que, antes mesmo de recorrer a pedras que poderia facilmente juntar do chão ou a entalhes feitos em ossos ou gravetos, o homem tenha recorrido às partes de seu próprio corpo, as quais se encontravam sempre a sua disposição.

1.2 NÚMERO, NUMERAL E ALGARISMO

Embora algumas vezes as pessoas utilizem indistintamente as palavras número e numeral, estes termos representam dois conceitos diferentes. *Numeral* é qualquer símbolo (gráfico ou não) utilizado para representar um *número*, que é a quantidade em si.

Assim, podemos fazer a seguinte associação:

NÚMERO ➔ IDEIA

NUMERAL ➔ SÍMBOLO

Desta forma, as palavras *cinco, cinq* e *five* ou os símbolos gráficos 5, V e —, não passam de numerais; todos eles utilizados para representar o mesmo número. As três palavras representam esta quantidade nas línguas portuguesa, francesa e inglesa, respectivamente, enquanto os três símbolos apresentados têm origem indo-arábica, romana e maia, respectivamente.

Um número é, na verdade, algo bastante abstrato, tal qual o conceito de "felicidade" ou "tristeza". Assim, não temos como criar em nossas mentes a imagem de um número, por mais que imaginemos conjuntos com cinco maçãs, cinco caroços de açaí, cinco ameixas ou cinco abacates, tudo o que conseguimos visualizar concretamente são maçãs, caroços de açaí, ameixas ou abacates. Embora saibamos o que todos estes conjuntos têm em comum, isto é, a quantidade de elementos, somos incapazes de visualizar o número cinco concretamente, bem como imaginando uma pessoa feliz ou triste não estamos enxergando a felicidade ou a tristeza, mas a imagem das expressões faciais de alguém.

Para sermos honestos, devemos confessar que não estamos aqui respondendo a pergunta "o que é um número?", pelo menos não com o rigor matemático que a questão merece. Dissemos apenas, de maneira vaga, que número é "a ideia de quantidade" com o objetivo de estabelecer a diferença entre número e numeral, porém não definimos o que é quantidade. Contudo, não recomendamos ao professor do ensino básico tratar tal questão dentro de uma abordagem rigorosa, a qual, para esse nível de ensino, acreditamos, seria fora de propósito. Pensamos que tirar proveito das noções intuitivas que o aluno já possui sobre o conceito de quantidade para fazê-lo enxergar que um número e sua representação são duas coisas diferentes já representa um salto conceitual significativo para o aluno. Além disso, quando o professor dissemina a dúvida no coração do aluno, desconstruindo visões equivocadas ou ampliando aquela que eles já possuíam, este aluno acaba futuramente encontrando, por seus próprios meios, uma resposta que lhe satisfaça, isto é, se realmente seu interesse pela questão tiver sido despertado.

Também existe diferença entre os conceitos de *numeral* e *algarismo*. Podemos dizer que os algarismos são as unidades constituintes do numeral escrito, da mesma forma que as letras são as unidades constituintes da palavra escrita.

Para melhor compreender essa diferença, observe a frase abaixo:

"O *numeral* 365 é composto de três *algarismos*: o 3, o 6 e o 5."

É como se disséssemos:

"A *palavra* BOLA é composta das *letras* B, O, L e A."

Por essa analogia, podemos dizer que os algarismos são as letras com que escrevemos os numerais.

Cabe ainda, nesta seção, uma última observação. Ao longo da história os povos encontraram diversas formas de representar os números. Os incas, na América do Sul, por exemplo, conseguiam representá-los através de diferentes tipos de nós feitos em cordas, o quipu. E antes disso, na região da Mesopotâmia, os sumérios fabricavam pequenos objetos de barro que eram efetivamente seus numerais. Resumindo, a mente criativa do homem não se limitou às palavras, nem mesmo esperou o desenvolvimento da escrita, quando precisou encontrar meios para representar os números.

1.3 BASE DE UM SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Chamamos de *sistema de numeração* qualquer sistema de representação dos números. Como era de se esperar, diferentes povos desenvolveram diferentes sistemas de numeração, os quais foram estruturados de maneira bastante diversa. Tais sistemas, embora diferentes, apresentavam algumas características em comum, características essas que discutiremos mais adiante.

Nesta seção, trataremos de um conceito importante relacionado aos sistemas de numeração, o conceito de *base*, o qual será introduzido através da linha de raciocínio que começaremos a expor a partir de agora.

Você consegue responder de imediato quantos traços há abaixo?

IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII

Evidentemente a resposta para esta pergunta é não, devido a tudo aquilo que foi exposto na seção 1.1 sobre senso numérico.

Contudo, se fizermos um corte horizontal a cada quinze traços verticais, você certamente será capaz de dizer quantos traços verticais há na coleção acima, desde que você esteja ciente de que um traço horizontal corresponde a quinze verticais e que a quantidade de traços horizontais não seja muito elevada.

~~IIIIIIIIIIIIIII~~ ~~IIIIIIIIIIIIIII~~ ~~IIIIIIIIIIIIIII~~ ~~IIIIIIIIIIIIIII~~ II

Contar agrupamentos é mais fácil do que contar unidades, desde que todos os grupos possuam a mesma quantidade de elementos e que esta quantidade seja conhecida.

Nada impede que os quinze traços cortados sejam substituídos por outro símbolo qualquer que represente tal quantidade, digamos que o símbolo escolhido fosse H, sugerido pela forma desta letra, que traz a mente imagem de um grupo (par) de traços verticais cortados por outro horizontal. Assim, voltando ao exemplo dado anteriormente teríamos HHHHII como uma representação do número 62.

Mantendo essa simbologia, como poderíamos representar o número 274? A resposta é HHHHHHHHHHHHHHHHHHIIII. Note que, neste caso, o símbolo H se repete tantas vezes que a limitação do senso numérico humano nos impede de saber de imediato quantas vezes esse símbolo aparece. Uma alternativa para contornar este problema é a criação de um novo símbolo, digamos Δ, para representar um agrupamento de 15 símbolos H. Desta forma, o número 274 passaria a ser representado por ΔHHHIIII. Caso o símbolo Δ aparecesse uma grande quantidade de vezes, um novo símbolo poderia ser criado e assim por diante.

Note que poderíamos fazer com que o símbolo Δ representasse 14, 16, 18 ou outra quantidade qualquer de símbolos H, porém, convencionar o uso da mesma quantidade na passagem de um símbolo para outro evita o inconveniente de ter de especificar como deve se dar cada passagem. A quantidade adotada para efetuar cada agrupamento é o que denominamos *base* do sistema de numeração. No exemplo dado, criamos um sistema de numeração de base 15, cujos algarismos são I, H e Δ.

O sistema de numeração que utilizamos hoje é decimal, ou seja, utiliza o número dez como base. Outras bases seriam possíveis, contudo, historicamente, a base dez, por ser a preferida dos povos[1], acabou se impondo.

Estamos tão habituados com o sistema decimal, que nos parece estranho pensar que qualquer outra base poderia representar (algumas vezes com vantagem) os números. As bases 11 ou 12, por exemplo, teriam sido talvez escolhas melhores, a primeira pelo fato de 11 ser primo e a segunda pelo fato de que o número 12 possui

[1] Georges Ifrah, nas páginas 77 e 78 de seu livro “História Universal dos Algarismos: A Inteligência dos Homens Contada pelos Números e pelo Cálculo”, cita uma lista contendo pelo menos 31 povos, começando pelos amoritas e terminando com etc, que utilizaram ou utilizam ainda hoje a base dez, além de outros tantos que revelam a presença dessa base em suas línguas.

mais divisores que o 10. Um pensamento que pode passar pela mente de quem pouco conhece sobre sistemas de numeração é o de que a base 10 produz numerais “melhores”, mais fáceis de trabalhar. Acreditamos que esta visão ingênua dos fatos será desconstruída ao longo das seções e capítulos que se seguem.

Mas se há outras bases tão satisfatórias quanto a base dez, por que esta foi adotada por tantos povos?

Na seção 1.1, vimos que, antes de aprender a contar, o homem se servia da correspondência biunívoca para saber a quantidade de elementos de dado conjunto. Embora o ábaco tenha sido a primeira calculadora inventada pelo homem, suas mãos sempre foram calculadoras naturais da qual poderia ele dispor no momento que bem entendesse. Assim, buscando novamente o exemplo do pastor de ovelhas, vemo-lo agora fazendo corresponder a cada ovelha um dedo de sua mão, recomeçando a correspondência cada vez que não lhe sobrarem mais dedos nestas. Assim, tornou-se natural para os homens agrupar de dez em dez, tornando-se assim a base dez a preferida da maioria dos povos do passado e a que passou a ser adotada universalmente até os dias de hoje.

Entretanto, é preciso reconhecer que a escolha da base dez foi favorecida pelo fato de que esta base se adequa às necessidades da memória humana.

> A base decimal com certeza apresenta uma vantagem muito nítida sobre bases tão extensas quanto a *sessentena*, a *trintena* ou a *vintena*. Corresponde, com efeito, a uma ordem de grandeza satisfatória para a memória humana, já que *os nomes de número ou os símbolos de base que exige são relativamente pouco numerosos e uma tabela de adição, bem como uma tabela de multiplicação, pode sem dificuldade ser aprendida de cor* (IFRAH 1997, p.78).

Contudo, se esta foi uma condição necessária à adoção da base dez, não é certamente suficiente para justificar sua utilização por tantos povos, já que outras bases como sete, oito, nove, onze, doze ou mesmo treze também são satisfatórias para a memória humana.

Portanto, a principal razão para a adoção da base dez é anatômica e não fruto de alguma vantagem intrínseca ao valor dez, como se poderia pensar, a priori.

> Na verdade, tendo a humanidade aprendido a contar com seus dez dedos, essa preferência quase geral pelos agrupamentos de dez foi comandada por este “acidente da natureza” que é a anatomia de nossas mãos (IFRAH 1997, p.85).

1.4 AS CIVILIZAÇÕES E SEUS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Nesta seção, através de uma abordagem histórica, faremos o estudo de sistemas de numeração que apresentam características diferentes daquelas encontradas no *sistema de numeração posicional decimal*. Isto nos permitirá fazer comparações entre o sistema difundido na atualidade e aqueles que outros povos utilizaram no passado, percebendo as vantagens e desvantagens de cada um deles em relação aos outros.

Filosoficamente, podemos, a partir de tudo que será discutido nesta seção e mais adiante, levantar questionamentos do tipo: Será que a forma como o mundo está organizado atualmente não poderia ser outra? Será que o modo como realizamos as quatro operações aritméticas básicas não poderia ser diferente? Será que o SNPD é o melhor sistema de representação dos números que a humanidade é capaz de produzir?

É preciso deixar claro que nosso objetivo nesta seção é fazer um estudo comparativo das principais características de diferentes tipos de sistemas de numeração, portanto não pretendemos tratar aqui do caminho percorrido por cada civilização no desenvolvimento da representação dos números[2]. Devemos, antes, ter clareza de que cada um dos povos dos quais trataremos nesta seção, em diferentes momentos trabalhavam não só com algarismos que diferiam quanto ao estilo, como também com sistemas de numeração que se diferenciavam pela sua estruturação e lógica de funcionamento. Assim, a estratégia por nós adotada ao longo desta seção é a de estudar as características dos sistemas de numeração adotados por diferentes povos em um determinado momento da história de cada um deles, estabelecendo suas semelhanças e diferenças em relação ao SNPD.

Neste trabalho, classificamos os sistemas de numeração em três tipos principais: sistemas de numeração do tipo aditivo, do tipo híbrido e posicionais[3], porém optamos por subdividir esta seção em apenas duas partes, a primeira tratando dos sistemas de numeração que não são posicionais e a segunda dos que são. Insistimos

---

[2] Para aqueles que desejarem fazer um estudo desse interessante desenvolvimento recomendamos o excelente livro "OS NÚMEROS: a história de uma grande invenção", de Georges Ifrah.

[3] Para uma classificação mais completa dos sistemas de numeração, recomendamos que o leitor consulte a obra "História Universal dos Algarismos: A Inteligência dos Homens Contada pelos Números e pelo Cálculo", também de Georges Ifrah, que apresenta, no tomo 1, páginas de 692 a 703, uma classificação completa dos sistemas de numeração a partir de suas características.

no fato de que os sistemas de numeração utilizados pelos povos não se mantiveram sempre com as mesmas características ao longo do tempo. Assim, por exemplo, se dizemos “o sistema de numeração chinês” e o classificamos como do tipo híbrido, é preciso ter em mente o fato de que se trata aqui de apenas um dos sistemas de numeração desenvolvidos pela civilização chinesa (eles também desenvolveram um sistema de numeração posicional), que carrega consigo características que nos levam a classificá-lo desse modo. Assim também, os egípcios não se mantiveram sempre com um sistema de numeração do tipo aditivo, nem os povos que habitaram a região da Mesopotâmia conceberam, de imediato, um sistema com características posicionais.

1.4.1 Sistemas de Numeração Não Posicionais

Quando explicamos o conceito de base de um sistema de numeração na seção 1.3, criamos um sistema de numeração do tipo aditivo. Os sistemas de numeração deste tipo caracterizam-se pelo fato de que os numerais nele expressos representam o número obtido a partir da *adição* dos valores atribuídos a cada um de seus algarismos, daí o nome aditivo atribuído aos sistemas de numeração deste tipo.

Daremos como exemplos de tais sistemas de numeração o sistema hieroglífico egípcio, o sistema de numeração romano e o grego alfabético.

O sistema de numeração hieroglífico egípcio era decimal, pois eram atribuídos símbolos especiais apenas para as potências de dez, de um até um milhão. Estes algarismos estão ilustrados a seguir acompanhados de seus valores correspondentes.

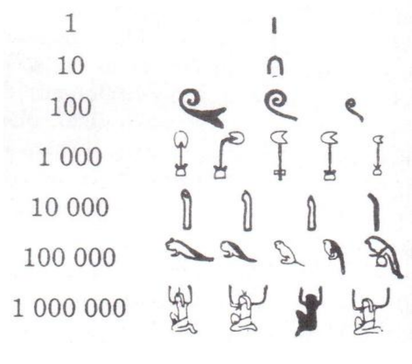


Ilustração 1
Algarismos hieroglíficos egípcios.
IFRAH, Georges. **Os números: a história de uma grande invenção**. 11. ed. São Paulo: Globo, 2005. p 158.

Os demais números eram escritos através de agrupamentos desses algarismos. A título de exemplo, escrevemos abaixo o número 4.507, tal como seria representado nesse sistema de numeração.

Como se pode perceber, uma das desvantagens deste tipo de sistema de numeração é a necessidade de repetir várias vezes um mesmo algarismo. O número 999, por exemplo, que é representado no SNPD por apenas três algarismos, no sistema de numeração hieroglífico egípcio seria representado da seguinte forma.

Um sistema de numeração do tipo aditivo que é bastante conhecido é o sistema de numeração romano. Este sistema, assim como o anterior, é também decimal, porém possui uma base auxiliar de valor igual a cinco, minimizando o problema da repetição de símbolos e tornando os numerais nele representados menos extensos que no sistema hieroglífico egípcio.

Neste sistema de numeração, os números são representados por letras do próprio alfabeto latino, a saber, por I, V, X, L, C, D e M, as quais valem 1, 5, 10, 50, 100, 500 e 1000, respectivamente. Assim, ao invés de representarmos o número 756 como CCCCCCCXXXXXIIIIII, podemos representá-lo de maneira menos extensa como DCCLVI.

É curioso o fato de que há fortes evidências de que os algarismos romanos não têm uma origem alfabética, embora sejam representados por letras do alfabeto latino. Os símbolos que representam esses algarismos têm sua origem provável na técnica do entalhe, adquirindo muitos deles alguma similaridade com as letras deste alfabeto até serem todos eles efetivamente substituídos por estas[4].

Ao lado do princípio aditivo, os romanos também utilizavam o princípio subtrativo[5], segundo o qual dois algarismos colocados em ordem crescente de valor (lendo da esquerda para a direita) devem ser encarados como um único símbolo

[4] Para aqueles que desejarem conhecer os argumentos que sustentam esta hipótese, recomendamos a leitura do Capítulo 6 do já citado livro "OS NÚMEROS: a história de uma grande invenção" de Georges Ifrah.

[5] "O princípio subtrativo (...) raramente era utilizado nos tempos antigos e medievais. Seu uso pleno só começou nos tempos modernos." (EVES, 2004, p. 33).

representando a diferença do maior pelo menor. Assim, na Roma antiga era possível encontrar, por exemplo, representações do tipo M**LXXXX**VIII ao lado de M**XC**VIII (1000 + **(100 – 10)** + 5 + 1 + 1 + 1) para representar o número 1098.

Os gregos, por sua vez, desenvolveram um sistema de numeração, também do tipo aditivo, no qual os números poderiam ser escritos de forma bastante abreviada. Esse sistema de numeração utilizava as 24 letras de seu alfabeto e os três símbolos obsoletos ϛ, ϙ e ϡ, atribuindo a cada um deles os valores mostrados a seguir.

α (alfa)	1	ι (iota)	10	ρ (rô)	100
β (beta)	2	κ (capa)	20	σ (sigma)	200
γ (gama)	3	λ (lambda)	30	τ (tau)	300
δ (delta)	4	μ (mi)	40	υ (ipsilon)	400
ε (épsilon)	5	ν (ni)	50	ϕ (fi)	500
ϛ **(stigma)**	6	ξ (csi)	60	χ (xi)	600
ζ (zeta)	7	o (ômicron)	70	ψ (psi)	700
η (eta)	8	π (pi)	80	ω (ômega)	800
θ (teta)	9	ϙ **(koppa)**	90	ϡ **(sampi)**	900

Este sistema é denominado, por razões óbvias, sistema de numeração grego alfabético. Nele, um número como 704 poderia ser representado simplesmente por $\psi\delta$, portanto, de maneira bastante compacta.

Note que o sistema de numeração grego alfabético também é decimal, porém, embora os três exemplos dados de sistemas do tipo aditivo sejam de povos que adotaram a base dez, há exemplos de povos que adotaram outras bases, como os astecas, que desenvolveram um sistema de numeração do tipo aditivo, mas vigesimal, isto é, de base vinte.

Como exemplo de um sistema de numeração do tipo híbrido, apresentamos o sistema tradicional chinês. O termo híbrido, atribuído a este tipo de sistema de numeração, se deve ao fato de que ele reúne os princípios aditivo e multiplicativo. O sistema chinês é também decimal e nele existem algarismos específicos para designar os números de 1 a 9 e as potências de 10 até dez mil.

Nesse sistema os algarismos eram dispostos verticalmente, no sentido de cima para baixo, já que, pela ausência de papel, a escrita era realizada em lâminas de bambu, as quais eram estreitas horizontalmente. O número 5.625, por exemplo, que é igual a 5 x 1.000 + 6 x 100 + 2 x 10 + 5, está representado na Ilustração 2, juntamente com os algarismos deste sistema de numeração.

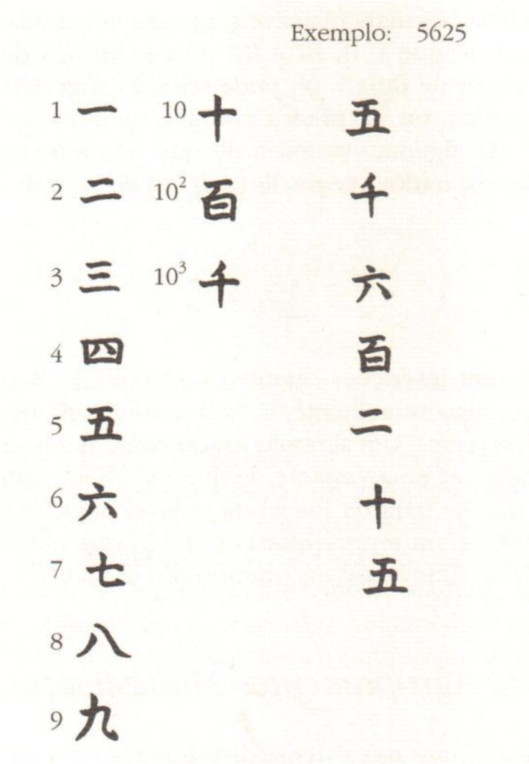


Ilustração 2
Algarismos do sistema tradicional chinês e exemplo
de sua utilização na representação do número 5625.
EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004. p 34.

Para finalizar nosso estudo sobre os sistemas de numeração não posicionais há algumas observações que podem ser feitas e que se aplicam a todos eles. Em primeiro lugar, eles não nos permitem representar números de qualquer ordem de grandeza, de modo que, para que possamos representar números cada vez mais elevados temos sempre a necessidade de criar novos símbolos, e em segundo lugar, o que é mais grave, eles não nos permitem efetuar com facilidade as operações aritméticas. Para se convencer deste último fato basta tentar efetuar a multiplicação de dois números expressos em numerais romanos (tente, por exemplo, multiplicar MCDLXXVI por LVII sem converter estes numerais para o SNPD). Este é, aliás, um dos fatores que explica por que os gregos, a despeito de terem contribuído grandemente para o desenvolvimento da geometria, não foram capazes de avançar da mesma forma no campo da álgebra.

Na subseção 1.4.2 estudaremos sistemas de numeração posicionais e veremos de que maneira o homem foi capaz de superar essas limitações.

1.4.2 Sistemas de Numeração Posicionais

Os sistemas de numeração posicionais representam o último estágio do desenvolvimento dos sistemas de numeração. Eles são caracterizados pelo *princípio de posição*, segundo o qual os algarismos assumem valores relativos à posição que ocupam no numeral, daí o termo *posicional* que designa este tipo de sistema.

Ao longo da história, apenas quatro povos foram capazes de descobrir o princípio de posição: os mesopotâmicos[6], os chineses, os maias e os hindus. Foi deste último povo que nossa civilização herdou tal conhecimento.

Em sistemas posicionais, é possível representar qualquer número, por maior que seja, com uma quantidade finita de símbolos. Além disso, os números representados por meio deles se prestam a realização das quatro operações aritméticas básicas.

Mas **o que permitiu aos sistemas de numeração posicionais superar as limitações encontradas nos sistemas precedentes?**

A resposta para esta pergunta encontra-se no número zero, pois é ele que nos permite diferenciar 25 de 250, 205 ou 2005. Ao demarcar as ordens de unidades vazias, o zero torna possível a plena utilização do princípio de posição sem que corramos o risco de ter representações ambíguas. Dos quatro povos citados apenas os chineses não conceberam o zero, ignorando-o por vários séculos depois de terem descoberto o princípio de posição, passando a utilizá-lo a partir do século VIII de nossa era, por influência indiana. Antes disso, portanto, o sistema de numeração posicional chinês estava sujeito a ambiguidades.

O sistema de numeração posicional chinês, assim como o atual, era decimal, sendo os números de 1 a 9 representados, da esquerda para a direita, pelos algarismos abaixo.

Ilustração 3

Primeiro grupo de algarismos do sistema de numeração posicional chinês.

IFRAH, Georges. ***História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo.*** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1. p 581.

[6] É fato conhecido que diversos povos habitaram a região da Mesopotâmia (sumérios, acádios, assírios, babilônios etc), portanto, optamos aqui pela utilização do termo “mesopotâmico” quando nos referimos ao conjunto dos povos que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento do sistema de numeração posicional sexagesimal que será estudado aqui.

Note que esses algarismos são ideogramas, ou seja, trazem a mente os números que representam. A desvantagem desse tipo de representação dos algarismos reside no surgimento de possíveis ambiguidades. Observe, por exemplo, o numeral abaixo.

O número representado por ele é 3, 12 ou 21?

Esse problema foi superado pelos sábios chineses criando uma segunda sequência de símbolos para os números de 1 a 9, dada a seguir.

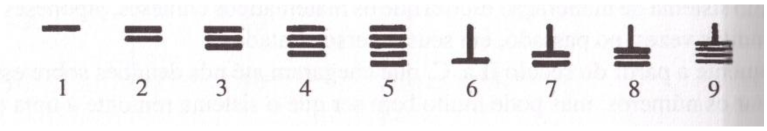


Ilustração 4

Segundo grupo de algarismos do sistema de numeração posicional chinês.

IFRAH, Georges. ***História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo, tomo 1.*** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1. p 582.

Esta sequência era alternada com a primeira, evitando confusões como a antes exemplificada. Assim, o número 12 seria representado como segue.

Vejamos agora como funcionavam os sistemas de numeração maia e mesopotâmicos, os quais, ao contrário do chinês não eram decimais.

O sistema de numeração maia era vigesimal e seus algarismos, assim como os do sistema posicional chinês, traziam à mente os números por eles representados. Na verdade, o sistema de numeração maia era um sistema quinário (base cinco) do tipo aditivo na representação dos números de 1 a 19, passando a ser vigesimal e posicional a partir daí. Como se pode notar na Ilustração 5, os algarismos maias eram constituídos basicamente por dois símbolos: o ponto para representar a unidade e o traço com valor igual a cinco. Havia diversas variações na representação do zero, a maioria delas similares a caramujos, como se pode ver na Ilustração 6.

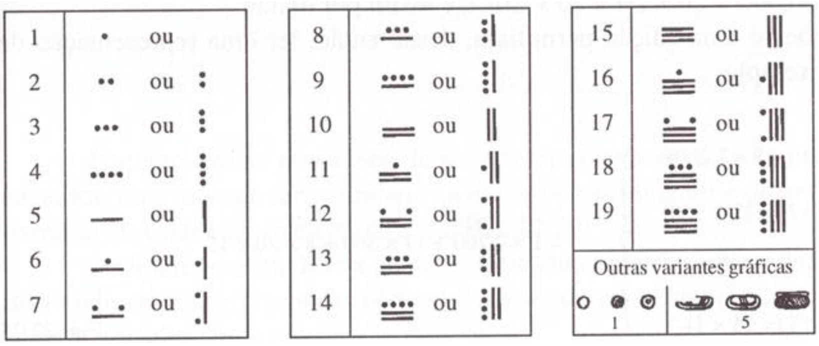


Ilustração 5

Algarismos da civilização maia.

IFRAH, Georges. ***História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo.*** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1. p 639.

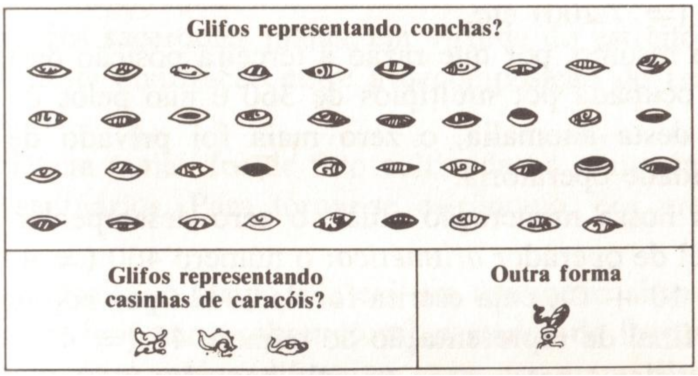


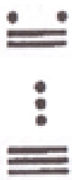
Ilustração 6

Diferentes formas sob as quais os maias representavam o glifo "zero".

IFRAH, Georges. **Os números: a história de uma grande invenção**. 11. ed. São Paulo: Globo, 2005. p 253.

Assim como no sistema posicional chinês, ambiguidades poderiam ocorrer em virtude dos algarismos maias serem também ideogramas, mas curiosamente, embora nunca tenham tido contato com os chineses, os maias encontraram a mesma solução que este povo para esse problema, alternando os traços entre posições horizontais e verticais.

Para sermos honestos, é preciso confessar que o sistema de numeração maia não era completamente vigesimal, na verdade, ele possuía uma anomalia nas unidades de terceira ordem. Em um sistema posicional puramente vigesimal, o numeral



corresponderia ao número 4.875 = 12 x **20²** + 3 x 20 + 15, porém, para os maias, esse numeral representava o número 4.395 = 12 x **20 x 18** + 3 x 20 + 15. Acontece que os maias realizaram grandes avanços no campo da astronomia e 20 x 18 = 360, que era aproximadamente o número de dias do ano maia[7]. Assim, o sistema de numeração maia se adaptava ao sistema de contagem do tempo desenvolvido por esta civilização. Porém, o preço a ser pago por isso foi bastante caro, pois o sistema de numeração maia deixava de ter as propriedades que permitiriam a esse povo efetuar, com simplicidade, os cálculos aritméticos. Assim, embora tenham verdadeiramente inventado um símbolo para o vazio, portanto um zero, os maias não foram capazes de transformá-lo em um operador aritmético e não chegaram a concebê-lo enquanto número.

Deixemos agora a incrível civilização maia para falarmos do sistema de numeração desenvolvido pelos não menos excepcionais povos que habitaram a cobiçada região da Mesopotâmia.

Tais povos desenvolveram um sistema de numeração posicional sexagesimal (base sessenta). O porquê de esses povos terem adotado uma base de valor tão elevado talvez nunca seja completamente esclarecido, mas há diversas hipóteses que tentam justificar essa escolha. Uma delas diz respeito ao fato de que 60 é múltiplo dos seis primeiros números inteiros e outra supõe que essa base seria fruto da elaboração científica ocorrida após a conjunção de dois povos, um com sistema de numeração decimal e outro apoiado na base doze e, sendo sessenta o MMC entre 10 e 12, este valor acabou por ser adotado como base.

Contudo, a hipótese que nos parece mais provável é aquela defendida por Georges Ifrah, de que, antes da dominação suméria da Baixa Mesopotâmia, esta região já era habitada e uma das duas culturas, os nativos ou os estrangeiros, adotava a base cinco para seu sistema de numeração, enquanto o sistema de numeração da outra repousava sobre a dúzia. De fato, é possível contar uma dúzia com apenas uma mão, utilizando as doze falanges e o polegar como contador. Esta técnica é ainda hoje

---

[7] "Este sistema tinha o 'dia' como unidade de base e contava com um ano de aproximadamente 360 dias para a facilidade dos cálculos. O tempo decorrido a partir da era maia era avaliado em *kins* (ou 'dias'), em *uinals* (ou 'meses' de 20 dias) e em *tuns* (ou 'anos' de 360 dias); depois em *katuns* (ciclos de 20 'anos'), em *baktuns* (ciclo de 400 'anos'), em *pictuns* (ciclos de 8000 'anos'), e assim por diante, em ciclos vinte vezes maiores a cada vez" (IFRAH, 2005, p. 256). Este era o sistema de contagem longa do tempo efetuado pelos maias. Paralelamente a ele os maias possuíam dois calendários um ritual de 260 dias e outro conhecido como Haab, que possuía 365 dias e era constituído por 18 "meses" de 20 dias e mais cinco dias designados pelo termo Uayeb (que significa "o que não tem nome").

utilizada no Egito, Síria, Iraque, Irã, Afeganistão, Paquistão e em certas regiões da Índia e está ilustrada na figura abaixo.

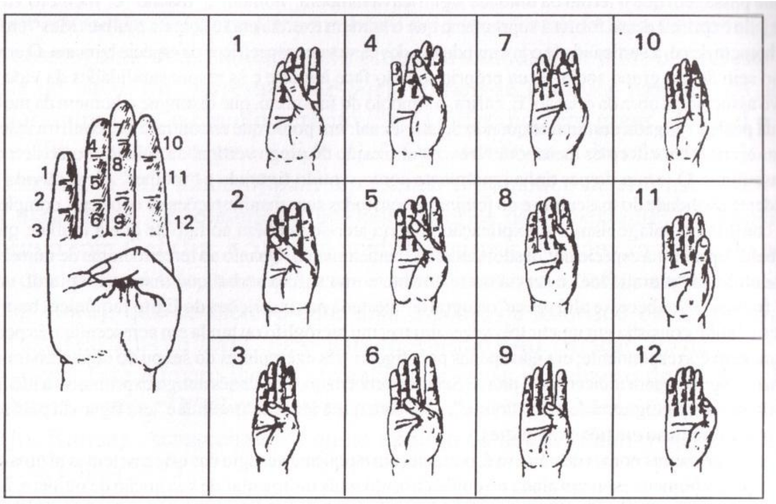


Ilustração 7
Contando uma dúzia com uma única mão.
IFRAH, Georges. ***História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo.*** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1. p 188.

Agora, se para cada dúzia contada utilizando a mão direita levantamos um dedo da mão esquerda, chegamos a 12 x 5 = 60, como é mostrado na Ilustração 8.

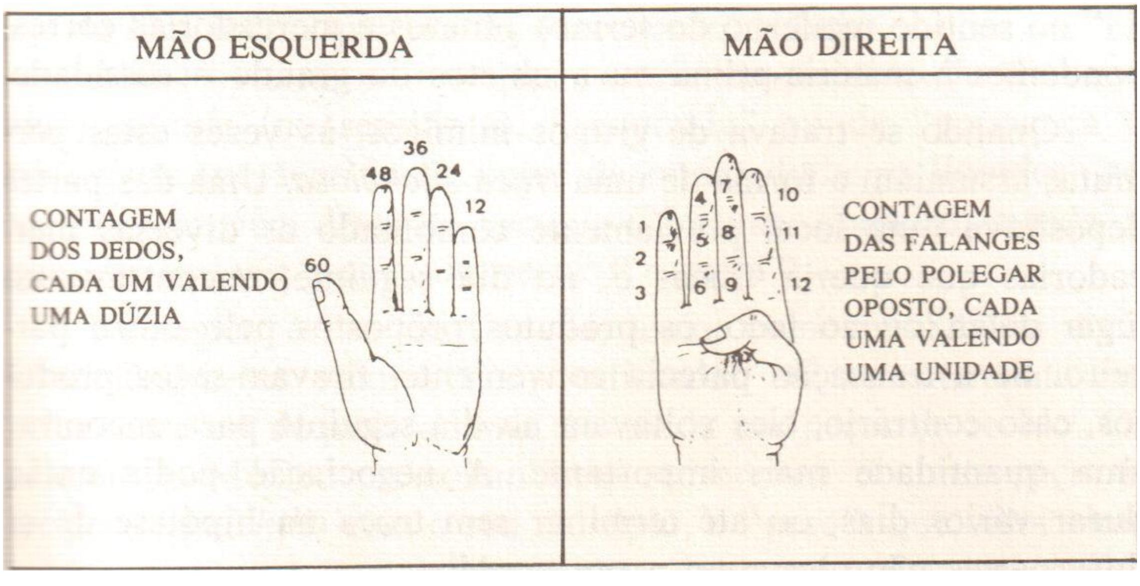


Ilustração 8
Contando até sessenta utilizando as duas mãos.
IFRAH, Georges. **Os números: a história de uma grande invenção**. 11. ed. São Paulo: Globo, 2005. p 71.

A hipótese levantada por Ifrah nos parece mais provável que as outras, visto que dá uma explicação antropomórfica, portanto mais concreta, para a origem da base sexagesimal, assim como a que pode ser utilizada para explicar o uso por diversos povos de certas bases como a quinaria (quantidade de dedos de uma mão), a decimal (quantidade de dedos das duas mãos), a duodecimal (quantidade de falanges nos dedos de uma mão, excluído o polegar) e a vigesimal (quantidade de dedos das mãos e dos pés reunidos). Além disso, há evidências do uso da base cinco na formação dos nomes dos números 6, 7 e 9 na língua suméria.

Um sistema com uma base tão elevada traz consigo a desvantagem de sobrecarregar a memória, pois se torna necessário gravar uma grande quantidade de algarismos. Entretanto os mesopotâmicos souberam muito bem como contornar esse problema. A saída encontrada por eles foi, assim como o fizeram os chineses e maias, representar os números de 1 a 59 através de um sistema de numeração do tipo aditivo, nesse caso decimal. Assim, os únicos algarismos desse sistema de numeração eram os símbolos , representando a unidade, e , representando a dezena, os quais eram feitos por meio de marcas em tabletes de argila. A Ilustração 9 mostra como ficava a representação de alguns dos números de 1 a 59 no sistema mesopotâmico.

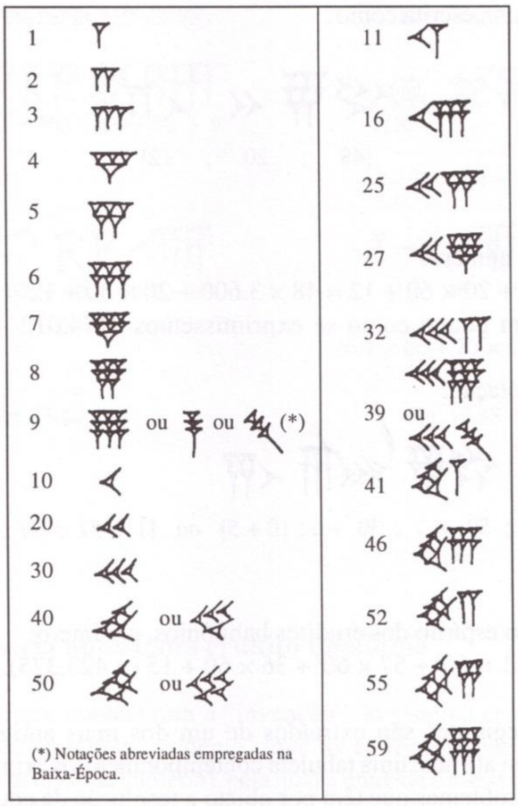


Ilustração 9

Representação de alguns números menores que sessenta no sistema mesopotâmico.

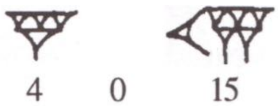
IFRAH, Georges. ***História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo.*** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1. p 297.

A partir de sessenta, o sistema de numeração mesopotâmico passa a ser posicional, e números como 5.569 = $1 \times 60^2 + 32 \times 60 + 49 = (1; 32; 49)_{60}$, são representados como segue.

Esse sistema padece do mesmo problema dos anteriores devido à forma como são constituídos seus algarismos. Assim, diferenciar nele números como 2 e 61 nem sempre era fácil. Às vezes isto era feito aumentando a distância entre os algarismos como mostrado abaixo.

Todavia, essa distinção nem sempre ficava clara para o leitor. Além disso, por muito tempo os mesopotâmicos usaram o princípio de posição sem terem ainda inventado o zero, o que, como já sabemos, causa uma série de confusões.

Uma das primeiras formas encontradas pelos mesopotâmicos para tentar contornar o problema do aparecimento de ordens de unidades vazias, como ocorre em números como 14.415 = $(4; 0; 15)_{60}$ foi deixar um espaço vazio para demarcar a ausência de unidades de uma determinada ordem, como exemplificamos abaixo.



Mas, como se pode constatar facilmente através do exemplo acima, essa solução está longe de resolver o problema das ambiguidades, pois ao invés de interpretar o numeral acima como 14.415, alguém poderia simplesmente entender que se tratavam dos números 4 e 15. Além disso, como representar, através deste método, os números 864.015 = $(4; 0; 0; 15)_{60}$ ou 15.300 = $(4; 15; 0)_{60}$.

Esse problema só foi superado por volta do século III a.C., com a introdução de símbolos, como os mostrados adiante, para representar as ordens de unidades vazias. Estava criado assim o primeiro zero da história.

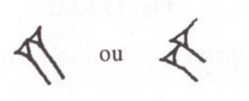


Ilustração 10

Representações do número zero utilizadas pelos sábios mesopotâmicos.

IFRAH, Georges. ***História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo.*** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1. p 297.

Tais símbolos passaram a ser usados em posição média nos numerais escritos nesse sistema de numeração, sendo que apenas os astrônomos registravam seu uso no final dos numerais.

Embora os mesopotâmicos tenham de fato criado um zero operacional, nunca chegaram a enxergá-lo como um número representando o vazio.

Traços desse sistema de numeração se conservam até hoje na contagem do tempo ou na medição de ângulos.

1.5 ORIGEM DOS ALGARISMOS INDO-ARÁBICOS

Na seção anterior, comentamos que apenas quatro povos conseguiram conceber o princípio de posição: mesopotâmicos, maias, chineses e hindus. Dissemos ainda que o SNPD utilizado hoje é herdeiro deste último sistema de numeração. Assim, o sistema de numeração atual em nada difere do hindu, exceto pela forma dos algarismos.

Os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, que nos parecem hoje tão familiares, tiveram sua origem na Índia e chegaram à Europa por meio dos árabes. Depois de difundidos nesse continente, os europeus acabaram por espalhar seu uso pelo restante do mundo. Obviamente a forma desses algarismos sofreu profundas alterações ao longo do tempo, de modo que os algarismos originais pouca lembrança nos trazem daqueles que utilizamos hoje. Esses algarismos, contudo, só tiveram sua forma estabilizada com o advento da imprensa. A Ilustração 11 nos dá uma ideia da evolução dos algarismos indo-arábicos.

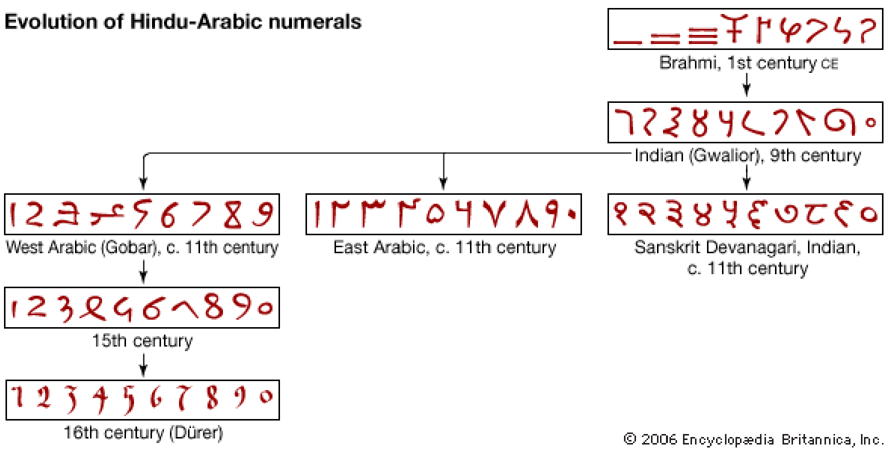


Ilustração 11

Imagem retirada do site da Enciclopédia Britânica
representando a evolução dos algarismos indo-arábicos.
Disponível em: <http://www.britannica.com/EBchecked/media/85041/Evolution-of-Hindu-Arabic-numerals>.
Acesso em: 07 fev. 2013.

Contudo, esta é uma forma bem resumida de contar essa história que, na verdade, durou vários séculos. Vamos, então, conhecer mais alguns detalhes dessa história.

> Os mais antigos exemplos de nossos atuais símbolos numéricos encontram-se em algumas colunas de pedra erigidas na Índia por volta do ano 250 a.C. pelo rei Açoka. Outros exemplos primitivos na Índia, se corretamente interpretados, encontram-se em registros talhados por volta do ano 100 a.C. nas paredes de uma caverna numa colina perto de Poona e em algumas inscrições de por volta do ano 200 d.C., gravadas nas cavernas de Nasik (EVES, 2004, p. 40).

Ao estabelecerem contato com os hindus, os árabes logo perceberam as vantagens desse novo sistema de numeração e passaram a adotá-lo a partir do final do século VIII.

Não se sabe exatamente quando, nem como os algarismos indo-arábicos chegaram à Europa. Provavelmente mercadores e viajantes do mar Mediterrâneo adquiriram esse conhecimento através das relações comerciais que estabeleciam com os árabes. Também as Cruzadas e a invasão dos mouros na Espanha devem ter contribuído para a introdução dos novos algarismos na Europa. Sabe-se, contudo, que, ao contrário dos árabes, os europeus mostraram-se bem mais resistentes à adoção do novo sistema[8].

Dois parecem ser os principais fatores que ocasionaram essa resistência por parte dos europeus. O primeiro deles, de cunho religioso, pois encontramo-nos no final da Idade Média, e os árabes muçulmanos são vistos como infiéis, e o islamismo como obra do demônio, assim, qualquer conhecimento adquirido por meio deles ganhava uma conotação diabólica. O outro, de cunho socioeconômico, pois, na Europa desta época, os cálculos eram ainda realizados utilizando o inadequado sistema de numeração romano com o auxílio do ábaco[9]. Assim, formou-se um pequeno grupo de calculadores, que sobreviviam fazendo contas para o restante da

---

[8] "Quando se viram diante da numeração e dos métodos de cálculo vindos da Índia, os árabes tiveram suficiente presença de espírito para apreciar suas vantagens, reconhecer sua superioridade e adotá-los. Ao contrário, os cristãos da Europa ficaram tão agarrados a seus sistemas arcaicos e foram tão reticentes diante da novidade que foi preciso esperar durante séculos até que o triunfo do 'algoritmo', como era então denominado o cálculo escrito, fosse finalmente total e definitivo" (IFRAH, 2005, pp. 303-304).

[9] "Conta-se que um rico mercador da Idade Média, suficientemente rico para dar uma instrução comercial a seu filho, foi um dia consultar um eminente especialista para saber a qual instituição confiar o jovem. A resposta do profissional parecerá certamente espantosa ao homem médio do século XX: 'Se você se contenta em fazê-lo aprender a prática das adições e subtrações, qualquer universidade alemã ou francesa resolverá o problema; mas, se você faz questão de que a instrução de seu filho chegue à multiplicação ou à divisão (se ele for capaz de aprender isto!), então será preciso mandá-lo para as escolas italianas" (IFRAH, 2005, p. 304).

população, ou que tiravam vantagem daqueles que eram leigos neste assunto e que, portanto, não tinham interesse na difusão deste conhecimento através de um sistema que permitisse ao homem comum ter acesso a um método prático e fácil para a realização dos cálculos.

Assim, na Europa, travou-se uma batalha entre abacistas, aqueles que defendiam o cálculo com o ábaco através do obsoleto sistema de numeração romano, e algoristas, aqueles que defendiam o algoritmo[10], como ficou conhecido, na Europa da época, o novo sistema de cálculo escrito. O termo “algoritmo” e o próprio termo “algarismo” são corruptelas do nome do matemático árabe al-Khowarizmi (aproximadamente 780-850), o qual escreveu importante obra na qual explicava o funcionamento do novo sistema de numeração.

No início do século XIII, surge outro matemático que contribuiu grandemente para a difusão do sistema de numeração hindu. Desta vez, tratava-se de um europeu, o ilustre matemático renascentista Leonardo de Pisa (c. 1175-1250), mais conhecido como Fibonacci, o qual, assim como al-Khowarizmi, escreveu uma obra chamada *Liber abaci*, na qual explicava as regras de cálculo com os algarismos indo-arábicos.

Isto resume a história desses algarismos, mas o que têm eles que os torna melhores que os algarismos adotados por outras civilizações do passado?

Acontece que os algarismos indo-arábicos estão longe de fornecer a mais vaga ideia dos números que representam. Tivéssemos nós aprendido desde a mais tenra infância que o símbolo 5 representa o número seis e que o símbolo 6 representa o número cinco e isso em nada afetaria o funcionamento do SNPD. Diferentemente dos sistemas precedentes, a forma desses algarismos não permite o aparecimento de ambiguidades como as que ocorriam nos sistemas chinês, maia e mesopotâmico e que foram bem exemplificadas na seção anterior.

Assim foi escrita uma história de milênios que culminou com o aparecimento do atual SNPD, o qual se impôs em todas as partes do mundo contemporâneo, tanto por suas incríveis potencialidades na representação dos números quanto na realização dos cálculos.

[10] Hoje o termo algoritmo é utilizado em uma acepção mais ampla como o conjunto de passos ou instruções para se resolver um problema.

1.6 SUGESTÕES DE ATIVIDADES

A História da Matemática, além de ser naturalmente atrativa e curiosa, é um vasto campo de pesquisa que pode ser utilizado pelo professor para estimular o interesse dos alunos.

Pesquisando fatos históricos o aluno se depara com a necessidade de aprimorar seus conhecimentos em assuntos próprios da área do conhecimento a que esses fatos se referem, neste caso, à Matemática.

Quando vistos a partir de uma perspectiva histórica, até mesmo os conteúdos mais áridos parecem ganhar vida, passando a ganhar significado para o aluno.

Aqui o professor tem muitas possibilidades para conduzir o aluno até o mundo da pesquisa, desenvolvendo nele a autonomia, estimulando sua curiosidade e independência na busca do conhecimento.

Pode-se solicitar que pesquise a história de grandes matemáticos do passado que se envolveram com a difusão do sistema de numeração indo-arábico, como Fibonacci ou al-Khowarizmi, ou ainda, em uma atitude interdisciplinar, pedir que pesquise um pouco da história e da cultura das grandes civilizações do passado, buscando conhecer melhor que tipo de conhecimento matemático foi produzido por tais povos.

O professor desejoso de uma pesquisa mais voltada para o conhecimento matemático trabalhado neste capítulo poderia pedir ao aluno que pesquisasse um pouco mais sobre a classificação dos sistemas de numeração, indicando evidentemente as fontes nas quais o aluno poderia se debruçar na pesquisa de tal assunto.

Outra pesquisa interessante, relacionada ao conceito de base de um sistema de numeração, consiste em propor que os alunos pesquisem quais foram as bases mais utilizadas ao longo da história, quais povos as utilizaram e qual a razão de terem sido tomadas ao invés de outras.

Desenvolver nos alunos o espírito pesquisador é algo salutar para o próprio aluno e para a sociedade como um todo, e ensiná-los a filtrar as informações numa era em que o acesso a elas é gigantesco é extremamente importante e é um dos papéis do professor que não deve ser, de forma nenhuma, olvidado.

CAPÍTULO 2

SISTEMAS POSICIONAIS

Neste capítulo, trataremos de algumas das principais aplicações dos sistemas de numeração. Mostraremos também quais procedimentos devemos adotar para mudar a base utilizada na representação de um número quando este está expresso em um sistema de numeração posicional. Para as mudanças do SNPD para sistemas posicionais não decimais serão abordados dois métodos diferentes: o diagrama de pontos e as divisões sucessivas. Fazemos, ao final do capítulo algumas considerações a respeito da extensão dos numerais.

2.1 APLICAÇÕES

Quando falamos em sistemas de numeração não decimais, um dos primeiros sistemas de numeração que nos vem à mente é, sem sombra de dúvida, o sistema de numeração binário. Pelo menos duas razões contribuem para isso: o fato de ser a base dois, que constitui esse sistema, a menor base com a qual é possível construir um sistema de numeração e as aplicações desse sistema de numeração à informática, que é uma área do conhecimento que revolucionou o estilo de vida do homem moderno.

O primeiro a estudar o sistema binário de maneira mais profunda foi o matemático e filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), que nasceu em Leipzig, atual Alemanha. Leibniz é também muito conhecido pelo clima de disputa que se criou entre ele e Isaac Newton (1642-1727), pela primazia da invenção do cálculo diferencial e integral, cujas bases foram, na verdade, descobertas por ambos quase que simultaneamente e de maneira independente.

Uma informação pode ser representada tanto de maneira analógica quanto digital. Contudo, uma informação representada analogicamente está mais sujeita a interferências. Os computadores trabalham com dados digitais, o que, além de minimizar as possibilidades de erros, torna-os mais velozes no processamento desses dados. Assim, um circuito utiliza apenas dois níveis de tensão bem definidos um BAIXO e outro ALTO. Entra em cena, então, uma característica importante do sistema de numeração binário, que é o fato de que qualquer número é nele representado como uma sequência de apenas dois algarismos, 0 e 1, os quais podem ser associados aos dois níveis de tensão antes mencionados.

A computação e a eletrônica digital só são possíveis graças ao sistema binário e à álgebra booleana[11], a qual permite a realização de operações lógicas e aritméticas utilizando apenas dois estados (sim e não, verdadeiro e falso, ou, neste caso, zero e um).

Um dígito binário recebe o nome de bit (contração de *binary digit*) e oito bits reunidos formam o que chamamos de byte (do inglês *binary term*). Logo, um byte é um numeral binário de oito algarismos. A importância do byte reside no fato de o código ASCII (sigla em inglês para *American Standard Code for Information*

---

[11] O matemático inglês George Boole (1815-1864) acreditava que o caráter essencial da Matemática reside em sua forma e não em seu conteúdo. No livro *Investigations of the Laws of Thougth* (Investigações das Leis do Pensamento), lançou os fundamentos da álgebra cujo nome deriva do seu.

Interchange, que significa Código Padrão Americano para o Intercâmbio de Informação) utilizar um total de sete bits para a representação de caracteres mais um bit para detecção de erros. Este código, desenvolvido na década de 60, e que serve de base para grande parte das codificações de caracteres modernos, consiste de 128 caracteres, dos quais 33 não podem ser impressos, sendo alguns destes ainda utilizados como caracteres de controle e outros já obsoletos. Note que, com 7 bits, é possível codificar em binário exatamente 128 caracteres, pois $2^7 = 128$. No APÊNDICE A encontramos uma tabela contendo os 95 caracteres imprimíveis e seus códigos em decimal e em binário.

Outro sistema de numeração que também ganhou destaque devido às suas aplicações no campo da informática é o sistema de numeração hexadecimal (base 16). Esse sistema parece também ter sido utilizado pelos chineses em seu sistema de pesos e medidas. Evidências desse fato podem ser encontradas no ábaco chinês, o suan pan, o qual adequa-se perfeitamente ao sistema de numeração hexadecimal.

A importância do sistema hexadecimal para a informática deve-se, principalmente, a dois fatores: ele permite representar os números de maneira mais compacta que o sistema binário e um número representado no sistema binário pode ser facilmente convertido para o hexadecimal e vice-versa. Na verdade, utilizando o sistema hexadecimal pode-se representar um byte utilizando-se apenas dois algarismos, conforme está demonstrado no APÊNDICE B. Por exemplo, para especificar um endereço numa memória de 4 GB são necessários 32 bits. É muito mais fácil, portanto, representar esse endereço com apenas 8 algarismos em hexadecimal[12].

Outro sistema que também possui aplicações na área da informática, pelas mesmas razões que o sistema hexadecimal, é o sistema octal (base 8). Contudo, esse sistema é utilizado com menos frequência.

Para finalizar nossa discussão sobre as aplicações dos sistemas de numeração, resta-nos falar sobre nosso atual sistema de contagem do tempo. Estamos tão acostumados com ele que, muitas vezes, não nos damos conta de que ele funciona, na verdade, baseado em um sistema de numeração sexagesimal. Ora, a uma hora correspondem 60 minutos (min) e a um minuto correspondem 60 segundos (s). Temos aí a clara presença da base sessenta. Mas o sistema

[12] Exemplo retirado do livro “Sistemas Digitais: fundamentos e aplicações” de Thomas L. Floyd.

sexagesimal não se limitou à contagem do tempo, está presente ainda hoje na unidade utilizada para medir ângulos conhecida como grau. Nesta situação, temos um grau correspondendo a 60 minutos (´) e um minuto correspondendo a 60 segundos (´´).

Notemos ainda que até as operações aritméticas referentes ao tempo são feitas utilizando-se a base 60. Assim, se tenho uma reunião às 17 h e agora são 15 h 47 min, então sei que, se meu ônibus leva cerca de 45 min para conduzir-me até o meu destino, terei que somar 15 h 47 min + 45 min = 16 h 32 min, e chegarei a tempo. Essa é, evidentemente, uma soma realizada no sistema sexagesimal, ao contrário da soma decimal que nos forneceria o resultado 15 h 92 min, que, embora correto, não nos transmite uma informação clara a respeito do horário.

Assim, podemos afirmar que todos nós, mesmo que de forma bastante rudimentar, temos contato, desde pequenos, com pelo menos um outro sistema de numeração que não é decimal, ou seja, o sistema sexagesimal.

2.2 MUDANÇA DE BASE

Esta seção apresenta os algoritmos necessários para que possamos efetuar a conversão de números expressos no SNPD para outros sistemas de numeração posicionais, bem como o inverso, isto é, a conversão de números expressos em outras bases para o SNPD. A justificativa para os procedimentos que abordaremos será motivada pela utilização do diagrama de pontos, que apresentamos na primeira parte desta seção. A seguir apresentaremos o método das divisões sucessivas e, por fim, métodos para conversão de números expressos no sistema binário para os sistemas hexadecimal e octal e vice-versa.

2.2.1 Diagrama de Pontos

Para melhor compreendermos o funcionamento dos sistemas de numeração posicionais vamos pensar na representação dos números, usando o que chamaremos de *diagrama de pontos*.

Observe, por exemplo, a nuvem de pontos dada na Ilustração 12.

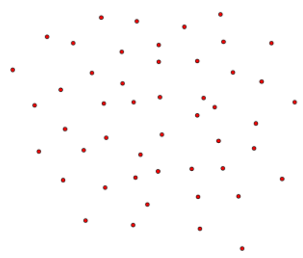


Ilustração 12
Grupo de 49 pontos dispersos.

Como já sabemos, sem efetuar a contagem, não nos é possível descobrir quantos pontos fazem parte da figura acima. Contudo, depois de efetuar corretamente a contagem, podemos afirmar que há 49 pontos nessa figura.

Mas, embora tenhamos representado essa quantidade de pontos por um 4 seguido de um 9, observamos que não há, nesta nuvem de pontos, o menor vestígio das quantidades representadas por esses dois algarismos. Por que então esta quantidade de pontos está sendo representada por um numeral constituído desses algarismos?

A resposta é dada pelo Diagrama 1.

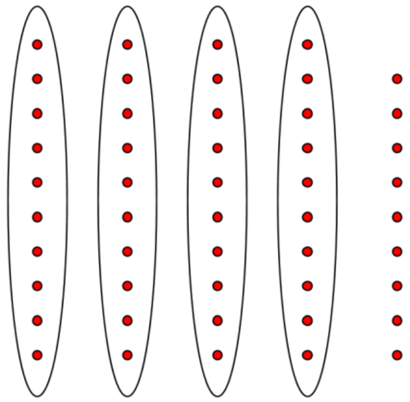


Diagrama 1
Representação de 49 pontos agrupados em dezenas.

Temos aí 49 pontos, não mais dispersos, mas agrupados de dez em dez, facilitando a contagem. Vemos, agora, claramente, o porquê da escolha dos algarismos 4 (quatro dezenas) e 9 (nove unidades).

Mas por que a escolha do número dez para realizar os agrupamentos? Ora, ela é totalmente aleatória, ou seja, nada nos impede de fazermos outra escolha, e é o que faremos.

Observe agora como fica o diagrama de pontos quando realizamos os agrupamentos de 8 em 8.

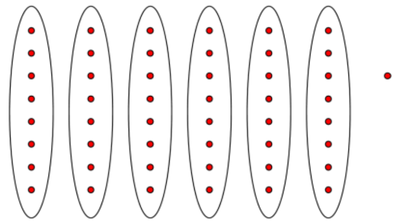


Diagrama 2
Representação de 49 pontos agrupados de 8 em 8.

No Diagrama 2, o numeral 49 deixa de ser adequado para representar o modo como os pontos foram agrupados, sendo 61 uma representação mais coerente, pois temos aí 6 octetos e 1 unidade.

O que fizemos, na verdade, foi representar o número 49 em um sistema de numeração octal. Note que o número que escolhemos para realizar os agrupamentos é precisamente a base do sistema de numeração. Assim, para evitar ambiguidades a respeito da base utilizada, deixaremos a mesma subscrita ao numeral, exceto no caso da base 10 ou quando não houver perigo de confusão sobre qual base está sendo utilizada. Assim, o número 49 expresso no sistema de numeração posicional octal será indicado por 61_8, ou simplesmente por 61, quando não houver risco de confusão.

Veja, no Diagrama 3, como fica a representação dos pontos da Ilustração 12 na base 9.

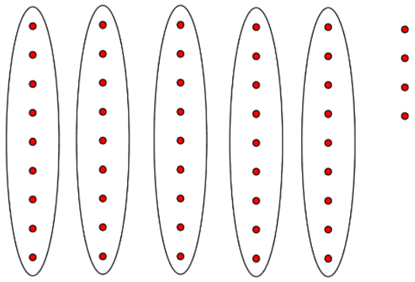


Diagrama 3
Representação de 49 pontos agrupados de 9 em 9.

Agora, o numeral adequado passa a ser 54_9, ou seja, 5 grupos de nove mais 4 unidades. Note que o mais adequado é pronunciar “cinco, quatro” e não “cinquenta e quatro”, pois se trata da quantidade 49 expressa na base nove e não do número 54 expresso na base dez. O termo cinquenta é adequado apenas para o sistema decimal, pois nos remete a cinco dezenas, ou seja, a cinco grupos de dez, que não é o que temos nesse caso.

Continuemos ainda observando representações do número 49 em outras bases através do diagrama de pontos. Para tanto, vejamos a Ilustração 13.

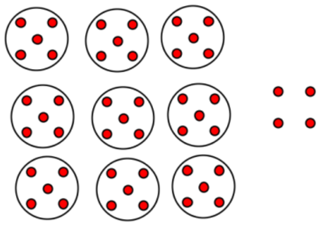


Ilustração 13
Representação de 49 pontos agrupados de 5 em 5.

Nela, os 49 pontos foram agrupados em 9 quintetos, restando ainda 4 pontos. Alguém que ainda não tenha compreendido muito bem como funcionam os sistemas de numeração posicionais seria tentado a acreditar que $49 = 94_5$, e é o que frequentemente fazem os alunos quando explicamos para eles que podem formar numerais utilizando outras bases que não a decimal e fornecemos apenas exemplos como os dos Diagramas 1, 2 e 3. Este raciocínio é, aliás, muito natural, uma vez que não foi feita qualquer menção a duas regras que impedem representações desse tipo. Essas regras são:

R1. Em um sistema de numeração posicional, todos os algarismos valem menos do que a base.

R2. Na montagem de um diagrama de pontos que representa um número em um sistema de numeração posicional de base *b*, a quantidade de vezes que um tipo de grupo aparece isolado deve ser sempre inferior a *b* e, caso haja algum grupo aparecendo *b* vezes ou mais, *b* desses grupos devem ser reunidos em um novo tipo de grupo.

Quando R2 é obedecida, a Ilustração 13 ganha o aspecto do Diagrama 4.

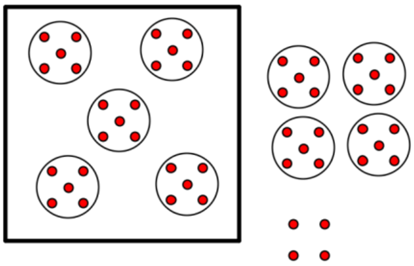
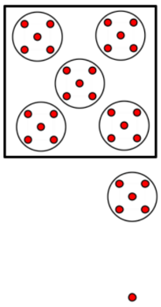


Diagrama 4
Representação de 49 pontos agrupados e reagrupados de 5 em 5.

Temos, no Diagrama 4, além dos pontos isolados, dois tipos de grupo, os circulares e os quadrados. Note que todos eles representam potências de 5, conforme indicado abaixo.



$5^2 = 25$ **pontos**

$5^1 = 5$ **pontos**

$5^0 = 1$ **ponto**

Ilustração 14
Grupos formados quando agrupamos pontos de 5 em 5 até as unidades de terceira ordem.

No numeral formado a partir do Diagrama 4, cada algarismo deve indicar a quantidade de vezes que cada um desses grupos aparece isoladamente (isto é, fora de outros grupos) na ordem decrescente do valor dos grupos da esquerda para a direita. Assim, o numeral quinário (base 5) que o Diagrama 4 representa é 144_5, já que há 1 quadrado, 4 círculos isolados e 4 pontos isolados. Note que, obedecendo R2 na construção do diagrama, R1 é automaticamente satisfeita na representação do numeral, ou seja, não há nele algarismos maiores do que ou iguais a 5.

Assim, $144_5 = 1 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 25 + 20 + 4 = 49$. Perceba que isto é exatamente o que acontece com os números representados no SNPD. O número 5.739, por exemplo, é constituído por 5 milhares ($1000 = 10^3$), 7 centenas ($100 = 10^2$), 3 dezenas ($10 = 10^1$) e 9 unidades ($1 = 10^0$), ou seja, $5.739 = 5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 9 \times 10^0$.

É assim, aliás, que convertemos um número expresso em outras bases para o SNPD. Damos aqui mais um exemplo convertendo o número 1321_4 para o SNPD.

Como o número em questão está expresso na base 4, cada algarismo será multiplicado pela potência de 4 conveniente e a seguir os resultados serão somados, isto é,

$$1321_4 = 1 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 2 \times 4^1 + 1 \times 4^0$$

$$1321_4 = 1 \times 64 + 3 \times 16 + 2 \times 4 + 1 \times 1$$

$$1321_4 = 64 + 48 + 8 + 1$$

$$1321_4 = 121.$$

Logo 1321_4 representa o número 121 no sistema quaternário (base 4).

Voltemos ao número 49. Quando representado no sistema ternário, este número passa a ser expresso pelo numeral 1211_3, cuja representação através do diagrama de pontos é dada abaixo:

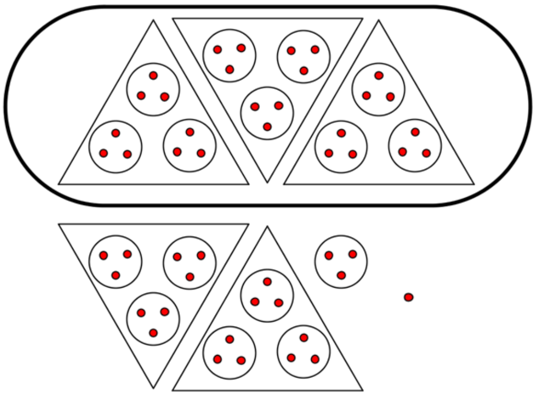


Diagrama 5
Diagrama de pontos representando o número 49 no sistema ternário.

No sistema ternário esse número é expresso por meio de quatro algarismos. O primeiro, da esquerda para a direita, indica a quantidade de *trios de trios de trios*, ou seja, 3^3. No sistema decimal, esse algarismo seria chamado simplesmente de algarismo dos *milhares*, porém, nesse caso, esta terminologia não é adequada por fazer referência direta ao SNPD, assim como *trios de trios de trios* não é uma boa terminologia por razões óbvias. Precisamos, portanto, estabelecer aqui uma nomenclatura adequada para indicar a posição ocupada por determinado algarismo no numeral, já que isto é importante quando se trabalha com sistemas posicionais. Assim, diremos que é *de ordem n* ou *de n-ésima ordem* o algarismo que, da direita para a esquerda, ocupar a n-ésima posição. Logo, no numeral 1211_3, temos 2 unidades de terceira ordem ou 2 unidades de ordem 3. Quanto aos algarismos *de primeira ordem* ou *ordem 1*, poderão ser também denominados simplesmente como *unidades*, já que não há inadequação da linguagem neste caso.

Observar o número 49 expresso na base 4 pode ser ainda bastante instrutivo. Veja o Diagrama 6.

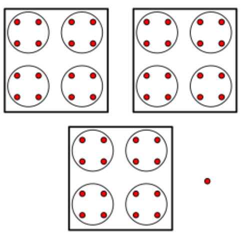


Diagrama 6

Diagrama de pontos representando o número 49 no sistema quaternário.

Após olhar para este diagrama, muitos alunos são tentados a representar o número 49 no sistema quaternário (base 4) através do numeral 31, porém o observador mais atento notará a ausência de círculos fora dos quadrados, ou seja, que não há unidades de segunda ordem, ou melhor ainda, que há 3 unidades de terceira ordem (quadrados), 0 unidade de segunda ordem e 1 unidade de primeira ordem. Assim, o aluno perspicaz perceberá que 49 = 301_4, e não 31_4, como poderia pensar um aluno menos atento.

Nota-se, através desse exemplo, o papel fundamental desempenhado pelo número zero na garantia do bom funcionamento dos sistemas de numeração posicionais. Neste exemplo, o numeral 31_4 corresponde, na verdade, ao número 13, pois $31_4 = 3 \times 4 + 1 = 13$.

Uma base que fornece um aspecto bastante curioso ao número 49 é a base 7, pois, nesse sistema de numeração, 49 = 100_7, ou seja, na base sete, 49 é um número “redondo”, o que derruba completamente o mito de que a base dez poderia ter sido escolhida por gerar numerais melhores, ou seja, redondos. O que faz com que o número 49 ganhe este aspecto arredondado quando escrito na base 7 é o fato de que $49 = 7^2$. Veja o Diagrama 7.

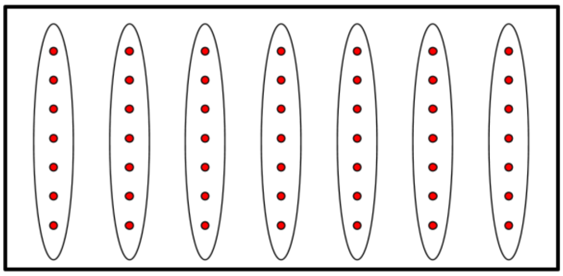


Diagrama 7
Diagrama de pontos representando o número 49
em um sistema de numeração de base 7.

Percebe-se aí a ausência, tanto das unidades de segunda ordem, quanto das de primeira ordem, estando todos os 49 pontos contidos em um único retângulo que representa as unidades de terceira ordem.

É curioso observar, por exemplo, que o número dez não tem o privilégio de ser representado por 10, ou seja, um 1 seguido de um 0. Esta é a representação de qualquer base nela mesma. Em binário, 2 = 10_2, em ternário, 3 = 10_3, em quaternário, 4 = 10_4, em quinário, 5 = 10_5, enfim, na base b, $b = 10_b$.

Este fato que pode, a priori, nos surpreender é, na verdade, evidente, afinal, b na base b, consiste em 1 grupo de b unidades e 0 unidade restante.

Por outro lado, o número dez não possui este aspecto quando representado em outras bases. Assim, $10 = 1010_2 = 101_3 = 22_4 = 13_7$, ou seja, apresenta-se sob formatos bem menos simpáticos.

Por fim, resta-nos ilustrar um último caso, o qual só ocorre quando lidamos com bases maiores que a base 10. No Diagrama 8, os 49 pontos foram agrupados 13 a 13.

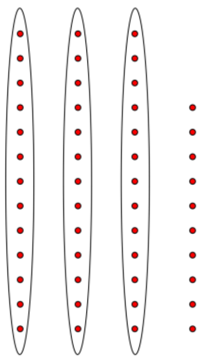


Diagrama 8
Representação de 49 pontos agrupados de 13 em 13.

Nele, observamos claramente que há três unidades de segunda ordem e dez unidades de primeira ordem, contudo, representar 49 como 310_{13} é, certamente, um equívoco, pois tal numeral indica a ausência de unidades, o que é falso, pois, no Diagrama 8, há pontos isolados.

O problema é que o número dez é representado, no SNPD, por dois algarismos. Logo, é preciso deixar claro que esses dois algarismos estão expressando o número 10 e representando unidades de uma mesma ordem ou é preciso criar um novo símbolo para representar o número dez.

Assim, uma forma de representar o número 49 na base 13 seria através do numeral $3(10)_{13}$, no qual os parênteses indicam que o numeral dentro deles está expresso no SNPD e representa as unidades de uma mesma ordem.

Outra forma, que é mais usual, é a utilização das letras do alfabeto, geralmente em caixa alta, associada aos valores maiores ou iguais a 10. Assim, tira-se proveito do fato de que as letras do alfabeto aparecem sempre em uma ordem preestabelecida e faz-se A = 10, B = 11, C = 13, D = 14 e assim por diante. Note que, adotando este procedimento, a quantidade de algarismos utilizada para representar os números em uma base b é precisamente b, pois todo natural (incluindo o zero) menor do que b

precisa ser representado por um único algarismo e, por R1, não deve haver algarismos específicos nem para *b*, nem para números maiores do que *b*. Deste modo, por exemplo, na base 13, os algarismos são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B e C e o número $49 = 3A_{13}$.

Note que, para expressar um numeral como $2D5E_{15}$ no SNPD, devemos efetuar a multiplicação da potência de 15 adequada pelo valor do algarismo (que pode ser uma letra) correspondente. Assim,

$$2D5E_{15} = 2 \times 15^3 + 13 \times 15^2 + 5 \times 15^1 + 14 \times 15^0$$

$$2D5E_{15} = 2 \times 3.375 + 13 \times 225 + 5 \times 15 + 14 \times 1$$

$$2D5E_{15} = 6.750 + 2.925 + 75 + 14$$

$$2D5E_{15} = 9.764.$$

Isto encerra a explicação dos procedimentos para a conversão de números expressos em outras bases para a base 10, embora uma justificativa mais rigorosa deste procedimento venha a ser dada mais adiante pelo TEOREMA 1 do Capítulo 3.

2.2.2 Divisões Sucessivas

Na primeira parte desta seção vimos como converter números de outros sistemas posicionais para o SNPD. Embora o inverso, quer dizer, expressar em outras bases números escritos na base 10, possa ser feito por meio do diagrama de pontos, este método não é o mais conveniente, especialmente quando precisamos representar números elevados em bases pequenas. Veja, por exemplo, no Diagrama 9, a representação do número 436 no sistema ternário.

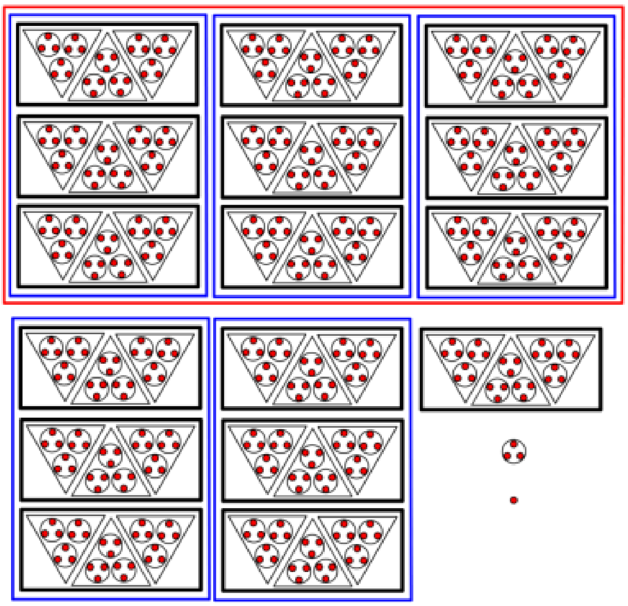
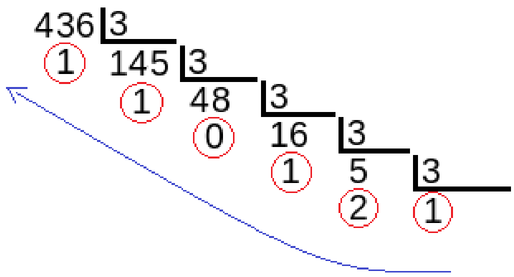


Diagrama 9
Diagrama de pontos representando o número 436 no sistema ternário.

Observando o Diagrama 9 podemos concluir que o numeral nele representado é 121011_3, mas as chances de cometer erros na montagem, ou mesmo na interpretação desse diagrama são elevadas.

Por conta disto, vamos mostrar outro método de conversão da base dez para outras bases. Este método, que será chamado de *método das divisões sucessivas*, é, na verdade, o mais utilizado e consiste em **efetuar a divisão inteira do número dado na base dez pela base *b* do novo sistema de numeração; tomar o quociente da divisão e dividi-lo também por *b*, repetindo este processo até que o quociente obtido torne-se menor do que *b*; feito isto, tomam-se o último quociente e os restos obtidos em cada uma das divisões, escrevendo-os, da esquerda para a direita, na ordem inversa de seu aparecimento ao longo do processo**.

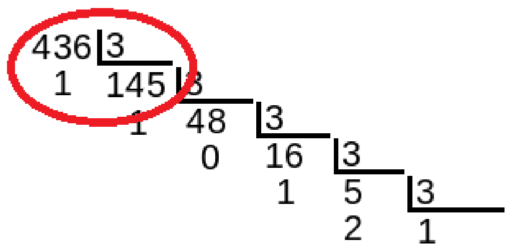
Este processo está ilustrado abaixo por meio da conversão do número 436 para o sistema ternário.



Logo 436 = 121011_3.

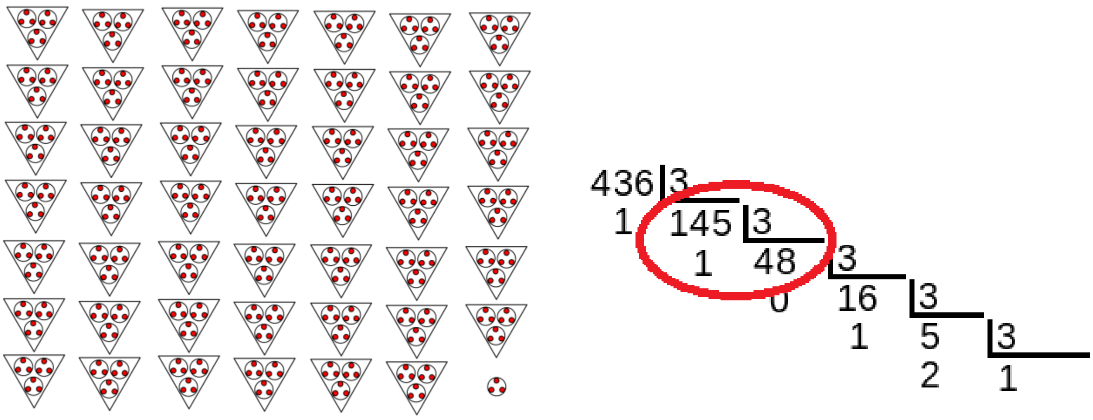
Visto desta maneira é difícil compreender como esta regra prática pode nos fornecer o resultado correto. Faremos, entretanto, as divisões uma por uma, verificando seu significado na construção do numeral a partir do diagrama de pontos. Aliás, este é o grande mérito do diagrama de pontos e razão pela qual foi visto aqui, mostrar a lógica que rege o método das divisões sucessivas.

Observe a primeira divisão.



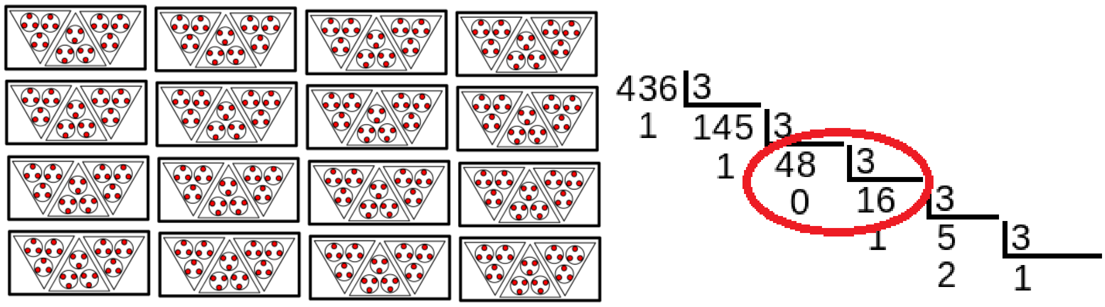
Inicialmente, o que temos são 436 pontos dispersos, os quais serão agrupados em trios, o ato de agrupar em trios corresponde a operação de divisão por 3. Os pontos correspondem ao dividendo da primeira divisão. Como resultado, obtemos 145 ternas, o quociente da primeira divisão. Resta ainda um ponto isolado, que é o resto da primeira divisão e o algarismo das unidades do numeral 121011_3.

Vejamos a segunda divisão.



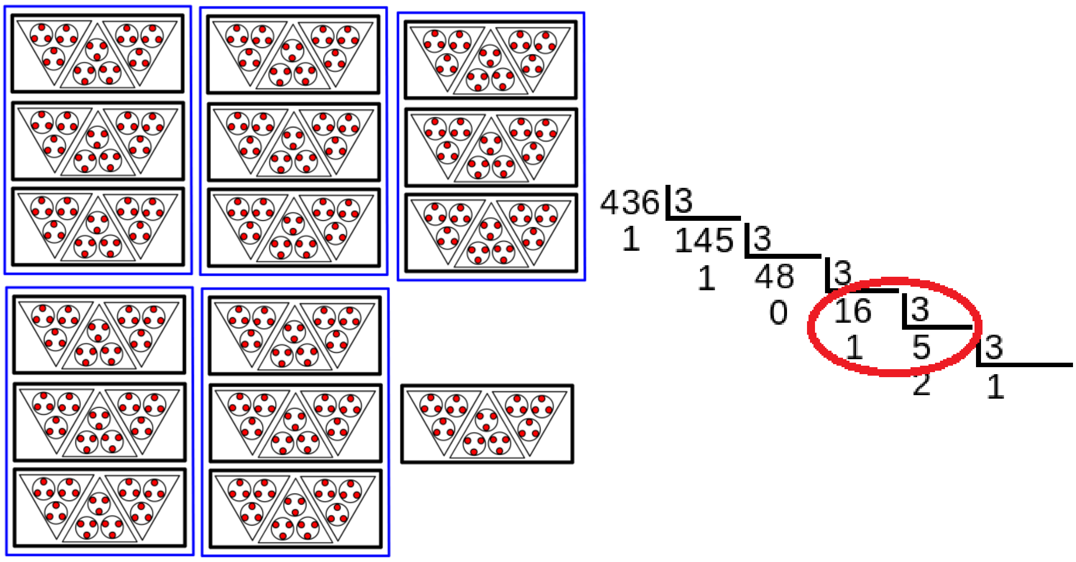
Nela, o ponto isolado é desprezado. Sobram os 145 trios (quociente da 1ª divisão e dividendo da 2ª), os quais serão reagrupados em trios. Surgirão 48 trios de trios (quociente da 2ª divisão). Restará um trio isolado (resto da 2ª divisão e algarismo de segunda ordem do numeral 121011_3).

Eis a terceira divisão.



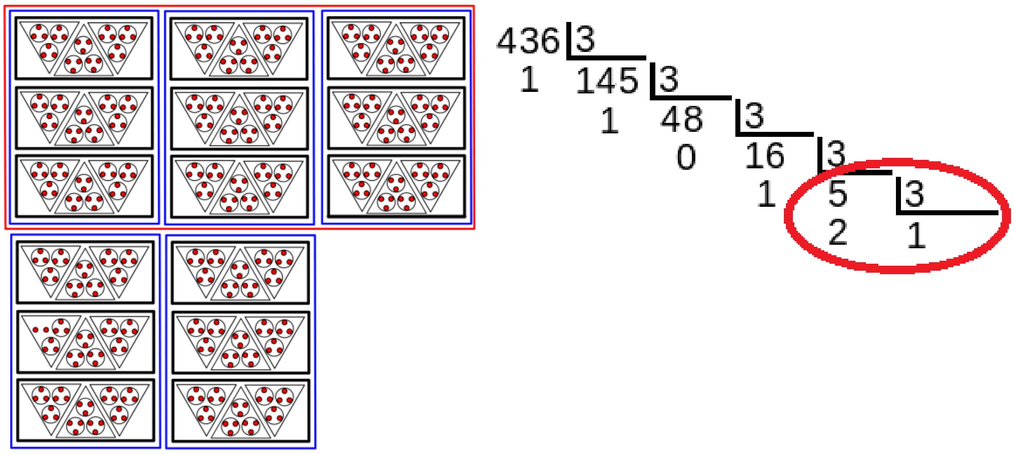
Neste caso, os 48 trios de trios são reagrupados em novos trios, formando 16 grupos (retângulos pretos) sem deixar resto. Assim, obtemos 0 como algarismo de ordem 3 do numeral 121011_3.

A quarta divisão é representada a seguir.



A partir dela obtemos o algarismo de ordem 4 do numeral 121011_3.

Finalmente, a quinta e última divisão é efetuada.



Neste ponto, 3 dos 5 retângulos azuis são agrupados em 1 único retângulo vermelho que representa o quociente da última divisão, finalizando as divisões, já que não há 3 ou mais retângulos vermelhos para formar um novo grupo de 3. Os 2 retângulos azuis restantes correspondem ao algarismo de ordem 5 e o quociente 1 ao algarismo de ordem 6 do numeral 121011_3.

Acima, descrevemos e ilustramos a partir de um exemplo o procedimento para efetuar conversões do SNPD para outras bases. Vejamos agora qual a justificativa para este procedimento.

Um importante resultado da Teoria dos Números é o *algoritmo da divisão*, o qual nos garante que, da divisão inteira de dois números naturais, cujo divisor é diferente de zero, resultam um único quociente e um único resto menor que o divisor, tais que ambos, quociente e resto, devem ser também naturais.[13]

Logo, dividindo n por b, obtemos um único par de números q_0 e $a_0 < b$, tais que $n = q_0 b + a_0$ (i). Note que $q_0 < n$, pois $b > 1$.

Dividindo q_0 por b, obtemos um único par de números q_1 e $a_1 < b$, tais que $q_0 = q_1 b + a_1$ (ii). Note que $q_1 < q_0 < n$.

Substituindo (ii) em (i), obtemos

$$n = (q_1 b + a_1)b + a_0$$
$$n = q_1 b^2 + a_1 b + a_0$$

Repetindo este procedimento um número finito de vezes, em algum momento obteremos $q_{m-1} < b$ tal que $q_{m-2} = q_{m-1} b + a_{m-1}$. Chegando a equação $n = a_m b^m + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$ que representa o número n na base b, na qual $a_m = q_{m-1}$, cujos coeficientes das potências de b são os restos das sucessivas divisões efetuadas e o quociente da última divisão.

2.2.3 Extensão dos numerais

No Capítulo 3, apresentaremos alguns teoremas que nos permitem estabelecer critérios de divisibilidade em qualquer tipo de sistema posicional, gostaríamos, contudo, de elucidar antes disso algumas características dos sistemas posicionais relacionadas ao tamanho da base escolhida para o sistema.

A primeira dessas características é referente à extensão dos numerais. Quanto menor é a base de um sistema de numeração, mais extensos tendem a ser os numerais expressos por meio desse sistema. Vejamos porque isto acontece analisando que tipo de relação pode existir entre as quantidades de algarismos de um mesmo número expresso em bases diferentes.

Sejam b_1 e b_2 bases de dois sistemas de numeração e n um número que, na base b_1 possui m algarismos e na base b_2 possui k algarismos. Vamos tentar descobrir que valores m pode assumir para um dado valor de k.

Como o menor número cuja representação possui m algarismos na base b_1 é b_1^{m-1} e o maior é $b_1^m - 1$, então $b_1^{m-1} \leq n \leq b_1^m - 1$. Seguindo a mesma linha de raciocínio para a base b_2 concluímos que $b_2^{k-1} \leq n \leq b_2^k - 1$.

[13] Na verdade, restringimos o enunciado do algoritmo da divisão para o conjunto dos números naturais, mas este resultado aplica-se também ao conjunto dos números inteiros, desde que o divisor não seja nulo e o resto seja, em módulo, menor que o divisor.

Das duas desigualdades simultâneas anteriores decorrem as seguintes desigualdades, as quais relacionam m e k:

$$b_1^{m-1} \leq b_2^k - 1 \qquad \text{(I)}$$

$$b_2^{k-1} \leq b_1^m - 1 \qquad \text{(II)}$$

Isolando m na inequação (I) obtemos

$$m \leq log_{b_1}\left(b_2^k - 1\right) + 1.$$

Isolando m na inequação (II) obtemos

$$log_{b_1}\left(b_2^{k-1} + 1\right) \leq m.$$

Portanto, podemos concluir que

$$log_{b_1}\left(b_2^{k-1} + 1\right) \leq m \leq log_{b_1}\left(b_2^k - 1\right) + 1,$$

obtendo um intervalo cujas extremidades são dadas apenas em função de k e das bases b_1 e b_2. Fazendo $log_{b_1}b_2 = l$ e tendo em vista que

$$log_{b_1}\left(b_2^k - 1\right) \leq log_{b_1}b_2^k = k \cdot log_{b_1}b_2$$

e

$$(k-1) \cdot log_{b_1}b_2 = log_{b_1}b_2^{k-1} \leq log_{b_1}\left(b_2^{k-1} + 1\right),$$

podemos concluir que

$$(k-1) \cdot l \leq m \leq k \cdot l + 1,$$

que nos fornece uma maneira mais simples, embora um pouco menos precisa, para encontrarmos o intervalo que contém o número m de algarismos de n na base b_1 em função do número k de algarismos de n na base b_2 e do logaritmo de b_2 na base b_1, que chamamos de aqui de l.

Assim, por exemplo, se sabemos que n é representado por um numeral de 19 algarismos no sistema ternário, então, no sistema octal, será representado por um número que terá 10 ou 11 algarismos, pois como $log_8 3 \cong 0{,}52832$, o número m de algarismos de n na base $b_1$será tal que

$$(19-1) \cdot 0{,}52832 = 9{,}50976 \leq m \leq 11{,}03808 = 19 \cdot 0{,}528 + 1$$

De fato, o menor número que na base 3 possui 19 algarismos é $1.000.000.000.000.000.000_3 = 2.705.710.511_8$, que possui 10 algarismos na base 8, enquanto o maior é $2.222.222.222.222.222.222_3 = 10.521.531.732_8$, que possui 11 algarismos na base 8.

A tabela 1 mostra o número 2^{16} expresso em diversos sistemas de numeração e o número de algarismos necessários para representá-lo.

BASE	NUMERAL	NÚMERO DE ALGARISMOS
2	10.000.000.000.000.000	17
3	10.022.220.021	11
4	100.000.000	9
5	4.044.121	7
6	1.223.224	7
7	362.032	6
8	200.000	6
9	108.807	6
10	65.536	5
11	45.269	5
12	31.B14	5
13	23.AA3	5
14	19.C52	5
15	14.641	5
16	10.000	5
17	D.5D1	4
18	B.44G	4
19	9.AA5	4
20	8.3GG	4
30	2CPG ou 2(12)(24)(16)	4
60	ICG ou (18)(12)(16)	3

Tabela 1
Número 2^{16} representado em diferentes bases.

Afirmamos que quanto maior é a base de um sistema de numeração menos algarismos são necessários para representar os numerais. Entretanto, embora tenhamos exemplificado este fato na tabela 1, não o provamos ainda, apenas mostramos como se dá a relação entre o número de algarismos de duas bases distintas.

Realizar tal prova, contudo, não será difícil com as informações de que já dispomos. No caso em que $b_1 < b_2$ temos $l = log_{b_1} b_2 > 1$. Como $(k-1) \cdot l \leq m$ e $1 < l$, podemos concluir que $k - 1 < m$. Como k e m são números naturais, e $k - 1$ é estritamente menor que m, então $k \leq m$. No caso contrário, isto é, quando $b_2 < b_1$, $l < 1$, e como $m \leq k \cdot l + 1$, isto é, $m - 1 \leq k \cdot l$, então $m - 1 < k$, o que, como já vimos, implica $m \leq k$. Portanto, fica provado que, na medida em que utilizamos bases maiores trabalhamos com numerais menos extensos.

A outra característica que gostaríamos de tratar refere-se ao tamanho da tabuada. Cada sistema de numeração possui sua própria tabuada, a qual aumenta na medida em que aumenta a base do sistema de numeração. Ora, como o número de algarismos de um sistema de numeração é igual à base e estes devem ser combinados dois a dois, então, por exemplo, a tabuada da multiplicação no sistema binário, consistirá em uma tabela contendo apenas $2^2 = 4$ entradas, enquanto que, no sistema sexagesimal, serão $60^2 = 3600$ entradas para serem memorizadas. No APÊNDICE E encontram-se as tabuadas de adição e multiplicação do sistema binário ao vigesimal e também do sistema sexagesimal.

Diante destas duas características, a base dez revela-se bastante conveniente, tanto porque os números com que costumamos lidar em nosso dia-a-dia não apresentam nela uma representação extensa demais, quanto pelo fato de que possui uma tabuada cuja memória humana é capaz de suportar. Contudo, outras bases também possuem essas características, entretanto, deixaremos a comparação entre essas bases e a base dez para o próximo capítulo, ao final do qual disporemos de mais elementos para estabelecer tais comparações.

2.3 SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Entender o funcionamento dos sistemas de numeração posicionais é a chave para a compreensão dos algoritmos que utilizamos para efetuar as quatro operações. As explicações sobre o porquê e não apenas de como estes algoritmos funcionam, mesmo quando bem trabalhadas nas séries iniciais, não são nunca mais revisitadas na educação básica, a ponto de que a lógica por trás destes algoritmos acaba se perdendo, a despeito de seu uso frequente. Tal questão torna-se ainda mais relevante quando nos deparamos com a triste situação de alunos que chegam aos últimos anos do ensino básico sem dominar sequer o funcionamento de tais algoritmos e, pode-se dizer, é desesperadora quando percebemos que situações desse tipo não se tratam apenas de casos isolados. Tentando dar nossa contribuição no sentido de minimizar os danos causados por essa falta de compreensão dos algoritmos das quatro operações, é que preparamos um *Material de Apoio ao Professor no Ensino das Quatro Operações*, contido no APÊNDICE C. Aconselhamos que o professor, na medida do possível, procure resgatar a lógica por trás da utilização desses algoritmos, os quais não perderam sua importância, mesmo com a difusão das calculadoras de bolso.

Com o conteúdo trabalhado neste capítulo, muitas atividades diferentes podem ser elaboradas pelo professor, e já que mencionamos o uso das calculadoras, vamos começar propondo uma atividade utilizando a calculadora científica.

Algumas delas possuem o botão $\boxed{a^{b}/_{c}}$ que apresenta a divisão entre dois inteiros na forma de número misto, essa tecla pode ser utilizada para facilitar a mudança de base através do método das divisões sucessivas, desde que façamos com que o aluno perceba que a parte inteira do número misto é o quociente da divisão e que o numerador da fração própria é o resto da divisão. Assim se escrevermos na calculadora o número 46, apertarmos a tecla $\boxed{a^{b}/_{c}}$ (talvez seja necessário apertar a tecla shift antes) e escrevermos o número 8, apertando a seguir a tecla de igual, aparecerá no visor 5 ┘ 3 ┘ 4, que corresponde ao número misto $5\frac{3}{4}$. Essa é também uma excelente oportunidade para o professor explicar que existem diferentes formas e notações que simbolizam uma mesma coisa, mostrando as diferenças entre a notação escrita para número misto e aquela que aparece na máquina.

Se a atividade acima parece demasiadamente complicada de ser realizada em função de depender de um grande número de calculadoras científicas dispondo da função $\boxed{a^{b}/_{c}}$, não se pode negar, por outro lado, que o método das divisões sucessivas oferece uma oportunidade ímpar de exercitar o algoritmo da divisão com os alunos ao mesmo tempo que se trabalham ideias novas, a saber, a conversão de um número expresso no SNPD para outras bases.

Assim, como estudar o desenvolvimento histórico de alguma área do conhecimento tem o poder de motivar os alunos, propiciando a busca de mais conhecimentos sobre o assunto tratado, também as aplicações dessa área do saber podem se revelar bastantes motivadoras.

O professor pode, por exemplo, depois de ter dado algumas breves explicações sobre sistemas de numeração posicionais, em particular sobre o sistema binário, pedir que seus alunos pesquisem sobre “linguagem de máquina” na internet, para que estes descubram por si sós a relação existente entre o sistema binário e a informática, compreendendo que muitos conteúdos matemáticos possuem realmente aplicações no mundo em que vivemos e que isso independe do professor mencionar ou não essas aplicações em sala de aula. Feita essa pesquisa pelos alunos, o professor pode resgatar os resultados e explanar sobre as aplicações dos sistemas binário, octal e hexadecimal no campo da informática, bem como mencionar a presença do sistema sexagesimal na contagem do tempo e na medição de ângulos.

Além disso, assim como pesquisar sobre a História da Matemática aproxima estas duas disciplinas, Matemática e História, numa atitude interdisciplinar, pesquisar as aplicações dos conteúdos matemáticos também contribui para a interdisciplinaridade, uma vez que aproxima a Matemática da área do conhecimento em que está sendo aplicada, neste caso, a Informática.

Outra atividade interessante para ser desenvolvida com os alunos em sala de aula, depois de explicar o método das divisões sucessivas, é pedir que estes convertam um número relativamente alto para diversas bases, postas em ordem crescente a partir da base 2, pedindo que descrevam o que está acontecendo. Os alunos devem chegar sozinhos à conclusão de que quanto menor é a base mais extensa se torna a representação dos numerais. Atividades como essas são importantes porque permitem que o aluno realize suas próprias descobertas, desenvolvendo neles um espírito de autonomia.

Aqui, uma pesquisa histórica, sobre a vida de Leibniz, por exemplo, também não está descartada, pois além de contribuir com o desenvolvimento do sistema binário, Leibniz trouxe outras importantes contribuições, não só para a Matemática, como também para outras áreas do conhecimento, como a filosofia. Ao pesquisar sobre tais contribuições o aluno terá a oportunidade de se encantar com elas, buscando, talvez, novas informações sobre os outros conhecimentos produzidos por ele, mesmo que esse aluno não compreenda alguns dos assuntos que têm relação com a vida deste eminente matemático, como o cálculo diferencial e integral, por exemplo, o professor terá cumprido seu papel, pois a semente da curiosidade foi plantada.

CAPÍTULO 3

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Este capítulo é dedicado ao estudo dos critérios de divisibilidade em sistemas de numeração posicionais. Na primeira seção relembramos os critérios de divisibilidade dos números de 1 a 13 no SNPD. Na segunda, é apresentado um conjunto de teoremas que nos possibilita encontrar critérios de divisibilidade eficazes em qualquer sistema de numeração posicional. Cada um destes teoremas é seguido de sua demonstração e precedido de ou sucedido por comentários a respeito de sua aplicação no SNPD ou em outros sistemas posicionais. A terceira seção trata de um teorema que não fornece um critério de divisibilidade, mas que mostra uma curiosa relação entre sistemas posicionais, sendo em seguida apresentado seu corolário. Finalmente, algumas considerações são feitas sobre outros sistemas de numeração, analisando possíveis vantagens ou desvantagens destes sistemas, em especial o duodecimal, em relação ao SNPD, à luz dos teoremas vistos na primeira seção. Como de costume, o capítulo se encerra com a seção “Sugestões de Atividades”, que visa trazer orientações sobre como o professor poderia abordar os assuntos tratados neste capítulo junto a seus alunos.

3.1 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE NO SNPD

Nesta primeira seção discutiremos sobre os critérios de divisibilidade no SNPD, os quais serão generalizados a partir dos teoremas e corolários enunciados e demonstrados na próxima seção. Inicialmente apresentamos uma lista contendo os critérios de divisibilidade para os números de 1 a 13 no SNPD:

1) Todo número é divisível por 1.
2) Todos os múltiplos de 2, os quais são denominados números pares, terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
3) Um número é múltiplo de 3 quando a soma de seus algarismos resulta em um múltiplo de 3.
4) Um número é múltiplo de 4 quando seus dois últimos algarismos, na ordem em que aparecem, formam um múltiplo de 4.
5) Um número é múltiplo de 5 quando termina em 0 ou 5.
6) Um número é múltiplo de 6 quando é múltiplo de 2 e de 3.
7) O número 7 não dispõe de um critério de divisibilidade satisfatório.
8) Um número é múltiplo de 8 quando seus três últimos algarismos, na ordem em que aparecem, formam um múltiplo de 8.
9) Um número é múltiplo de 9 quando a soma de seus algarismos resulta em um múltiplo de 9.
10) Todo número terminado em 0 é múltiplo de 10.
11) Um número é múltiplo de 11 quando a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par resulta em um múltiplo de 11.
12) Um número é múltiplo de 12 quando é múltiplo de 4 e de 3.
13) O número 13 não dispõe de um critério de divisibilidade satisfatório.

Na lista acima dissemos que os números 7 e 13 não possuem um critério de divisibilidade satisfatório no SNPD, o que não quer dizer que estes números não possuam critérios de divisibilidade no sistema decimal. Além disso, quando falamos em critério “satisfatório” estamos lidando com um conceito bastante subjetivo. Consideramos como critérios de divisibilidade satisfatórios aqueles que podem ser generalizados pelos teoremas e corolários que enunciaremos na próxima seção, mas deixamos o leitor à vontade para fazer seu próprio julgamento sobre quais critérios de divisibilidade deveriam constar ou ser retirados da lista precedente.

Na verdade, se entendemos por critério de divisibilidade qualquer processo diferente da divisão que nos permita saber se um número é divisível por outro, então podemos afirmar que todo número natural possui algum critério de divisibilidade, por menos eficaz que ele seja.

Um dos critérios de divisibilidade do número 7 está alicerçado no fato de que existem múltiplos de 7 terminando com todos os algarismos de que dispõe o SNPD e, em especial, no fato de que os dez primeiros múltiplos de 7 terminam, cada um, com um algarismo diferente de todos os outros. Podemos assim, tomando esses múltiplos escritos com dois algarismos, isto é, 00, 07, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56 e 63, criar uma função s do conjunto dos algarismos do SNPD no conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, constituído pelos algarismos das dezenas dos múltiplos de 7 citados, associando cada algarismo dado à dezena do múltiplo de 7 que o tem como unidade. Assim, por exemplo, $s(5) = 3$ e $s(1) = s(8) = 2$.

Para saber se um determinado número n é múltiplo de 7 devemos reescrever n sem seu último algarismo a_0 e subtrair do número obtido $s(a_0)$. Obteremos assim um novo número n_1 com menos algarismos que n . Repetimos então este procedimento com n_1 obtendo n_2. Esse processo deve então ser repetido até que encontremos um número n_i que saibamos identificar se é ou não múltiplo de 7. O número n será múltiplo de 7 se, e somente se, n_i também for.

O que acabamos de mostrar pode ser melhor compreendido através de um exemplo numérico. Consideremos, com esta finalidade, $n = 35.746.578$.

Assim,

$$n_1 = 3.574.657 - s(8) = 3.574.657 - 2 = 3.574.655$$

$$n_2 = 357.465 - s(5) = 357.465 - 3 = 357.462$$

$$n_3 = 35.746 - s(2) = 35.746 - 4 = 35.742$$

$$n_4 = 3.574 - s(2) = 3.574 - 4 = 3.570$$

$$n_5 = 357 - s(0) = 357 - 0 = 357$$

$$n_6 = 35 - s(7) = 35 - 0 = 35$$

Uma vez que $n_6 = 35$ é um múltiplo de 7, podemos afirmar que $n = 35.746.578$ também o é. De fato, 35.746.578 = 7 x 5.106.654.

Não é difícil, porém, saber porque tal procedimento funciona, já que ele equivale a realizarmos as contas abaixo omitindo os algarismos à direita da linha vermelha.

$$\begin{array}{r} 35.746.578 \\ -\ 28 \\ \hline 35.746.550 \\ -\ 350 \\ \hline 35.746.200 \\ -\ 4.200 \\ \hline 35.742.000 \\ -\ 42.000 \\ \hline 35.700.000 \\ -\ 700.000 \\ \hline 35.000.000 \end{array}$$

Tudo o que fizemos, portanto, foi subtrair sucessivamente de $n = 35.746.578$ múltiplos convenientes de 7, ou melhor, subtraímos de 35.746.578 a soma 28 + 350 + 4.200 + 42.000 + 700.000, que é um múltiplo de 7, uma vez que a soma dos múltiplos de um número deve resultar ainda em um múltiplo desse mesmo número. Assim, como estamos subtraindo de n um múltiplo de 7, o resultado será um múltiplo de 7 se, e somente se, n também for.

Note que o procedimento que utilizamos para criar um critério de divisibilidade para o número 7 aplica-se a qualquer número que possua múltiplos com todas as terminações possíveis, ou seja, a qualquer número primo com a base.

Veja por exemplo o caso do número 13, que possui como dez primeiros múltiplos 000, 013, 026, 039, 052, 065, 078, 091,104 e 117. Aplicando o critério, agora adaptado para este número, sobre $n = 35.746.578$, obtemos:

$$n_1 = 3.574.657 - s(8) = 3.574.657 - 7 = 3.574.650$$

$$n_2 = 357.465 - s(0) = 357.465 - 0 = 357.465$$

$$n_3 = 35.746 - s(5) = 35.746 - 6 = 35.740$$

$$n_4 = 3.574 - s(0) = 3.574 - 0 = 3.574$$

$$n_5 = 357 - s(4) = 357 - 10 = 347$$

$$n_6 = 34 - s(7) = 34 - 11 = 23$$

Ou seja, como 23 não é divisível por 13, n também não é.

Outra forma de verificar a divisibilidade de um número n por 7 consiste em obter um número n_1 cujo valor é dado pela diferença entre o número cuja representação é igual a de n sem seu último algarismo a_0 e o dobro de a_0. O número n será múltiplo de 7 se, e somente se, n_1 também for. O processo deve ser repetido até que encontremos um número n_i cuja divisibilidade por 7 seja conhecida.

No caso de $n = 35.746.578$, faríamos

$$n_1 = 3.574.657 - 2 \cdot 8 = 3.574.657 - 16 = 3.574.641$$

$$n_2 = 357.464 - 2 \cdot 1 = 357.464 - 2 = 357.462$$

$$n_3 = 35.746 - 2 \cdot 2 = 35.746 - 4 = 35.742$$

$$n_4 = 3.574 - 2 \cdot 2 = 3.574 - 4 = 3.570$$

$$n_5 = 357 - 2 \cdot 0 = 357 - 0 = 357$$

$$n_6 = 35 - 2 \cdot 7 = 35 - 14 = 21$$

concluindo que n é múltiplo de 7, já que 21 também é.

Tal critério se justifica porque $10n_1 = (n - a_0) - 20a_0$. Assim, $10n_1 = n - 21a_0$ e, como 21 é múltiplo de 7, n será múltiplo de 7 se, e somente se, n_1 for também, já que 10 não é divisível por 7. Note que $n - a_0$ é n com zero no lugar do último algarismo e $20a_0$ tem os mesmos algarismos (na mesma ordem) do dobro de a_0 acrescido de um zero no final. Logo, no procedimento explicado acima fazemos $10n_1 = (n - a_0) - 20a_0$ sem explicitar os zeros finais.

Para o número 13 há também um critério análogo a este, só que somando $4a_0$ ao invés de subtrair $2a_0$. Isto porque $10n_1 = (n - a_0) + 40a_0 = n + 39a_0$ e 39 é múltiplo de 13 e 10 não é. Vejamos novamente um exemplo em que $n = 35.746.578$. Neste caso temos:

$$n_1 = 3.574.657 + 4 \cdot 8 = 3.574.657 + 32 = 3.574.689$$

$$n_2 = 357.468 + 4 \cdot 9 = 357.468 + 36 = 357.504$$

$$n_3 = 35.750 + 4 \cdot 4 = 35.746 + 16 = 35.762$$

$$n_4 = 3.576 + 4 \cdot 2 = 3.576 + 8 = 3.584$$

$$n_5 = 358 + 4 \cdot 4 = 357 + 16 = 373$$

$$n_6 = 37 + 4 \cdot 3 = 37 + 12 = 49$$

Uma vez que 49 não é múltiplo de 13, n também não é.

Deixamos para a próxima seção os comentários sobre os critérios de divisibilidade dos demais números, os quais serão generalizados e depois provados.

3.2. GENERALIZAÇÃO DOS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Diferentemente do modo como vínhamos trabalhando anteriormente, neste capítulo, as ideias serão apresentadas de maneira mais formal. Os teoremas serão postos de forma explícita e demonstrados, ao invés de aparecerem mesclados ao texto.

Todos os teoremas que enunciaremos neste capítulo serão referentes ao conjunto dos números naturais, o qual, para nós, inclui o zero. Deste modo, diremos simplesmente "o número x" ao invés de "$x \in \mathbb{N}$" ou "o número natural x".

Vamos supor que o leitor está acostumado com o uso do somatório e com algumas noções elementares de Teoria dos Números, como, por exemplo, a relação de congruência e suas propriedades.

Durante este capítulo, a notação $\boldsymbol{p|q}$ será utilizada com o sentido de "p divide q" e a sentença $\boldsymbol{q \equiv r \bmod p}$ indica que "q é congruente a r módulo p", ou seja, que q e r deixam o mesmo resto na divisão por p. Além disso, algumas letras serão reservadas para serem utilizadas sempre com o mesmo sentido. Tal postura tornará os enunciados dos resultados menos longos e, acreditamos, mais claros. Assim:

- $\boldsymbol{n}$ é o número de $m+1$ algarismos representado em um sistema de numeração posicional de base b sobre o qual se pretende aplicar o critério de divisibilidade.
- $\boldsymbol{m+1}$ é o número de algarismos de n.
- $\boldsymbol{b}$ é a base do sistema de numeração.
- $\boldsymbol{a_i}$ é o algarismo de ordem $i+1$ de n (logo $\boldsymbol{a_0}$ é o algarismo das unidades).

Quando escrevemos 564_7, estamos, na verdade, expressando de maneira mais compacta a expressão $5 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 4 \times 7^0$. Até agora, representamos os números em outras bases utilizando implicitamente o fato de que sempre é possível escrever qualquer número natural na forma $\sum_{i=0}^{m} a_i b^i$. Vamos agora demonstrar este fato, o qual está enunciado de maneira explícita através do TEOREMA 1.

TEOREMA 1
Dados dois números positivos $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{b}$, com $\boldsymbol{b \neq 1}$, existe uma única sequência finita $\boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$,..., $\boldsymbol{a_m}$ de números menores do que $\boldsymbol{b}$, com $\boldsymbol{a_m \neq 0}$, tal que $\boldsymbol{n = \sum_{i=0}^{m} a_i b^i}$.

Demonstração

Realizaremos a prova deste teorema por meio de indução sobre n.

Para $n = 1$ a afirmação é verdadeira, pois a sequência $a_0 = 1$ é a única que satisfaz a todas as condições do enunciado neste caso.

Consideremos agora que o teorema é verdadeiro para todos os números menores que n. Vamos provar que ele é válido também para n.

Utilizando o algoritmo da divisão, podemos garantir que existem e são únicos os números q e a_0 tais que $n = qb + a_0$ (i) e $a_0 < b$.

Como $q < n$, pois $b > 1$, a hipótese de indução, nos garante que existe uma única sequência finita r_0, r_1, r_2,..., r_k de números menores do que b, com $r_k \neq 0$, tal que $q = \sum_{j=0}^{k} r_j b^j$ (ii).

Substituindo (ii) em (i) obtemos $n = \left(\sum_{j=0}^{k} r_j b^j\right) b + a_0 = \sum_{j=0}^{k} r_j b^{j+1} + a_0$. Fazendo $m = k + 1$ e $r_j = a_i$, quando $i = j + 1$, obtemos $n = \sum_{i=1}^{m} a_i b^i + a_0 = \sum_{i=0}^{m} a_i b^i$. Logo, a sequência a_0, a_1, a_2,..., a_m é a sequência procurada, decorrendo sua unicidade das unicidades de a_0, de q e da sequência r_0, r_1, r_2,..., r_k.

■

Note que o TEOREMA 1 não faz referência ao número zero, mas este caso é trivial, assim como o do número um, já que esses números serão sempre representados como 0 e 1 independentemente da base do sistema de numeração posicional.

Uma vez assegurado que qualquer número natural pode ser representado sob a forma $\sum_{i=0}^{m} a_i b^i$ de maneira única, podemos omitir os sinais de adição e as potências de b na representação desses números, ficando a base b indicada como subscrito e convencionado que os coeficientes a_i (que passarão a ser chamados de algarismos) serão posicionados, no sentido da escrita, segundo a ordem decrescente das potências de b que acompanham. Isto é o que nos autoriza a escrevermos 5 x 7^2 + 6 x 7^1 + 4 x 7^0 simplesmente como 564_7.

O TEOREMA 1 e a PROPOSIÇÃO 1 a seguir serão bastante utilizados nas demonstrações dos teoremas concernentes aos critérios de divisibilidade que são objeto deste capítulo.

PROPOSIÇÃO 1

Se $r < b$, as afirmações (i) e (ii), dadas abaixo, são equivalentes:

(i) $n \equiv r \bmod b$;

(ii) $r = a_0$.

Demonstração

Do TEOREMA 1 temos que $n = \sum_{i=0}^{m} a_i b^i$. Assim,

$$n \equiv r \, mod \, b \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} a_i b^i \equiv r \, mod \, b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i b^i + a_0 \equiv r \, mod \, b \Leftrightarrow a_0 \equiv r \, mod \, b,$$

devendo-se a última equivalência ao fato de que $\sum_{i=1}^{m} a_i b^i$ é múltiplo de b.

Como $r < b$, por hipótese, $a_0 \equiv r \, mod \, b \Leftrightarrow r = a_0$. Portanto, (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

■

O que a PROPOSIÇÃO 1 nos diz é que o resto da divisão de um número n por b, é o algarismo das unidades de n na base b. Seu mérito é dizer isso utilizando a relação de congruência.

Os teoremas que serão enunciados a partir daqui até o final desta seção revelam como encontrar critérios de divisibilidade em sistemas de numeração posicionais.

TEOREMA 2
Um número n é divisível por b se, e somente se, $a_0 = 0$.

Demonstração

Trata-se de um corolário da PROPOSIÇÃO 1, pois

$$b|n \Leftrightarrow n \equiv 0 \, mod \, b \Leftrightarrow a_0 = 0.$$

■

Em outras palavras, o que o TEOREMA 2 nos diz é que todo numeral terminado em zero é divisível pela base do sistema de numeração, assim como todo número divisível pela base deve ter sua representação terminada em zero. Não é à toa, portanto, que este é o critério de divisibilidade do número dez, já que esta é a base do SNPD.

Assim, se utilizássemos um sistema de numeração posicional de base 7, os múltiplos de 7 poderiam ser facilmente identificados, ao contrário do que ocorre no SNPD. Por exemplo, nessa base, os números 14, 28, 35, 49 e 91, todos múltiplos de sete, se escreveriam, respectivamente, como 20, 40, 50, 100 e 160, todos terminando com zero.

O próximo teorema generaliza os critérios de divisibilidade que, na base dez, são atribuídos aos números 2 e 5, critérios estes que muitos de nós aprendemos ainda na infância.

Na base dez, um número é divisível por 2 quando termina em 0, 2, 4, 6 ou 8, e é divisível por 5 quando termina em 0 ou 5.

Estes critérios que, à primeira vista, não têm nada em comum, devem-se ao fato de que ambos, 2 e 5, são divisores de 10. Tal relação entre estes dois critérios fica clara a partir do TEOREMA 3.

TEOREMA 3
Se b é múltiplo de d, então $d\|n$ se, e somente se, $d\|a_0$.

Demonstração

A PROPOSIÇÃO 1 nos garante que a_0 é o resto da divisão de n por b, logo $n = qb + a_0$, em que q é o quociente da divisão de n por b. Assim,

$$d|n \Leftrightarrow n \equiv 0 \; mod \; d \Leftrightarrow qb + a_0 \equiv 0 \; mod \; d \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \; mod \; d \Leftrightarrow d|a_0.$$

Na penúltima equivalência utilizamos o fato de que, por hipótese, $d|b$.

Portanto, $d|n$ se, e somente se, $d|a_0$ e a prova está completa.

■

Na base 15, encontramos uma interessante aplicação deste teorema. Nessa base, os múltiplos de 3, que é um divisor de 15, podem ser identificados por meio de suas terminações. Veja como ficam os dezesseis primeiros múltiplos desse número expressos na base 15: 0, 3, 6, 9, C, 10, 13, 16, 19, 1C, 20, 23, 26, 29, 2C, 30. Note que há apenas 5 terminações, 0, 3, 6, 9 e C, todas múltiplos de 3 (lembre-se de que C = 12). Isto não é uma coincidência e decorre justamente do fato de que 15 = 3 x 5. O próximo teorema que será provado refere-se justamente a este fato.

O leitor que não estiver satisfeito com apenas este exemplo poderá obter outros consultando, no APÊNDICE E, as tabuadas de multiplicação de sistemas de numeração cujas bases sejam números compostos e observando cuidadosamente o comportamento dos múltiplos dos divisores dessas bases.

Este único exemplo é, contudo, suficiente para demonstrar que há uma profunda diferença entre a divisibilidade e um critério de divisibilidade, pois, enquanto a primeira é uma relação apenas entre os números, a segunda é uma propriedade destes com relação à base do sistema de numeração adotado. Assim, 15 sempre será múltiplo de 5, não importa a base do sistema de numeração, mas 13_{12} é quinze, que é múltiplo de 5, embora não termine nem em 0, nem em 5.

TEOREMA 4

Se $b = cd$, então existem somente c terminações possíveis para os múltiplos de d.

Demonstração

Se $d|b$ e a_0 é o algarismo das unidades de um múltiplo de d, então, pelo TEOREMA 3, $d|a_0$. Mas $a_0 < b = cd$. Assim, a_0 só pode ser um dos c números 0, d, $2d$,..., $(c-1)d$.

■

Uma consequência direta dos TEOREMAS 3 e 4 é o COROLÁRIO 1.

COROLÁRIO 1

Se $b = 2d$, então $d|n$ se, e somente se, $a_0 = 0$ ou $a_0 = d$.

Demonstração

Os números distintos 0 e d, ambos menores que b, são evidentemente múltiplos de d. Como $b = 2d$, o TEOREMA 4 garante que há apenas duas terminações possíveis para os múltiplos de d, ou seja, aqueles dois números.

A recíproca decorre diretamente do TEOREMA 3.

■

Assim é que, na base dez, os múltiplos de 5 terminam em 0 ou 5, mas também, na base 12, os múltiplos de 6 terminam em 0 ou 6, na base 14, os múltiplos de 7 terminam em 0 ou 7 e, em uma base par qualquer, os múltiplos da base sempre terminam em 0 ou nessa metade. É muito fácil perceber isto observando as tabuadas de multiplicação contidas no APÊNDICE E para o caso de bases pares.

O próximo teorema é ainda relacionado com os divisores da base, mais especificamente com as potências desses divisores.

TEOREMA 5

Se b é múltiplo de d, um número n é divisível por d^k ($k \neq 0$) se, e somente se, $\sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i$ é divisível por d^k.

Demonstração

De fato,

$$d^k|n \Leftrightarrow n \equiv 0 \, mod \, d^k \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} a_i b^i \equiv 0 \, mod \, d^k \Leftrightarrow \sum_{i=k}^{m} a_i b^i + \sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i \equiv 0 \, mod \, d^k$$

e como $d|b$, por hipótese, todos os termos do somatório $\sum_{i=k}^{m} a_i b^i$ são divisíveis por d^k. Assim,

$$d^k|n \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i \equiv 0 \, mod \, d^k \Leftrightarrow d^k \mid \sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i.$$

■

Na verdade, o que o TEOREMA 5 afirma é que um número n será múltiplo da k-ésima potência de um divisor da base se, e somente se, o número representado pelos k últimos algarismos de n, na ordem em que aparecem, for também um múltiplo dessa potência.

Na base dez, esse teorema justifica, por exemplo, os conhecidos critérios de divisibilidade dos números $4 = 2^2$ e $8 = 2^3$. No SNPD um número é divisível por 4 se, e somente se, seus dois últimos algarismos formam, na ordem em que aparecem, um múltiplo de 4. O critério do número 8 é análogo, se estendendo a exigência até o antepenúltimo algarismo.

Porém, melhor uso fará deste teorema aquele que perceber que se aplica ainda, na base dez, não só às potências de 2, mas também as de 5. É assim que números como $16 = 2^4$, $32 = 2^5$, $25 = 5^2$ ou $125 = 5^3$ possuem critérios de divisibilidade bastante úteis no SNPD. Um múltiplo de 25, por exemplo, deve necessariamente terminar em 00, 25, 50 ou 75, ou seja, quatro terminações apenas.

O próximo teorema nos mostra justamente como saber quantas são as terminações possíveis para um múltiplo de uma potência de um divisor da base.

TEOREMA 6

Se $\boldsymbol{b = cd}$ e $\boldsymbol{k \neq 0}$, então existem somente $\boldsymbol{c^k}$ terminações possíveis para os múltiplos de $\boldsymbol{d^k}$.

Demonstração

Se $d|b$ e $\sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i$ é o número formado pelos k últimos algarismos das unidades de um múltiplo de d, na ordem em que aparecem, então, pelo TEOREMA 5,

$$d^k | \sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i.$$

Mas $\sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i < b^k = c^k d^k$. Assim, $\sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i$ só pode ser um dos c^k números 0, d^k, $2d^k$,..., $(c^k - 1)d^k$.

■

Diante deste teorema fica claro, por exemplo, que só existem 25 terminações possíveis para os múltiplos de 4 e 125 terminações possíveis para os múltiplos de 8, pois 4 x 25 = 100 = 10^2 e 8 x 125 = 1000 = 10^3.

Os teoremas vistos até agora generalizam os critérios de divisibilidade que são aplicados, na base dez, aos números 2, 4, 5, 8 e 10. Os dois teoremas que se seguem generalizam os critérios de divisibilidade aplicados, na base dez, aos números 3 e 9.

Na base dez, um número é múltiplo de 3 quando a soma de seus algarismos resulta em um múltiplo de 3 e será múltiplo de 9 quando essa soma resultar em um múltiplo de 9. Assim, por exemplo, 456 é um múltiplo de 3, pois 4 + 5 + 6 = 15, que é múltiplo de 3, mas 456 não é múltiplo de 9, já que 15 não é divisível por 9.

As mentes mais curiosas talvez já tenham se questionado sobre o porquê de o número 3 e o número 9 gozarem do mesmo critério de divisibilidade. Talvez tenham mesmo levantado hipóteses como 3^2 = 9, portanto, o número nove, sendo o quadrado de 3 deve ter o mesmo critério de divisibilidade deste número. É realmente uma hipótese tentadora, mas se fosse correta, então o número 27 = 3^3 poderia gozar também desta propriedade, o que não ocorre. Quando levantamos uma hipótese como esta, estamos ignorando um fato crucial, já comentado aqui antes, o fato de que os critérios de divisibilidade são uma característica da relação entre os números e a base do sistema de numeração e não dos números em si mesmos. Ser o quadrado de 3 é uma característica do número 9 em relação ao número 3. O que realmente importa neste caso é o fato de que o número 9 é antecessor do número 10, base do sistema decimal, e é em decorrência desse fato que o número 9 possui o critério de divisibilidade citado acima, na base dez. O número 3 acaba herdando este critério por ser divisor de 9 (não por ser raiz quadrada dele) e não o contrário.

Vamos então aos teoremas que tornarão essas ideias mais claras.

TEOREMA 7
Um número $\boldsymbol{n}$ é múltiplo de $\boldsymbol{b-1}$ se, e somente se, $\boldsymbol{\sum_{i=0}^{m} a_i}$ for múltiplo de $\boldsymbol{b-1}$.

Demonstração

Seja $t = b - 1$, então

$$n = \sum_{i=0}^{m} a_i b^i = \sum_{i=0}^{m} a_i (1 + b - 1)^i = \sum_{i=0}^{m} a_i (1 + t)^i = \sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} t^j =$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} t^j = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \left(1 + \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} t^j \right) = a_0 + \sum_{i=1}^{m} \left(a_i + a_i \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} t^j \right) =$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} t^j = \sum_{i=0}^{m} a_i + \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} t^j = \sum_{i=0}^{m} a_i + t \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} t^{j-1}.$$

Como a expressão $\sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} t^{j-1}$ resulta sempre em um número inteiro,

$$n = \sum_{i=0}^{m} a_i + t \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} t^{j-1} \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i \ mod\ t.$$

Assim, já que $t = b - 1$, temos

$$n \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i \ mod\ (b - 1).$$

Portanto, n é múltiplo do antecessor da base se, e somente se, $\sum_{i=0}^{m} a_i$ for múltiplo de $b - 1$.

■

Vejamos agora alguns exemplos de aplicações do TEOREMA 7 a outras bases. Vamos tomar como exemplo a base 13, cujo antecessor é o número 12, um número que possui diversos divisores e assim será útil para exemplificar também o próximo teorema.

Considere, por exemplo, o número 1.241.016 = 12 x 103.418, que expresso na base 13 é representado pelo numeral 345B3A. Como estamos trabalhando na base 13, a soma dos algarismos deve ser feita utilizando a tabuada da adição dessa base, a qual pode ser encontrada no APÊNDICE E.

Pelo TEOREMA 7, a soma dos algarismos deve resultar em um múltiplo de 12. Vejamos, (3 + 4) + (5 + B) + (3 + A) = 7 + 13 + 10 = 7 + 23 = 2A, que é um múltiplo de 12. O leitor que não estiver convencido de que $2A_{13}$ é um múltiplo de 12 pode convencer-se de pelo menos dois modos: aplicando novamente o TEOREMA 7 ao número $2A_{13}$, isto é, efetuando a soma 2 + A = C, na base 13, e lembrando que C = 12;

ou efetuando diretamente a conversão do número $2A_{13}$ para a base dez, isto é, fazendo $2A_{13}$ = 2 x 13 + 10 = 36 = 3 x 12.

Um fato curioso que pode ser observado na tabuada do número 9 no SNPD é que os dez primeiros múltiplos não nulos de 9, quando dispostos verticalmente e em ordem crescente, podem ser obtidos escrevendo, de cima para baixo, os dez algarismos dessa base em ordem crescente de valor para as dezenas e decrescente para as unidades. Observe:

1 x 9 = 09

2 x 9 = 18

3 x 9 = 27

4 x 9 = 36

5 x 9 = 45

6 x 9 = 54

7 x 9 = 63

8 x 9 = 72

9 x 9 = 81

10 x 9 = 90

O mais curioso, contudo, é que uma rápida observação nas tabuadas de multiplicação contidas no APÊNDICE E nos revela que este é um padrão que se repete em todas elas. Por exemplo, na base 5, os cinco primeiros múltiplos não nulos de 4 são:

1 x 4 = 04

2 x 4 = 13_5

3 x 4 = 22_5

4 x 4 = 31_5

10_5 x 4 = 40_5

os quais são obtidos da mesma maneira que obtivemos os múltiplos de 9 no SNPD, só que tomando apenas os algarismos do sistema quinário.

Isto é verdadeiro em todos os sistemas de numeração posicionais. Ou seja, os b primeiros múltiplos não nulos de $b - 1$, quando dispostos verticalmente e em ordem crescente, podem ser sempre obtidos por este processo que consiste em escrever os algarismos da base em questão, de cima para baixo, primeiro em ordem crescente e depois em ordem decrescente de valor.

De que os b primeiros múltiplos não nulos de $b-1$ possuem apenas dois algarismos, temos certeza, pois o maior deles, $b(b-1)$, é menor que b^2, que é o menor número de três algarismos em qualquer base. Agora, para nos convencermos da validade do procedimento descrito, precisamos nos convencer primeiro de que não pode haver repetição de nenhum dos b algarismos de segunda ordem, pois o fato de que eles estão em ordem crescente decorre naturalmente do fato de que $b-1 < 2(b-1) < 3(b-1) < \cdots < b(b-1)$.

Suponhamos, por absurdo, que, dentre os b primeiros múltiplos não nulos de $b-1$, haja algarismos de segunda ordem repetidos nos múltiplos x e y (suponhamos $x < y$). Assim, x e y devem ser consecutivos (ou os múltiplos de $b-1$ não estariam em ordem crescente) e $y - x = b - 1$. Assim, como os algarismos de segunda ordem de x e y são iguais, $b-1$ deve ser a diferença entre os algarismos das unidades de primeira ordem de x e de y. Deste modo o algarismo das unidades de x tem que ser 0 e o algarismo das unidades de y tem que ser $b-1$. Mas, pelo TEOREMA 7, o algarismo de segunda ordem de x deve ser $b-1$, e, portanto, o de y também. Mas então $y = (b-1)b + (b-1) = (b+1)(b-1)$ e y não está entre os b primeiros múltiplos de $b-1$, o que contradiz a definição de y. Logo, os algarismos de segunda ordem dos b primeiros múltiplos de $b-1$ estão em ordem crescente e não se repetem. Por outro lado, o TEOREMA 7 também nos garante que os algarismos de primeira ordem estarão em ordem decrescente sem se repetirem e a prova está concluída.

Outra curiosidade, que pode ser notada a partir da observação das tabelas de multiplicação e de adição contidas no APÊNDICE E, é o fato de que o quadrado do antecessor da base pode ser obtido pela inversão da ordem dos dois algarismos que constituem o dobro deste número.

A prova deste fato é simples e elegante.

Vejamos, como $2(b-1) = 2b - 2 = 1 \cdot b + (b-2)$, logo 1 é sempre o algarismo de segunda ordem do dobro do antecessor da base e $b-2$ o algarismo da unidades.

Como $(b-1)^2 = b^2 - 2b + 1 = (b-2) \cdot b + 1$, temos que $b-2$ é sempre o algarismo de segunda ordem do quadrado do antecessor da base e 1 o algarismo da unidades. Fim da prova.

Como já deve estar claro, o TEOREMA 7 aplica-se ao número 9 na base 10. O próximo teorema pode ser aplicado ao número 3.

COROLÁRIO 2
Seja d_t um divisor de $b-1$, então $d_t \mid n$ se, e somente se, $d_t \mid \sum_{i=0}^{m} a_i$.

Demonstração

A demonstração deste corolário se faz do mesmo modo que foi feita a do TEOREMA 7, só que desta vez utilizando congruência módulo d_t ao invés de t.

■

Retomando o exemplo da base 13, podemos aplicar este teorema a todos os divisores de 12. Um número par, na base 13, deixa de ser reconhecido por sua terminação e passa a ser identificado pela soma dos algarismos. Assim, 17_{13} é par, pois 1 + 7 = 8, que é par, mas seu sucessor 18_{13}, como era de se esperar, é ímpar, já que 1 + 8 = 9. O mesmo ocorrerá com os números 3, 4 e 6, que também dividem 12.

Outro número que, na base dez, também possui critério de divisibilidade, embora menos difundido que aqueles vistos anteriormente é o número 11. Para saber se um dado número é múltiplo de 11, procede-se da seguinte forma:

1º PASSO. Somam-se os algarismos de ordem ímpar;

2º PASSO. Somam-se os algarismos de ordem par;

3º PASSO. Efetua-se a diferença da maior soma pela menor.

O número dado é múltiplo de 11 se o resultado obtido no 3º PASSO também o for. Assim, fica fácil saber se números elevados como, por exemplo, o número 52.412.100.719, são ou não são múltiplos de 11. Vejamos:

1º PASSO. 5 + 4 + 2 + 0 + 7 + 9 = 27

2º PASSO. 2 + 1 + 1 + 0 + 1 = 5

3º PASSO. 27 – 5 = 22 = 2 x 11

Logo, o número dado é um múltiplo de 11. O que de fato é verdade, pois 52.412.100.719 = 11 x 4.764.736.429.

Este critério é generalizado para outras bases através do TEOREMA 8.

TEOREMA 8
Um número n é múltiplo de $b+1$ se, e somente se, $\sum_{i=0}^{m}(-1)^i a_i$ for múltiplo de $b+1$.

Demonstração

Seja $s = b + 1$, então

$$n = \sum_{i=0}^{m} a_i b^i = \sum_{i=0}^{m} a_i (b + 1 - 1)^i = \sum_{i=0}^{m} a_i (s - 1)^i = \sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} s^{i-j} (-1)^j =$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} s^{i-j} (-1)^j = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \left((-1)^i + \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} s^{i-j} (-1)^j \right) =$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^{m} \left((-1)^i a_i + a_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} s^{i-j} (-1)^j \right) =$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i a_i + \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} s^{i-j} (-1)^j = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i a_i + s \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} s^{i-j-1} (-1)^j.$$

Como a expressão $\sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} s^{i-j-1} (-1)^j$ resulta sempre em um número inteiro,

$$n = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i a_i + s \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} s^{i-j-1} (-1)^j \equiv \sum_{i=0}^{m} (-1)^i a_i \ mod\ s.$$

Assim, já que $s = b + 1$, temos

$$n \equiv \sum_{i=0}^{m} (-1)^i a_i \ mod\ (b + 1).$$

Portanto, n é múltiplo do sucessor da base se, e somente se, $\sum_{i=0}^{m} (-1)^i a_i$ for múltiplo de $b + 1$.

■

A validade deste teorema pode, por exemplo, ser constatada observando os múltiplos de 4 no sistema ternário. Vejamos o caso dos números 40 e 100, que são expressos, nesse sistema, pelos numerais 1111_3 e 10201_3, respectivamente. No primeiro caso, é evidente que o resultado da diferença entre as somas alternadas irá resultar em 0, que é múltiplo de qualquer número, inclusive de 4. No segundo caso, fazendo as contas no sistema ternário, temos (1 + 2 + 1) – (0 + 0) = 11 – 0 = 11, que é 4 nesse sistema de numeração. Aliás, 11 é sempre a forma do sucessor da base de qualquer sistema de numeração, pois é sempre verdade que 11 = 10 + 1, ou ainda, $11_b = b + 1$.

Uma consequência imediata deste teorema é dada pelo COROLÁRIO 3.

COROLÁRIO 3

Se n possui uma quantidade par de algarismos, todos iguais, então $b + 1|n$.

Demonstração

A demonstração é imediata, pois se $m = 2k$, então ambas as somas resultarão em ka_0, sendo a diferença entre elas igual a 0, que é múltiplo de qualquer número.

■

É preciso estar atento à condição de que haja uma quantidade par de algarismos, pois enquanto números como 555.555, 44 e 77.777.777 são sempre múltiplos de 11, números como 55.555, 444 e 777.777.777 nunca o são. Isto porque em números com uma quantidade ímpar de algarismos, todos iguais, o resultado da diferença das somas será sempre o próprio algarismo, que sendo sempre menor que 11 (já que um algarismo é sempre menor que a base, que é menor que seu sucessor), não pode ser divisor deste número. A única exceção é o caso trivial do número zero. Os argumentos usados aqui são válidos para qualquer sistema posicional.

Note que a recíproca será sempre verdadeira se $m = 2$, podendo falhar em outros casos, afinal abundam contraexemplos de múltiplos de 11 que não são dessa forma no próprio SNPD. Não é difícil enxergar a veracidade da recíproca no caso $m = 2$. Note que, com exceção de zero, não pode haver múltiplo de $b + 1$ com um único algarismo e que o maior número de dois algarismos em qualquer base é $b^2 - 1$, pois $b^2 = 100_b$. Logo, existem exatamente $b - 1$ múltiplos de $b + 1$ com dois algarismos, são eles $b + 1$, $2(b + 1)$, $3(b + 1)$,..., $(b - 1)(b + 1) = b^2 - 1$. Mas, excluindo o zero, todo sistema de numeração possui exatamente $b - 1$ algarismos, devendo, portanto, existir exatamente $b - 1$ números da forma a_0a_0. Como, pelo COROLÁRIO 3, todos esses números devem ser múltiplos de $b + 1$, concluímos a veracidade da recíproca para $m = 2$.

O outro corolário do TEOREMA 8, que será visto a seguir, não encontra paralelo no SNPD.

COROLÁRIO 4

Seja d_s um divisor de $b + 1$, então $d_s|n$ se, e somente se, $d_s|\sum_{i=0}^{m}(-1)^i a_i$.

Demonstração

A demonstração deste corolário se faz do mesmo modo que foi feita a do TEOREMA 8, só que desta vez utilizando congruência módulo d_s ao invés de s.

■

Como dissemos, na base 10 este corolário não encontra aplicação, já que 11 é primo, mas basta tomar, por exemplo, 14 como base e verificar que os múltiplos de 5 devem satisfazer as condições impostas por esse corolário. Veja o caso do número $A2C3D0901_{14}$ (utilize a tabela de adição da base 14 contida no APÊNDICE E).

1º PASSO. (A + C) + (D + 9) + 1 = 18 + 18 + 1 = 32 + 1 = 33

2º PASSO. 2 + 3 + 0 + 0 = 5

3º PASSO. 33 – 5 = 2C

Notando que, na base 14, C – 2 = A, e que A = 10 = 2 x 5, temos aí uma boa aplicação do COROLÁRIO 4.

Com este corolário completamos o conjunto de resultados que nos permitem encontrar critérios de divisibilidade eficazes em quaisquer sistemas de numeração posicionais.

É interessante notar que, na demonstração que apresentamos para o TEOREMA 7, não utilizamos a hipótese de que $b-1|n$ para concluir que $n \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i \ mod\ (b-1)$. Um leitor mais atento pode ter notado que este resultado é mais geral do que aquele que nos propusemos demonstrar[14], pois, enquanto o enunciado do TEOREMA 7 faz referência apenas ao caso particular em que o número dado é um divisor do antecessor da base do sistema de numeração, a demonstração vai além, afirmando que a soma dos algarismos de um número qualquer gera outro número que deixa o mesmo resto que ele quando dividido pelo antecessor da base do sistema de numeração. Este fato pode ser utilizado para justificar o processo conhecido como “noves fora” ou “prova dos nove”, por meio do qual é possível verificar a validade de cálculos de adição, subtração, multiplicação ou, até mesmo, divisão (vide APÊNDICE D). Este método, que, no passado, foi bastante ensinado nas escolas, hoje é pouco conhecido. É preciso dizer que, se a prova dos nove falhar para um determinado cálculo, então a conta certamente está incorreta, mas se ela der certo, ainda assim, existe a chance de a conta apresentar erro. Isto, contudo, não justifica o completo esquecimento deste teste, que antes era visto paralelamente a

---

[14] Esta consideração aplica-se também ao TEOREMA 8, ao COROLÁRIO 2 e ao COROLÁRIO 4. É possível ainda obter generalizações para outros resultados apresentados nesta seção. O TEOREMA 3, por exemplo, ficaria assim: o algarismo das unidades da representação posicional de um número e esse número são congruentes em relação a um divisor da base. Embora a demonstração dada para o TEOREMA 3 não garanta isso, não é difícil chegar a essa conclusão dispondo desse teorema.

chamada “prova real”. Utilizando os resultados obtidos a partir da demonstração do COROLÁRIO 2, poderíamos inclusive criar um novo tipo de teste, a “prova dos três”.

3.3 UM TEOREMA CURIOSO E SEU COROLÁRIO

Nesta seção apresentaremos dois resultados curiosos que nos fazem refletir mais uma vez sobre a sutil diferença que existe entre os conceitos de número e numeral, já que estabelecem relações entre numerais (mas não números!) iguais expressos em bases diferentes.

Um destes curiosos resultados, que será demonstrado a seguir, é o TEOREMA 9. Para que este teorema possa ser mais bem compreendido vamos, antes de enunciá-lo, ilustrá-lo através de um exemplo numérico.

Considere o conjunto $M_b(k)$ dos numerais que representam os múltiplos de k na base b. Observe os conjuntos abaixo.

$M_6(5) = \{0, 5, 14, 23, 32, 41, 50, 55, \dots\}$

$M_{11}(5) = \{\mathbf{0}, \mathbf{5}, A, \mathbf{14}, 19, \mathbf{23}, 28, \mathbf{32}, 37, \mathbf{41}, 46, \mathbf{50}, \mathbf{55}, 5A, 64, \dots\}$.

Lembrando que os elementos desses conjuntos são numerais e não números[15], podemos afirmar que $M_6(5) \subset M_{11}(5)$. Isto não é apenas uma coincidência, o conjunto associado a menor base estará contido no outro sempre que o valor de k for igual a diferença entre as bases.

Vamos ao teorema.

TEOREMA 9
Sejam $b_1 < b_2$ bases de dois sistemas de numeração posicionais e $h = b_2 - b_1$. Então, os numerais que representam múltiplos de h na base b_1 ainda representam, na base b_2, múltiplos de h. Reciprocamente, se um múltiplo de h, na base b_2, é representado por um numeral cujos algarismos são todos menores que b_1, então esse numeral representa ainda, na base b_1, um múltiplo de h.

Demonstração

Sejam os números p e q tais que $p = \sum_{i=0}^{m} a_i b_1^i$, $q = \sum_{i=0}^{m} a_i b_2^i$ e $a_i < b_1$ para todo $0 \leq i \leq m$. Logo, o numeral que representa p em um sistema posicional de base

[15] Se os elementos dos conjuntos dados fossem números e não numerais esses conjuntos seriam evidentemente iguais, já que ambos seriam o mesmo conjunto, a saber, o conjunto dos múltiplos de 5. Note ainda que o fato de os numerais serem iguais não implica no fato de os números por eles representados serem iguais. Assim, por exemplo, $23_6 = 15 \neq 25 = 23_{11}$.

b_1 é igual àquele que representa q em um sistema posicional de base b_2. Seja ainda $h = b_2 - b_1$. Assim,

$$h|p \Leftrightarrow p \equiv 0 \; mod \; h \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} a_i b_1^i \equiv 0 \; mod \; h \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} a_i (b_2 - h)^i \equiv 0 \; mod \; h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} b_2^{i-j} h^j \equiv 0 \; mod \; h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} b_2^{i-j} h^j \equiv 0 \; mod \; h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \left(b_2^i + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} b_2^{i-j} h^j \right) \equiv 0 \; mod \; h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_0 + \sum_{i=1}^{m} \left(a_i b_2^i + a_i \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} b_2^{i-j} h^j \right) \equiv 0 \; mod \; h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_0 b_2^0 + \sum_{i=1}^{m} a_i b_2^i + \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} b_2^{i-j} h^j \equiv 0 \; mod \; h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} a_i b_2^i + h \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} b_2^{i-j} h^{j-1} \equiv 0 \; mod \; h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} a_i b_2^i \equiv 0 \; mod \; h \Leftrightarrow q \equiv 0 \; mod \; h \Leftrightarrow h|q.$$

Como todas as passagens foram feitas através de equivalências, podemos concluir que $h|p \Leftrightarrow h|q$, ou seja, o teorema está demonstrado ida e volta.

■

O TEOREMA 9 pode ter seu resultado estendido para os divisores de h, como é feito no COROLÁRIO 5.

COROLÁRIO 5
Sejam $b_1 < b_2$ bases de dois sistemas de numeração posicionais e $h = b_2 - b_1$. Então, se $d_h \| h$, os numerais que representam múltiplos de d_h na base b_1 ainda representam, na base b_2, múltiplos de d_h. Reciprocamente, se um múltiplo de d_h, na base b_2, é representado por um numeral cujos algarismos são todos menores que b_1, então esse numeral representa ainda, na base b_1, um múltiplo de d_h.

Demonstração

A demonstração deste corolário se faz do mesmo modo que foi feita a do TEOREMA 9, só que desta vez utilizando congruência módulo d_h ao invés de h e concluindo $d_h|p \Leftrightarrow d_h|q$ ao invés de $h|p \Leftrightarrow h|q$.

■

Para exemplificarmos este corolário, consideremos as bases 19 e 7, cuja diferença é 12. O que o COROLÁRIO 5 nos garante é que, por exemplo, $M_7(6) \subset M_{19}(6)$, já que 6 divide 12.

De fato,

$M_7(6) = \{0, 6, 15, 24, 33, 42, 51, \ldots\}$

$M_{19}(6) = \{\mathbf{0}, \mathbf{6}, C, I, \mathbf{15}, 1B, 1H, \mathbf{24}, 2A, 2G, \mathbf{33}, 39, 3F, \mathbf{42}, 48, 4E, \mathbf{51}, \ldots\}$.

Neste ponto, percebemos que temos a nossa disposição um conjunto de resultados que nos possibilitam estabelecer comparações entre diferentes sistemas posicionais, pelo menos no que diz respeito aos critérios de divisibilidade. Comparações dessa natureza é o que vamos encontrar na próxima seção.

3.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE OUTRAS BASES

É claro que hoje é inconcebível tentar implantar outro sistema de numeração, dada a enorme difusão do SNPD em todo o planeta. Contudo, agora que estamos munidos de diversos teoremas que nos permitem analisar o comportamento dos critérios de divisibilidade em outras bases, não nos custa estabelecer algumas comparações entre o sistema decimal e outros sistemas posicionais, avaliando as possíveis vantagens ou desvantagens de cada um deles.

Se ao invés de cinco dedos, dispuséssemos, em cada mão, de seis dedos, é bem provável que a sigla SNPD, que tantas vezes aparece neste trabalho, significasse sistema de numeração posicional duodecimal, pois provavelmente o sistema de numeração mundialmente difundido adotaria a dúzia, e não a dezena como base. E isto seria perfeitamente viável, já que o número doze, assim como o dez, adequa-se muito bem às necessidades da memória humana, uma vez que não produz numerais tão extensos, como ocorre com bases menores, como 2 ou 3, nem tabuadas tão grandes como ocorre com bases maiores, a exemplo das bases 20 ou 60.

Como o número 12 é bem mais generoso que o número 10 no que diz respeito à quantidade de divisores, se a humanidade houvesse escolhido o sistema de numeração posicional duodecimal, ao invés do decimal, todos os múltiplos de 2, 3, 4, 6 e 12, seriam reconhecidos por suas terminações, e a garantia para isso é encontrada no TEOREMA 3.

O número 8 manteria, nesse novo sistema, o mesmo critério de divisibilidade de que dispõe na base 10, mas o número 9 disporia nessa nova base de um critério de divisibilidade melhor do que o do número 4 na base 10, pois seus múltiplos poderiam ser reconhecidos também pelos dois últimos algarismos, mas com a vantagem de que, no sistema duodecimal há apenas 16 terminações possíveis para os múltiplos de 9, as quais poderiam logo ser memorizadas, enquanto que no sistema decimal são 25 terminações possíveis para os múltiplos de 4. E a garantia disto tudo? Encontramo-la nos TEOREMAS 5 e 6. É bem verdade que o número 8 passaria a ter 216 terminações possíveis no sistema duodecimal contra 125 terminações do sistema decimal, mas quem memoriza 125 terminações?

Além disso, os múltiplos de 11, no sistema duodecimal, de acordo com o TEOREMA 7, passariam a ser reconhecidos pela simples soma dos algarismos, critério mais amigável do que o que lhe garante o TEOREMA 8, na base dez, teorema este, que, aplicado à base doze, fornece um critério de divisibilidade satisfatório para o número primo 13.

A grande desvantagem do sistema duodecimal em relação ao decimal seria a perda de bons critérios de divisibilidade para os números cinco e dez. No sistema decimal, os três primeiros números primos possuem bons critérios de divisibilidade, embora no sistema duodecimal o critério de divisibilidade do número 3 seja melhor.

Neste sentido, a base sexagesimal dos povos da Mesopotâmia revela-se melhor, já que nela o TEOREMA 3 se aplica aos números 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 e 30. Contudo, esta base apresenta uma enorme desvantagem no que diz respeito ao tamanho de sua tabuada, a qual excede a capacidade de memorização do cérebro humano (isso pode ser verificado consultando as tabuadas de adição e multiplicação da base 60, contidas no APÊNDICE E).

A seguir apresentamos um resumo dos critérios de divisibilidade do sistema duodecimal.

1) Todo número é divisível por 1.
2) Todos os múltiplos de 2, os quais são denominados números pares, terminam em 0, 2, 4, 6, 8 ou A.

3) Todos os múltiplos de 3, os quais poderiam ser denominados números “trios”, terminam em 0, 3, 6 ou 9.
4) Um número é múltiplo de 4 quando termina em 0, 4 ou 8.
5) O número 5 não dispõe de um critério de divisibilidade satisfatório.
6) Um número é múltiplo de 6 quando termina em 0 ou 6.
7) O número 7 não dispõe de um critério de divisibilidade satisfatório.
8) Um número é múltiplo de 8 quando seus três últimos algarismos, na ordem em que aparecem, formam um múltiplo de 8.
9) Um número é múltiplo de 9 quando seus dois últimos algarismos, na ordem em que aparecem, formam um múltiplo de 9, isto é, quando termina em 00, 09, 16, 23, 30, 39, 46, 53, 60, 69, 76, 83, 90, 99, A6 ou B3.
10) O número A não dispõe de um critério de divisibilidade satisfatório.
11) Um número é múltiplo de B quando a soma de seus algarismos resulta em um múltiplo de B.
12) Todo número terminado em 0 é múltiplo de 10_{12}.
13) Um número é múltiplo de 11_{12} quando a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par resulta em um múltiplo de 11_{12}.

3.5 SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Como o tema abordado neste capítulo exige inicialmente uma preparação a respeito dos sistemas de numeração posicionais e não envolve outras motivações que não sejam o gosto pelas ideias matemáticas abstratas, pensamos que apresentá-lo como uma sequência de aulas para uma turma da educação básica não é a melhor estratégia a ser seguida, visto que são poucos os alunos que apresentam uma forte motivação interna para lidar com temas puramente matemáticos por muito tempo. Geraldo Ávila, em um artigo publicado em 1995 na RPM 27, intitulado *Objetivos do Ensino da Matemática, afirma* “(...) há questões puramente teóricas, que exibem belas idéias, (...) então é preciso ter o cuidado de fazer uma boa exposição, de preferência que não dure muito tempo, para cativar e manter os alunos atentos.”.

Pensamos que uma boa estratégia para trabalhar este tema seria envolvendo-o como parte de um projeto mais amplo sobre sistemas de numeração, o qual poderia ser trabalhado com um grupo de alunos dentro de um clube de Matemática ou na forma de um trabalho para ser apresentado na feira de ciências da escola.

É bom que os alunos tenham contato com temas que são de interesse intrínseco da própria Matemática, cujo ensino pode ser justificado pela própria relevância que tem essa disciplina. Vejamos o que mais nos diz Geraldo Ávila sobre esse assunto no artigo já citado.

> O ensino da Matemática se justifica ainda pelos elementos enriquecedores do pensamento matemático na formação intelectual do aluno, seja pela exatidão do pensamento lógico-demonstrativo que ela exibe, seja pelo exercício criativo da intuição, da imaginação e dos raciocínios por indução e analogia (RPM 27, 1995).

Ora, a generalização dos critérios de divisibilidade que foi apresentada neste capítulo contribui para o desenvolvimento das habilidades mencionadas nessa citação. Por exemplo, se estivermos lidando com um grupo de alunos que já compreenderam o funcionamento dos sistemas posicionais e que já dominam a escrita de números naturais em outras bases, seria possível pedir que escrevessem os 20 ou 30 primeiros números na base 6, perguntando se notam aí algum padrão para os múltiplos de 3. Depois de fazer o mesmo com a base 8 e pedir que observem os múltiplos de 4. É bem possível que percebam que o mesmo ocorrerá para os múltiplos de 6 na base 12. Os alunos então passariam, eles próprios, a procurar padrões, criar e testar hipóteses, buscando, quem sabe, justificar por um raciocínio dedutivo o que foram levados a acreditar ser verdadeiro por indução.

O professor pode ainda fazer atividades que estimulem seus alunos a pesquisar e ampliar seu poder de argumentação, dividindo a turma em três grupos e simulando um julgamento no qual os alunos deveriam decidir qual a melhor base para um sistema de numeração posicional. Um grupo faria a defesa do sistema decimal, outro do duodecimal e o terceiro grupo seria constituído pelos jurados.

Outra sugestão que damos para o professor é que faça um resgate de temas simples e importantes como os critérios de divisibilidade e a prova dos nove, cujos testes para as quatro operações são apresentados e justificados no APÊNDICE D.

Uma iniciativa que vem sendo estimulada ultimamente é a de, a partir de temas simples da educação básica, conduzir alunos ao estudo de conhecimentos matemáticos mais profundos. Ora, o tema abordado neste capítulo está totalmente de acordo com esta proposta, afinal, de temas extremamente simples como sistemas de numeração e critérios de divisibilidade chega-se ao estudo de temas relacionados à Teoria dos Números.

CAPÍTULO 4

REPRESENTAÇÃO POSICIONAL DE NÚMEROS REAIS

Neste capítulo veremos como é possível representar os números reais por meio da notação posicional. Inicialmente, faremos um breve histórico no qual explicaremos como surgiram os números reais e qual o caminho percorrido até que passassem a ser representados por meio do SNPD com a notação que utilizamos atualmente. A seguir, discutiremos a classificação destes números como frações posicionais exatas, periódicas ou como irracionais, bem como a maneira de representá-los em outras bases, fazendo algumas análises a respeito de periodicidade. Finalizamos o capítulo apresentando algumas sugestões de atividades para o professor.

4.1 CONTEXTO HISTÓRICO

Toda análise que fizemos até aqui levou em consideração apenas o conjunto dos números naturais, contudo, para que nossa exposição sobre sistemas de numeração posicionais seja completa, não podemos deixar de mencionar o conjunto dos números reais, já que estes números também podem ser representados por meio de uma notação posicional.

Assim como fizemos com os números naturais no Capítulo 1, acreditamos que discutir o surgimento dos números reais e da representação destes números por meio do SNPD é uma atitude apropriada, pois mais uma vez revela que o conhecimento matemático é fruto do esforço e da colaboração de diversos seres humanos, que, mesmo às vezes vivendo em épocas e locais diferentes, se esmeram na tentativa de resolver com engenhosidade os mesmos problemas, propostos por mentes tão criativas como a daqueles que tentam superá-los.

Limitaremos nossa discussão aos números positivos, uma vez que todas as análises que serão feitas para eles podem ser feitas de maneira análoga para os números negativos, cujo uso no mundo concreto pode ser interpretado de acordo com o contexto com o qual se esteja lidando, como dívidas; temperaturas abaixo do ponto de fusão da água, quando medidas em graus Celsius; velocidades de corpos em movimento retrógrado; etc. Além disso, tratando ainda dos números negativos, gostaríamos apenas de ressaltar um fato histórico, pela surpresa que costuma causar em nossos alunos, o fato de que estes só foram aceitos como números muito depois de os homens já estarem acostumados com o uso dos números racionais.

Os números reais surgiram a partir da necessidade que o homem tem de medir, isto é, de estabelecer comparações entre grandezas de mesma natureza. Para contar, os números naturais são o suficiente, contudo, ao efetuarmos medições, como quando comparamos segmentos, por exemplo, nem sempre um deles "cabe" um número inteiro de vezes no outro. Na Ilustração 15, o segmento de comprimento u, tomado como unidade, cabe 7 vezes no segmento AB, de modo que podemos dizer que o segmento AB mede 7 u.

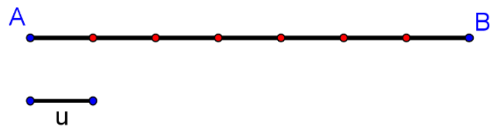


Ilustração 15
Segmento de medida inteira na comparação com a unidade.

Contudo, isto não é o que frequentemente ocorre. Na Ilustração 16, a unidade visivelmente não cabe um número inteiro de vezes no segmento AB.

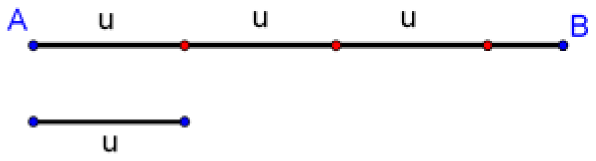


Ilustração 16
Caso em que a unidade não cabe um número inteiro de vezes no segmento AB.

Os gregos da época de Pitágoras contornavam este problema tomando um terceiro segmento que fosse submúltiplo tanto da unidade quanto do segmento AB, isto é, que coubesse um número inteiro de vezes, tanto na unidade, quanto no segmento AB.

Por exemplo, se CD é metade da unidade e cabe 7 vezes em AB, como consta na Ilustração 17, então dizemos que o segmento AB está para a unidade assim como 7 está para 2.

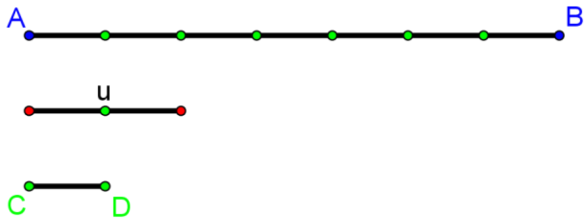


Ilustração 17
Segmento AB comensurável com a unidade e seu submúltiplo comum CD.

Atualmente, diríamos que AB mede $\frac{7}{2}$ u. Contudo, para os gregos da época de Pitágoras, quando se pensava em números, pensava-se em números naturais. Para eles $\frac{7}{2}$ não era um número, mas uma relação entre dois números.

Os egípcios tinham uma forma ainda mais complicada de olhar para as frações, pois, com exceção das frações 2/3 e 3/4, que podiam ser representadas por meio de símbolos especialmente criados para isso, as demais frações eram obtidas como a soma de frações unitárias, ou seja, frações de numerador 1. Isto porque para representar uma fração como 1/5, por exemplo, escrevia-se o numeral de valor 5 adicionando-se o símbolo sobre ele.

Voltando à Grécia, por volta do século V a.C., os gregos ainda acreditavam que, dados dois segmentos quaisquer, haveria sempre um terceiro segmento que caberia um número inteiro de vezes em ambos. Embora nossa intuição nos diga que isto é verdadeiro, uma vez que podemos pegar segmentos tão pequenos quanto queiramos, o fato é que isto é falso, ou seja, existem pares de segmentos, digamos AB e CD, que quando tomados para efeito de comparação, não possuirão nenhum submúltiplo comum, isto é, não há um terceiro segmento, por menor que ele seja, que caiba um número inteiro de vezes tanto em AB quanto em CD. Neste caso, dizemos que AB e CD são segmentos *incomensuráveis*.

A descoberta dos incomensuráveis representa um dos grandes momentos da História da Matemática, pois reforça a ideia de que não é possível confiar apenas nos sentidos, sendo preciso desenvolver métodos seguros para guiar o raciocínio, ideia defendida pela Academia de Platão que, ao que parece, criticava os métodos utilizados pelos matemáticos da época. Além disso, essa descoberta pode ter sido um dos fatores que contribuiu para uma separação no tratamento das grandezas e dos números.

Costuma-se creditar a um pitagórico a descoberta dos incomensuráveis. Segundo a lenda, este indivíduo teria sido perseguido pelos demais membros dessa escola após ter feito tal descoberta, já que ela refutava a ideia defendida por seus adeptos de que todas as coisas poderiam ser descritas através dos números (naturais). Contudo, pelos novos estudos que têm sido feitos no campo da História da Matemática, esta lenda parece realmente não passar disso, “uma lenda”, e mesmo a descoberta dos incomensuráveis parece não ter sido feita no seio da escola pitagórica. Aliás, até o famoso teorema que leva o nome de Pitágoras, provavelmente não teria sido demonstrado nem por ele, nem pelos membros de sua escola. A esse respeito falam Tatiana Bosque e João Bosco Pitombeira no material produzido para a disciplina do PROFMAT, Tópicos de História da Matemática.

> Além de duvidar que a possibilidade de grandezas incomensuráveis tenha sido vislumbrada no seio da escola pitagórica, alguns pesquisadores, como Burkert e Knorr, contestam até mesmo que esta descoberta tenha representado uma crise nos fundamentos da Matemática grega (2012, p. 60-61).
> (...) se existiu uma “Matemática pitagórica”, tratava-se de uma prática bastante concreta. Mesmo o famoso teorema “de Pitágoras”, em sua compreensão geométrica como relação entre medidas dos lados de um triângulo retângulo, não parece ter sido particularmente estudado por Pitágoras e sua escola (2012, p.53).
> (...)
> Não se conhece nenhuma prova do teorema que tenha sido fornecida por algum pitagórico e a possibilidade de que ela exista parece pouco provável. Além disso, o teorema “de Pitágoras” dos pitagóricos não deveria ser um resultado geométrico (2012, p. 57).

O problema dos segmentos incomensuráveis estava relacionado com importantes resultados da Matemática elementar, os quais já eram conhecidos pelos gregos, como o teorema de Tales. Esse problema foi resolvido ainda na antiguidade clássica por Eudoxo (aproximadamente 408-355 a.C.), um dos discípulos da Academia de Platão, sem fazer menção a números irracionais. Milênios se passaram até que o matemático Richard Dedekind (1831-1916) apresentasse uma solução moderna para o problema, entretanto o próprio Dedekind confessou ter buscado sua inspiração nas ideias de Eudoxo.

Hoje aceitamos que dados dois segmentos incomensuráveis, ao tomarmos um deles como unidade, a medida do outro, em relação a essa unidade, será um novo tipo de número, o qual, por não ser racional, recebe o nome de irracional, sendo o conjunto que reúne todos os racionais e todos os irracionais denominado conjunto dos números reais. Definir o que é um número real, entretanto, foge ao escopo deste trabalho.

Mostraremos um caso de número irracional associado a ideia de segmentos incomensuráveis que é conhecido desde a antiguidade. Trata-se do caso do lado e da diagonal de um quadrado, o qual será abordado aqui justamente por seu valor histórico.

De fato, tomando o lado AB e a diagonal AC de um quadrado ABCD, tal qual o da Ilustração 18, afirmamos que não existe nenhum segmento que caiba em ambos um número inteiro de vezes.

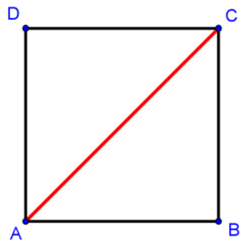


Ilustração 18
Um quadrado e sua diagonal.

Para provar que isso é verdade vamos supor o contrário, isto é, que existe um segmento de reta PQ, de comprimento c, que cabe m vezes na diagonal AC e n vezes no lado AB do quadrado ABCD. Vamos ainda supor que esse segmento é o maior dentre todos com esta propriedade.

Sabemos, pelo teorema "de Pitágoras", que a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado é $\sqrt{2}$, assim

$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{2} \Longrightarrow \frac{mc}{nc} = \sqrt{2} \Longrightarrow \frac{m}{n} = \sqrt{2} \Longrightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Longrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Da última igualdade concluímos que m^2 é par, o que significa que m também o é. Logo podemos escrever $m = 2k$, de modo que a última igualdade fica

$$(2k)^2 = 2n^2 \Longrightarrow 4k^2 = 2n^2 \Longrightarrow 2k^2 = n^2$$

de onde se deduz que n^2, e, portanto, n, também é par. Podemos assim escrever $n = 2t$.

Logo $AC = mc = 2kc = k(2c)$ e $AB = nc = 2tc = t(2c)$. Mas isso significa que existe um segmento com o dobro do comprimento de PQ que é submúltiplo de AB e de AC, contrariando nossa hipótese de que PQ seria o maior segmento com essa propriedade. Portanto, AB e AC devem ser incomensuráveis.

A par desta informação, construímos um quadrado OABC com o lado OA sobre a reta real, de tal modo que O seja a origem e OA seja tomado como unidade. Traçando uma circunferência α de raio OB e centro O, o ponto P de interseção de α com a reta determina um segmento OP cujo comprimento é igual ao da diagonal OB do quadrado. Como a unidade é o lado OA do quadrado, pode-se deduzir daí que o ponto P da reta está associado a um número irracional, já que OP e OA são incomensuráveis. O que acabamos de descrever está ilustrado a seguir.

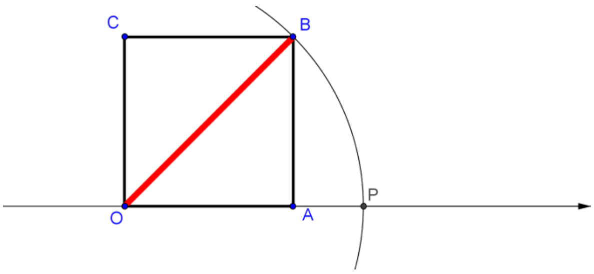


Ilustração 19

O ponto P obtido a partir da diagonal do quadrado representa a posição do irracional $\sqrt{2}$ na reta que tem como unidade o lado OA do quadrado.

Uma vez que estejamos conscientes da impossibilidade de representar todos os pontos da reta por meio de frações ordinárias, visto que sabemos que há nela pontos associados a números irracionais, os quais não podem ser representados como a razão entre dois inteiros, precisamos de uma notação que nos possibilite representar qualquer número real, seja ele racional ou não. Além de representar todos os números reais, tal notação deve ainda garantir que dois números reais distintos tenham representações também distintas.

É aí que entra a representação posicional dos números reais, cuja ideia fundamental é baseada no fato de que, como em um sistema posicional de base b um algarismo de ordem imediatamente maior que a unidade tem seu valor multiplicado por b e o seguinte por b^2 e assim por diante, um algarismo que seja de ordem imediatamente menor que a unidade deve ter seu valor dividido por b, o seguinte por b^2, e assim por diante. Ou seja, se x é um número real, então

$$x = a_m b^m + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0 + c_1 b^{-1} + c_2 b^{-2} + \cdots + c_k b^{-k} + \cdots$$

em que os a_i e os c_j são algarismos de um sistema de numeração posicional de base b.

É assim que, para nós, o numeral 1,75 significa $1 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$, já que utilizamos a base dez. Aliás, no caso específico dessa base, a notação 1,75 é chamada de fração decimal, em contraposição ao termo fração ordinária utilizado para a notação $\frac{7}{4}$, que também pode ser utilizada para representar este mesmo número.

Quanto à demonstração de que tal notação atende às duas condições mencionadas anteriormente, isto é, representa todos os números reais de tal forma que a dois números reais distintos correspondem representações também distintas, isto será feito na próxima seção.

Os mesopotâmicos, por volta do século XIX antes da era cristã, já conheciam este princípio, que aplicavam evidentemente a sua base, a qual, como já sabemos, era sexagesimal. É assim que um numeral como 0,13 para eles significaria $\frac{1}{60} + \frac{3}{3600} = \frac{7}{400}$. Porém, como era de se esperar, os mesopotâmicos não dispunham de uma notação simples e clara como a atualmente utilizada no SNPD. Para representar suas frações sexagesimais eles se serviam de algarismos como os que vimos no Capítulo 1 e não dispunham da vírgula para separar a parte inteira da não inteira, sendo as ambiguidades resultantes da ausência de um símbolo específico com esta finalidade esclarecidas a partir do contexto ou de elucidações feitas oralmente sobre a grandeza dos números, que eram expressos por meio de marcas feitas em tabuletas de argila.

Embora os mesopotâmicos tenham utilizado frações posicionais há aproximadamente quatro milênios, este conhecimento, devido às dificuldades de comunicação que existiam no passado, acabou se perdendo.

Atualmente, embora no Brasil seja consagrado uso da vírgula para separar a parte inteira da não inteira, há países como Inglaterra e Estados Unidos que utilizam o ponto com esta finalidade, como pode ser facilmente constatado em muitas calculadoras. O uso do ponto para indicar a parte inteira parece ter-se estabelecido quando John Napier (1550-1617) publicou suas tabelas de logaritmo utilizando esta notação, ao que parece ele teria sugerido o uso deste ou da vírgula, em 1617, e optado pelo ponto, em 1619. Antes disso, na Alemanha, primeiro Adam Riese (c.1489-1559), em 1522, publicou uma tabela, na qual utiliza frações decimais para expressar o valor de raízes quadradas e depois, em 1530, Cristoff Rudolff (ca.1500 -ca.1545) demonstra dominar o uso dessas frações, utilizando uma barra vertical ao invés da vírgula. Todavia, o primeiro tratado europeu sobre frações decimais foi escrito em 1585, pelo flamengo Simon Stevin (1548-1620), que utilizou, entretanto, uma notação pouco prática.

Para concluir nossas considerações sobre a história da representação dos números reais voltaremos ao ponto de onde partimos: as medições. Como é muito natural, diferentes povos, em diferentes épocas, desenvolveram diferentes sistemas de pesos e medidas. Contudo, com o desenvolvimento científico, tornou-se necessário estabelecer padrões a serem seguidos por toda comunidade científica. Um dos esforços mais notáveis nesse sentido ocorreu na França, no período da Revolução, quando diversos cientistas de renome, entre eles ilustres matemáticos como Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827) e Monge (1746-1818), se reuniram para formar uma comissão especificamente para tratar dessa questão. Daí surgiram unidades como o metro, para medir comprimentos, o quilograma para medir pesos, e o litro, para medir volumes, todas perfeitamente adaptadas ao SNPD, já que os múltiplos e submúltiplos dessas unidades eram todos decimais, mostrando como esse sistema de numeração já havia, nessa época, se imposto como sistema de numeração dominante na Europa, pelo menos entre os membros da comunidade científica. Para se ter uma ideia da evolução que isto representa, basta pensarmos em um simples cálculo que fazemos quando estamos ainda na escola, tentando descobrir o tempo que um automóvel leva para percorrer, a uma velocidade constante de 70 km/h, a distância em linha reta entre duas cidades A e B, que encontram-se a 161 km uma da outra. A resposta para esse problema é 2,3 h. Pois bem, se estivéssemos acostumados a lidar com o tempo de forma decimal, e não sexagesimal essa resposta já seria bastante esclarecedora e nossos cálculos acabariam aí. Contudo, não é isso que ocorre, e precisamos converter nossa resposta para o sistema sexagesimal, o que se faz considerando que 0,3 h = 0,3 x 60 min = 18 min. Assim, a resposta útil para este problema é 2 h 18 min, já que o valor 2,3 h não é tão esclarecedor para nós.

4.2 REPRESENTAÇÃO POSICIONAL DOS REAIS

Na seção anterior prometemos provar que a notação posicional nos possibilita representar todos os números reais sem que dois destes números possuam a mesma representação. É com esta prova que iniciamos esta seção.

Assumindo que a cada número real x está associado um ponto P da reta, vejamos como encontrar a representação posicional do número real x na base b, seja ele racional ou não. Para o caso de números reais negativos o procedimento será similar ao descrito aqui.

Para isso, marquemos na reta todos os pontos associados a números inteiros, chamando de P_n o ponto associado ao inteiro n. Assim, ao marcarmos um ponto P qualquer da reta, este ponto estará associado ao número real x. Como estamos admitindo que x é positivo, P deve estar à direita da origem. Há apenas duas possibilidades: ou o ponto P é um dos pontos que já havíamos marcado, isto é, x é igual a um inteiro n e já sabemos como representá-lo ou P está entre os pontos P_n e P_{n+1}. Na segunda hipótese, diremos que n é a parte inteira de x, tendo esta parte a representação posicional do inteiro n na base b e sendo seguida de uma vírgula que a distinguirá da parte não inteira, a qual mostraremos como encontrar. Observe a Ilustração 20, na qual damos um exemplo no qual $n = 3$ e P está entre os pontos, P_3 e P_4.

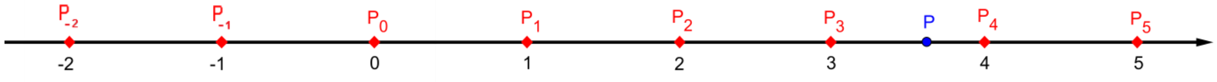


Ilustração 20
Ponto P localizado entre dois inteiros.

Para encontrarmos o primeiro algarismo da parte não inteira de x, subdividimos o segmento de comprimento unitário com extremidades em P_n e P_{n+1}, no qual o ponto P se encontra, em b segmentos de mesmo comprimento, o que é feito marcando os pontos $P_1^1, P_2^1, P_3^1, \dots, P_{b-1}^1$, igualmente espaçados entre P_n = P_0^1 e P_{n+1} = P_b^1, conforme feito na Ilustração 21 para a base 10. Se P = $P_{c_1}^1$, com $0 < c_1 < b$ então o primeiro algarismo da parte não inteira de x é c_1. Caso contrário, P pertence ao interior de um dos b segmentos em que P_nP_{n+1} foi dividido e, neste caso, consideraremos como primeiro algarismo da parte não inteira de x o índice c_1, com $0 \leq c_1 < b$, do ponto $P_{c_1}^1$ correspondente a extremidade esquerda do segmento que contém P. No exemplo fornecido pela Ilustração 21 temos, como representação parcial de x na base decimal 3,6.

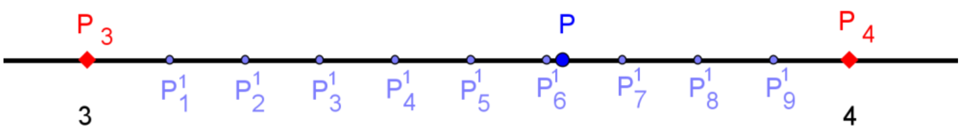


Ilustração 21
Ponto P localizado entre 6 e 7 décimos.

Tomando agora o segmento $P_{c_1}^1 P_{c_1+1}^1$ que contém P, podemos marcar nele os pontos $P_1^2, P_2^2, P_3^2, \dots, P_{b-1}^2$ que o dividirão em b partes iguais e repetindo o procedimento anterior encontramos o segundo algarismo da parte não inteira, que denominaremos c_2. Este procedimento pode ser repetido infinitamente ou até que o ponto P coincida com um dos pontos $P_{c_k}^k$, sendo, neste último caso, c_k o último algarismo da parte não inteira, que possuirá k algarismos.

Note que, por este procedimento a medida do segmento OP, ou seja, o número real x será dado pela série infinita

$$x = n + \sum_{i=1}^{\infty} c_i b^{-i}$$

em que n é o número de segmentos unitários que cabem em OP, b^{-i} é o comprimento dos segmentos obtidos após a i-ésima subdivisão do segmento de comprimento unitário e os c_i, que serão denominados algarismos de ordem $-i$ de x, representam o número máximo de segmentos de comprimento b^{-i} que cabem no que "sobra" do segmento OP depois que "encaixamos" os segmentos de comprimento b^{-i+1}. Perceba que mesmo no caso em que tivermos uma representação posicional finita para x a igualdade acima é válida, desde que consideremos $c_i = 0$ quando $i > k$.

Quanto ao fato de que uma mesma representação posicional não pode corresponder a dois números reais distintos x_1 e x_2, associados aos pontos P_1 e P_2, respectivamente, isto se deve ao fato de que, sendo P_1 e P_2 pontos distintos deve haver uma distância l entre eles, de tal modo que existe um número natural m tal que $l > \frac{1}{b^m}$, em que $\frac{1}{b^m}$ é o comprimento do segmento $P_{c_m}^m P_{c_m+1}^m$que não poderá, portanto, conter ambos os pontos P_1 e P_2. Assim, o algarismo de ordem $-m$ de x_1 não pode ser igual ao de x_2, o que garante que suas representações posicionais não são iguais.

Note que não estamos dizendo aqui que existe uma bijeção entre o conjunto dos números reais e suas representações pela notação posicional, até porque tal bijeção não existe. Mas antes de elucidar melhor esta questão vejamos como podemos classificar os números reais quanto a sua representação posicional.

Como vimos, a representação posicional de um número real pode ser finita ou infinita. Os irracionais possuem necessariamente representação posicional infinita, caso contrário, pelo que foi visto acima, o segmento associado ao irracional (que deve ser incomensurável com a unidade) e a unidade possuiriam um submúltiplo comum de comprimento $\frac{1}{b^k}$. Quanto aos racionais, serão denominados *frações posicionais exatas* (decimais exatos no SNPD) se admitirem representação posicional finita e *frações posicionais periódicas* (dízimas periódicas no SNPD) caso admitam apenas representação posicional infinita, pois, neste caso, essa representação apresentará um *período*, isto é, uma sequência finita de algarismos que começa a repetir-se infinitamente, sem que outros algarismos apareçam entre dois períodos consecutivos. Para que o período fique bem definido, diremos que é a primeira e menor das sequências finitas de algarismos da parte não inteira que apresenta repetição infinita.

Assim, no SNPD:

0,25 35 75,3 5,7777777 4,01

são frações decimais exatas, enquanto:

5,777... 0,343434... 9,541878787... 0,00451451451...

são exemplos de dízimas periódicas de período 7, 34, 87 e 451, respectivamente.

Quando a parte não inteira da dízima periódica é constituída exclusivamente pelas repetições do período, dizemos que a dízima periódica é *simples*. Dentre os exemplos de dízimas periódicas dados acima, apenas os dois primeiros são de dízimas periódicas simples. Quando uma dízima periódica não é simples dizemos que ela é *composta*.

Quando estamos trabalhando com frações próprias, podemos afirmar que toda dízima periódica simples pode ser colocada na forma de uma fração ordinária cujo denominador é constituído por tantos noves quantos são os algarismos do período.

Assim, dos exemplos dados anteriormente temos $0{,}343434\ldots = \frac{34}{99}$. Por outro lado, se a fração não for própria, como é o caso de $5{,}777\ldots$, fazemos $5{,}777\ldots = 5 + 0{,}777\ldots = 5 + \frac{7}{9} = \frac{52}{9}$.

No caso das dízimas periódicas compostas, o denominador da fração geratriz (que é aquela que gera a dízima, daí o nome) é um número constituído por tantos noves quantos são os algarismos do período acrescido de tantos zeros quantos são os algarismos da parte que não é periódica nem inteira. Já o numerador, é o resultado da diferença entre o número escrito até o último algarismo do primeiro período e esse mesmo número sem o período. Assim, a dízima $9{,}541878787\ldots$, que foi dada como exemplo anteriormente, tem sua fração geratriz obtida como se segue.

$$9{,}541878787\ldots = \frac{954.187 - 9541}{99.000} = \frac{944.646}{99.000}$$

O primeiro procedimento descrito para dízimas periódicas simples se justifica facilmente considerando $x = 0{,}343434\ldots$ e multiplicando essa equação por 100 (essa escolha não é aleatória, devendo-se ao fato de que o período da dízima tem dois algarismos, se tivesse três, por exemplo, teríamos escolhido 1000, pois o objetivo é transformar o período em parte inteira, obtendo uma nova dízima com a mesma parte não inteira). Assim, obtemos $100x = 34{,}343434\ldots$. Efetuando a diferença entre esta última equação e a primeira chega-se a $99x = 34$, de onde é possível concluir que $x = \frac{34}{99}$ e como $x = 0{,}343434\ldots$, temos que $0{,}343434\ldots = \frac{34}{99}$. Acreditamos que simplesmente descrever os procedimentos para os alunos, sem justificar sua validade quando isto é perfeitamente possível, como neste exemplo, é uma atitude lamentável da parte do professor, que tira do aluno o prazer de conhecer uma das mais belas facetas da Matemática que é a apresentação de argumentos bem articulados para justificar procedimentos práticos. Agindo desse modo, o professor forma operários que executam ordens sem refletir sobre elas, agindo de outro modo se contribui para a formação de cidadãos que questionam o porquê das coisas e agem para transformar a realidade. Na seção “Sugestões de Atividades”, apresentada ao final deste capítulo, damos uma sugestão de como abordar o cálculo da fração geratriz com os alunos, a qual, pensamos, deve preceder a justificativa mostrada aqui por meio de um exemplo numérico.

No exemplo em que a dízima periódica é composta, podemos dar uma justificativa parecida fazendo $x = 9{,}541878787\ldots$ e multiplicando esta equação por

1000 (valor escolhido por transformar a dízima composta em uma dízima simples). Assim obtemos $1000x = 9541{,}878787 \ldots = 9541 + 0{,}878787 \ldots = 9541 + \frac{87}{99}$. Logo, $x = \frac{9541}{1000} + \frac{87}{99000} = \frac{99 \cdot 9541 + 87}{99000} = \frac{(100-1) \cdot 9541 + 87}{99000} = \frac{954100 - 9541 + 87}{99000} = \frac{954187 - 9541}{99000}$. Assim, $9{,}541878787\ldots = \frac{954.187 - 9541}{99.000}$. Embora demonstrações mais gerais, que não envolvam exemplos numéricos, sejam possíveis, não pensamos que sejam elas as mais adequadas para apresentar para os alunos, pois talvez tornassem as coisas mais obscuras, ao invés de mais claras. O que o professor precisa ter é o cuidado de selecionar bons exemplos (uma dízima como 0,56898989..., por exemplo, poderia não ser conveniente para uma primeira explicação, já que as partes periódica e não periódica têm o mesmo número de algarismos) e de justificar cada passo realizado, mostrando, por exemplo, como o número de zeros no denominador está realmente relacionado com o número de algarismos não periódicos da parte não inteira, já que o valor 1000, que gerou esses zeros, foi escolhido em função dessa quantidade de algarismos.

Antes de prosseguirmos em nossas explicações, vamos retomar uma consideração feita anteriormente. Dissemos que não existe uma bijeção entre o conjunto dos números reais e o de suas representações por meio da notação posicional. De fato, no que diz respeito ao SNPD, toda fração decimal exata não nula possui também uma representação na forma de dízima periódica de período 9 (0,25 = 0,24999... e 1 = 0,999... são dois bons exemplos). Contudo, se excluirmos estes casos, podemos considerar que todo número real pode ser representado de maneira única sob a forma decimal.

Para que isto fique claro, vamos provar o caso particular 1 = 0,999..., ou melhor, vamos dar uma prova deste fato para qualquer sistema de numeração posicional, provando que se $t = b - 1$, então $1 = 0, ttt \ldots$.

Vejamos, $0, ttt \ldots = t \cdot b^{-1} + t \cdot b^{-2} + t \cdot b^{-3} + \cdots$, que é a soma de uma progressão geométrica com infinitos termos e razão igual a b^{-1}. Já que $0 < b^{-1} < 1$, sabemos que esta soma resulta na expressão $\frac{t \cdot b^{-1}}{1 - b^{-1}}$. Substituindo t por $b - 1$ nesta expressão obtemos $0, ttt \ldots = \frac{(b-1) \cdot b^{-1}}{1 - b^{-1}} = \frac{1 - b^{-1}}{1 - b^{-1}} = 1$.

Na verdade, embora não tenha sido isto o que demonstramos acima, é possível afirmar que, assim como ocorre no SNPD, em sistemas posicionais que adotam outras bases teremos também uma representação periódica de período $b - 1$ para todas as frações posicionais exatas, com exceção do zero, obviamente.

Vamos provar agora que se um número racional não admite representação posicional finita, então sua representação é periódica. Isto se faz por meio do algoritmo da divisão, já que é ele que utilizamos para converter números racionais da forma de fração ordinária para a forma de fração posicional.

Considere, por exemplo, o racional $\frac{m}{n}$, tal que m e n são naturais e n não é zero. Uma vez obtido o resto r_0 da divisão inteira de m por n, para efetuarmos a divisão continuada devemos converter as r_0 unidades restantes em $10r_0$ décimos e efetuar a divisão por n, achando o novo resto r_1. Devemos então proceder da mesma maneira que antes, convertendo os r_1 décimos restantes em $10r_1$centésimos, os quais serão divididos por n. Repetindo este procedimento, certamente ocorrerá uma destas duas situações:

1ª) Para algum resto r_i, obteremos $10r_i$ tal que $n|10r_i$, de modo que $r_{i+1} = 0$ e consequentemente todos os demais restos, ou seja, $\frac{m}{n}$ é um decimal exato.

2ª) Como temos um número limitado de restos r_i, já que $0 < r_i < n$, se nenhum deles, depois de multiplicado por 10, gerar um número divisível por n, então, em algum momento, um dos $n - 1$ números $10r_i$ repetir-se-á, gerando, a partir daí, a mesma sequência de algarismos no quociente da divisão de m por n, isto é, $\frac{m}{n}$ é uma dízima periódica.

Observe que a segunda situação é precisamente a dos números que não possuem representação posicional finita, já que r_i não é nunca nulo neste caso.

Aquele que desejar obter um exemplo numérico para o segundo caso pode consultar a parte do APÊNDICE C dedicada à divisão. Lá apresentamos uma divisão interrompida no momento em que uma repetição como a descrita acima ocorre.

Note que, adicionalmente, demonstramos que o período de uma dízima cujo denominador da fração geratriz é n, pode ter, no máximo, $n - 1$ algarismos.

Se, na primeira situação, ao invés de utilizarmos restos r_i tais que $0 \leq r_i < n$, como determina o algoritmo da divisão, utilizássemos restos $0 < r_i \leq n$, então obteríamos as representações posicionais infinitas e periódicas que as frações decimais exatas também possuem.

Uma pergunta que pode surgir das considerações anteriores é: sob que circunstâncias um número racional poderá ser representado como decimal exato?

Deixaremos a resposta desta pergunta para a próxima seção.

4.3 CONSIDERAÇÕES ACERCA DE PERIODICIDADE

Para dar início a esta seção analisaremos primeiro a maneira como medimos segmentos utilizando o SNPD. Consideremos para tanto um segmento AB cuja medida na forma de fração ordinária é dada pelo número racional 7/2.

Já vimos que, quando dizemos que o segmento AB mede 7/2 u, estamos dizendo que há um outro segmento CD, que cabe 2 vezes na unidade e 7 vezes no segmento AB (Ilustração 17). Note, contudo, que, embora CD seja o maior segmento que cabe um número inteiro de vezes na unidade e em AB ele não é o único segmento com esta propriedade. Assim, se tomássemos um segmento com um quinto do comprimento de CD, este segmento caberia 10 vezes na unidade e 35 vezes no segmento AB, ou seja, tal segmento corresponderia ao número racional $\frac{35}{10} = \frac{7}{2}$, mas como sabemos $\frac{35}{10} = 3 + \frac{5}{10}$, que nada mais é que a fração decimal 3,5. Geralmente, quando trabalhamos com frações ordinárias, buscamos uma fração irredutível, isto é, tentamos encontrar o maior segmento que é submúltiplo da unidade e do segmento que pretendemos medir. Quando trabalhamos com frações decimais, abrimos mão disto, escolhendo sempre submúltiplos decimais da unidade e verificando quantas vezes esse segmento cabe no segmento que está sendo medido.

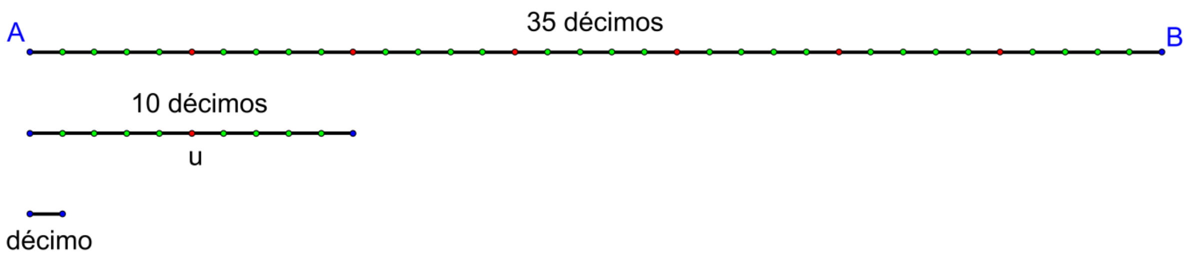


Ilustração 22
Medida do segmento AB utilizando décimos da unidade.

No caso do segmento AB ilustrado acima, o décimo da unidade era também submúltiplo de AB, contudo, isto poderia não ocorrer. Se este fosse o caso, subdividiríamos os décimos em dez partes iguais, encontrando centésimos, e verificaríamos se estes caberiam um número inteiro de vezes no segmento AB. Se isto não fosse o bastante subdividiríamos os centésimos em milésimos e assim por diante.

Seguindo o procedimento que acabamos de descrever duas coisas podem ocorrer: ou em um determinado momento encontraremos um submúltiplo decimal da unidade que caberá um número inteiro de vezes em AB (como na Ilustração 22) ou ficaremos repetindo os passos descritos indefinidamente sem nunca chegarmos a encontrar um submúltiplo decimal que caiba em AB um número inteiro de vezes (como veremos na Ilustração 23), contudo, nesta segunda hipótese, conseguiremos nos aproximar cada vez mais da medida exata de AB, podendo parar no momento em que encontrarmos uma aproximação que nos satisfaça.

A Ilustração 23 mostra o caso em que a unidade, representada pelo segmento azul, foi intencionalmente escolhida com o triplo do comprimento de AB.

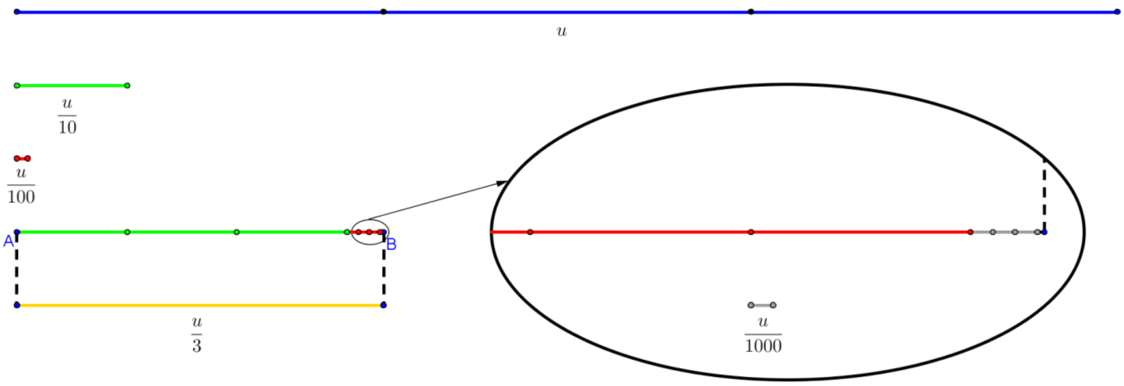


Ilustração 23
Tentativa de encaixar submúltiplos decimais da unidade cada vez menores em um segmento AB de medida 1/3 conduzindo a um processo infinito.

Neste caso, nem décimos, nem centésimos, nem mesmo milésimos são o bastante para garantir um “encaixe” perfeito no segmento AB, embora, como mostrado na Ilustração 23, consiga-se uma aproximação cada vez melhor na medida em que se tomam submúltiplos decimais da unidade cada vez menores.

Note-se, contudo, que não se trata, neste caso, de segmentos incomensuráveis, já que a medida de AB é $\frac{1}{3}u$, apenas a escolha de submúltiplos decimais para a unidade nos levou a medida aproximada 0,333 u para o segmento AB, a medida exata é dada pela dízima periódica 0,333..., em que as reticências indicam que há infinitos 3 após a vírgula. Outra notação possível para as dízimas é $0,\overline{3}$, na qual uma barra é colocada sobre o período.

Por outro lado, se, no caso da Ilustração 23, abríssemos mão da exigência de utilizar submúltiplos decimais da unidade para, ao invés disso, utilizarmos submúltiplos ternários da mesma unidade, obteríamos como resultado para a medida do segmento AB o número $0,1_3$, que é uma fração posicional exata no sistema ternário, ou seja, $\frac{1}{3} = 0,333\ldots = 0,1_3$. Isto nos leva a seguinte conclusão: números que são, em determinada base, expressos apenas por meio de frações posicionais periódicas, admitem, em outras bases, representação posicional finita.

Caso AB fosse incomensurável com a unidade, o procedimento para medi-lo seria análogo ao que acabamos de descrever, mas sempre teríamos de nos conformar apenas com uma aproximação dessa medida, já que, neste caso, o procedimento descrito é infinito para qualquer base que tomemos.

Visto que a possibilidade de encontrar uma representação posicional finita para um número racional depende da base do sistema de numeração em que ele está sendo expresso, como acabamos de ver, convém retomar uma pergunta feita antes, só que agora sem nos restringirmos ao SNPD: **sob que circunstâncias um número racional admite representação posicional finita?**

Agora sabemos que a resposta para esta pergunta certamente deve envolver a base do sistema de numeração em que o número racional está sendo representado.

Antes de responder à pergunta em negrito, achamos prudente de nossa parte observarmos alguns exemplos de frações posicionais em bases diferentes da decimal, a fim de nos acostumarmos com esta notação.

A Ilustração 24, por exemplo, dá um significado geométrico para o número $1,101_2$, representado no sistema binário.

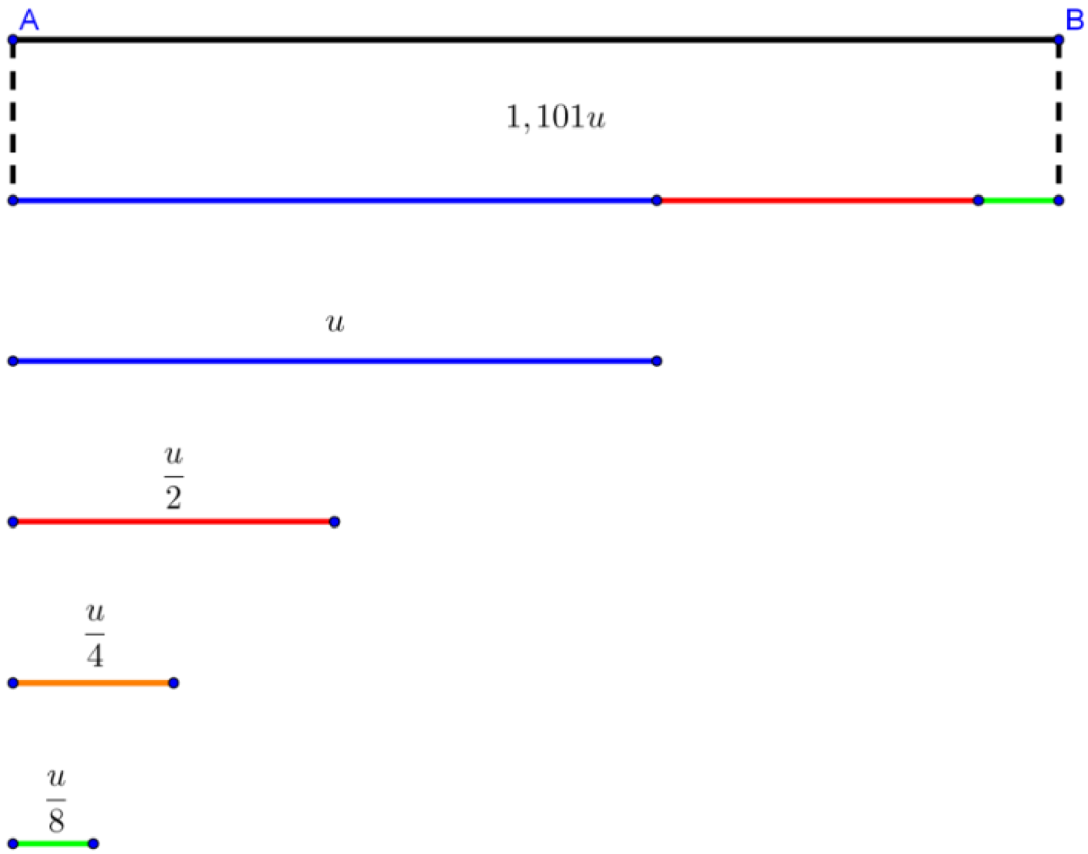


Ilustração 24
Encaixando submúltiplos binários da unidade em um segmento AB.

Ou seja, afirmar que a medida do segmento AB, expressa no sistema binário, é de $1{,}101_2\, u$ significa que tomamos a unidade e dividimo-la em duas partes iguais, obtendo assim um *meio* da unidade, depois dividimos este meio também em duas partes iguais, obtendo assim um *quarto* da unidade, depois dividimos o quarto em duas partes iguais obtendo assim um *oitavo* da unidade. A seguir, percebemos que, no segmento AB, cabem uma unidade, um meio e um oitavo, não sendo necessário utilizar nenhum quarto. Portanto, o número que representa a medida do segmento AB é, de fato, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 1{,}101_2$.

Como forma de apresentarmos mais alguns exemplos de números racionais expressos como frações posicionais pedimos que o leitor observe a tabela 2, a qual contém a representação das frações próprias 1/2, 1/3, 3/4, 2/5, 5/6 e 4/7 sob esse formato em diversas bases.

BASE	1/2	1/3	3/4	2/5	5/6	4/7
2	$0{,}1$	$0,\overline{01}$	$0{,}11$	$0,\overline{0110}$	$0{,}1\overline{10}$	$0,\overline{100}$
3	$0,\overline{1}$	$0{,}1$	$0,\overline{20}$	$0,\overline{1012}$	$0{,}2\overline{1}$	$0,\overline{120102}$
4	$0{,}2$	$0,\overline{1}$	$0{,}3$	$0,\overline{12}$	$0{,}3\overline{1}$	$0,\overline{210}$
5	$0,\overline{2}$	$0,\overline{13}$	$0,\overline{3}$	$0{,}2$	$0,\overline{40}$	$0,\overline{241203}$
6	$0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}43$	$0,\overline{2}$	$0{,}5$	$0,\overline{32}$
7	$0,\overline{3}$	$0,\overline{2}$	$0,\overline{51}$	$0,\overline{2541}$	$0,\overline{5}$	$0{,}4$
8	$0{,}4$	$0,\overline{25}$	$0{,}6$	$0,\overline{3146}$	$0{,}6\overline{52}$	$0,\overline{4}$
9	$0,\overline{4}$	$0{,}3$	$0,\overline{6}$	$0,\overline{35}$	$0{,}7\overline{4}$	$0,\overline{512}$
10	$0{,}5$	$0,\overline{3}$	$0{,}75$	$0{,}4$	$0{,}8\overline{3}$	$0,\overline{571428}$
11	$0,\overline{5}$	$0,\overline{37}$	$0,\overline{82}$	$0,\overline{4}$	$0,\overline{91}$	$0,\overline{631}$
12	$0{,}6$	$0{,}4$	$0{,}9$	$0,\overline{4972}$	$0,A$	$0,\overline{6A3518}$

Tabela 2

Representação posicional de algumas frações próprias em diferentes sistemas de numeração.

Observando com atenção a tabela 2 podemos encontrar alguns padrões como, por exemplo, o fato de que a fração ½, em uma base par $2d$, assume sempre a forma de uma fração posicional exata do tipo $0,d$ e em bases ímpares do tipo $2d+1$, a forma de uma fração posicional periódica do tipo $0,\overline{d}$. Contudo, os padrões que realmente são do nosso interesse são aqueles que podem nos conduzir para a resposta da pergunta em negrito formulada logo no início desta seção, e o que estes padrões parecem nos dizer é o seguinte: se o denominador da fração ordinária possui algum fator primo com a base em que a fração posicional está representada, então esta não admite representação posicional finita. Agora, um detalhe precisa ser levado em consideração nessa análise, todas as frações ordinárias que utilizamos para a montagem da tabela 2 estão em sua forma irredutível.

Agora estamos finalmente em condições de enunciar o teorema com cuja demonstração encerraremos esta seção, encaminhando-nos assim para as últimas sugestões de atividades e para a conclusão deste trabalho. Ironicamente, este teorema é o de número 10.

TEOREMA 10

Sejam $b > 2$, p e q três números naturais positivos e $\frac{p}{q}$ uma fração própria e irredutível. Então podemos afirmar que $\frac{p}{q}$ admite representação posicional finita na base b se, e somente se, q não possui fator primo com b.

Demonstração

Observemos inicialmente que toda fração posicional exata equivale a uma fração ordinária da forma $\frac{h}{b^k}$.

De fato, se x é um número racional positivo e menor que 1 que admite representação posicional finita, então:

$$x = \sum_{i=1}^{k} c_i b^{-i} = \frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{b^2} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{b^{k-1}} + \frac{c_k}{b^k} = \frac{c_1 b^{k-1} + c_2 b^{k-2} + \cdots c_{k-1} b + c_k}{b^k}$$

na qual os c_i são os algarismos de ordem $-i$ de x e k é um número inteiro positivo. Assim, basta fazer $h = c_1 b^{k-1} + c_2 b^{k-2} + \cdots c_{k-1} b + c_k$.

Vamos admitir que $q = st$, em que t é primo com b. Logo não há nenhum número que multiplicado por q possa resultar em uma potência do tipo b^k, visto que esta não pode ter t entre seus fatores primos. Consequentemente, $\frac{p}{q}$ não equivale a uma fração ordinária da forma $\frac{h}{b^k}$, isto é, não admite representação posicional finita, tratando-se, portanto, de uma fração posicional periódica.

Por outro lado, se q não possui nenhum fator primo com b, então se temos $b = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{n_s}$, certamente $q = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{m_s}$. Como é sempre possível encontrar um número k tal que $kn_1 \geq m_1$, $kn_2 \geq m_2$, ... , $kn_s \geq m_s$, basta que façamos

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{q} \cdot \frac{p_1^{kn_1-m_1} \cdot p_2^{kn_2-m_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{kn_s-m_s}}{p_1^{kn_1-m_1} \cdot p_2^{kn_2-m_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{kn_s-m_s}} = \frac{p \cdot p_1^{kn_1-m_1} \cdot p_2^{kn_2-m_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{kn_s-m_s}}{b^k}.$$

Logo, $\frac{p}{q} = \frac{h}{b^k}$ em que $h = p_1^{kn_1-m_1} \cdot p_2^{kn_2-m_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{kn_s-m_s}$. Portanto, $\frac{p}{q}$ é uma fração posicional exata, já que admite representação posicional finita. Isto conclui a demonstração.

■

4.4 SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Neste capítulo trabalhamos com a representação posicional dos números reais. Se, por um lado, muitos professores se queixam da dificuldade de apresentar aplicações dos números complexos para seus alunos, por outro lado, a mesma queixa não pode ser feita com relação ao conjunto dos números reais, que, como vimos, surgem da necessidade que os homens têm de efetuar medições. Deste modo, os números reais estão por toda parte.

E, quando se trata de fazer com que os alunos compreendam a representação posicional dos números reais, as calculadoras de bolso são particularmente úteis, sendo seu uso durante as aulas extremamente recomendado, desde que bem orientado pelo professor. É uma oportunidade de discutir com os alunos sobre a utilização do ponto, ao invés da vírgula, como separador das partes inteira e não inteira do número em sua forma decimal, abordando além do significado da vírgula, a questão da diferença de notação que existe entre diversos países na representação das frações decimais.

Os procedimentos que devem ser utilizados para encontrar as frações geratrizes de dízimas periódicas e de decimais exatos podem ser perfeitamente descobertos pelo próprio aluno a partir de atividades orientadas pelo professor com o uso da calculadora. Aliás, sempre que houver a oportunidade de fazer com que os alunos façam suas próprias descobertas, essa oportunidade deve ser utilizada pelo professor. O professor pode, por exemplo, pedir que seus alunos efetuem na calculadora contas como 5/9, 7/9, 45/99, 387/999, solicitando que estes digam o que percebem, depois pode ir ao quadro e colocar uma dízima periódica do tipo 0,444... e pedir que estes tentem deduzir a fração ordinária que deu origem a dízima, ou seja, sua fração geratriz.

O professor terá ainda a chance de discutir com seus alunos o fato de que, embora a calculadora tenha um limite de dígitos para ser exibidos no visor, o período das dízimas periódicas se repete infinitamente, além de questões relacionadas a arredondamentos, explicando, por exemplo, porque embora o professor insista em dizer que 2/3=0,666..., a sua máquina teima em mostrar o resultado 0,666666667. É a chance de mostrar para seus alunos a importância de ter o conhecimento teórico para compreender erros: máquinas não pensam, só executam ordens, quem pensa somos nós, as pessoas.

Além disso, o professor pode mostrar para seus alunos que, embora possamos utilizar a notação posicional para representar dízimas periódicas e irracionais, na prática, não operamos com estes números, mas com suas aproximações a partir de decimais exatos. Pode comentar ainda como é possível, a partir dos decimais exatos, obter aproximações tão boas quanto desejemos para dízimas periódicas e irracionais.

Uma pesquisa sobre o Sistema Internacional de Medidas ou sobre as diferentes unidades de medidas que são adotadas pelo mundo pode ser bastante interessante, além de ser útil para outras disciplinas.

Além disso, a representação posicional dos números reais nos fornece um meio acessível de explicar para nossos alunos sobre a diferença entre números irracionais e números reais sem cair em um pensamento cíclico como o descrito abaixo.

ALUNO: Professor, o que é o conjunto dos números reais?

PROFESSOR: É a união do conjunto dos números racionais com o dos números irracionais.

ALUNO: E o que é um número irracional?

PROFESSOR: É um número real que não é racional.

Podemos simplesmente dizer para eles que números racionais são as dízimas periódicas e os decimais exatos e que os números irracionais são aqueles que possuem uma representação decimal infinita e sem período. Quanto ao conjunto dos números reais, é o conjunto de todos os números que podem ser colocados sob essa representação posicional.

A bela demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ é algo que pode ser feito pelo professor em sala de aula, pois, além de ser acessível para os alunos, exemplifica o método de demonstração por contradição, extirpando de uma vez por todas aquela dúvida que pode ficar martelando na cabeça do aluno sobre a possibilidade de depois daquelas reticências haver, lá, bem longe, onde ninguém ainda fez as contas, um período. Este é também um bom momento para discutir como nossa intuição pode nos enganar e tecer alguns comentários sobre o método dedutivo.

Enfim, os sistemas de numeração posicionais dão para os números reais uma representação simples e prática, e é dever do professor garantir que o aluno a compreenda, para que possa dela tirar proveito em sua vida.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a leitura deste trabalho podemos tirar algumas conclusões importantes acerca dos Sistemas de Numeração e da Matemática como um todo. A primeira e mais importante delas é que a Matemática não se desenvolveu pela presença de pessoas iluminadas, as únicas capazes de enxergar aquilo que outros estariam privados de ver, e sim pelo esforço e trabalho árduo de diversas gerações de seres humanos empenhados em resolver problemas que se apresentaram diante deles e que precisavam ser superados, problemas estes, muitas vezes resolvidos com engenho e criatividade, por povos distanciados muitas vezes tanto cronológica quanto geograficamente, mas que acabavam encontrando soluções parecidas para os mesmos problemas.

No campo educacional, ver as dificuldades que os povos enfrentaram ao tentar encontrar maneiras eficazes para representar e operar com os números, dificuldades estas que necessitaram de milênios para serem superadas, nos torna mais tolerantes quando vemos nossos alunos esbarrando nessas mesmas dificuldades.

No âmbito dos sistemas de numeração posicionais, devemos estar convencidos de que a escolha de uma base decimal não se deve ao fato de a dezena possuir propriedades especiais que a permitem melhor representar os números, mas a dois aspectos da anatomia humana, a forma de nossas mãos, com cinco dedos em cada uma, e as necessidades de nossa memória, já que a base dez gera numerais que não são tão extensos e uma tabuada possível de ser memorizada. Além disso, por tudo que foi visto a respeito de sistemas posicionais, fatos que pareciam ser propriedades intrínsecas aos números, como os critérios de divisibilidade e a periodicidade, revelam-se como propriedades da relação entre estes números e a base do sistema de numeração que os está representando.

Mas a razão que, para nós, justifica a profundidade com que abordamos o tema dos sistemas de numeração, cuja importância já está mais do que demonstrada, é a nossa crença no fato de que o professor deve conhecer mais do que seus alunos a respeito daquilo que ensina.

REFERÊNCIAS

ÁLVARES, Edson Ribeiro. O comprimento do período de dízimas a/b não depende do numerador. **Revista do Professor de Matemática**, n. 61. CD-ROM.

AVELLO, Rosane Garcia Bandeira. **Jogos como estratégia para facilitar o ensino-aprendizagem de operações com números inteiros**. 2006. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 21 ago. 2006.

ÁVILA, Geraldo. Objetivos do ensino da Matemática. **Revista do Professor de Matemática**, n. 27, 1995. CD-ROM.

______. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. **Revista do Professor de Matemática**, n. 5. Olhando mais de cima. CD-ROM.

______. Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de matemática. **Revista do Professor de Matemática**, n. 7. Olhando mais de cima. CD-ROM.

BERTONI, Nilza Eigenheer. Frações: da forma fracionária à decimal. **Revista do Professor de Matemática**, n. 34. CD-ROM.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1982.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FLOYD, Thomas L. ***Sistemas Digitais: fundamentos e aplicações***. 9. ed. Porto Alegre: Bookman Companhia, 2007. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=ftnEkkS79ZoC&pg=PA91&lpg=PP1&dq=sistemas+digitais:+fundamentos+e+aplica%C3%A7%C3%B5es&hl=pt-BR>. Acesso em: 1 jan. 2013

GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas**. 4. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. (Coleção Textos Universitários)

IFRAH, Georges. **Os números: a história de uma grande invenção**. 11. ed. São Paulo: Globo, 2005.

______. **História universal dos algarismos**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v.1.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. 6. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976. v.1. (Projeto Euclides).

______. Base decimal ou duodecimal. **Revista do Professor de Matemática**, n. 12. Conceitos e controvérsias. CD-ROM.

______. Voltando a falar sobre dízimas. **Revista do Professor de Matemática**, n. 10. Conceitos e controvérsias. 1987. CD-ROM.

______. Que significa a igualdade 1/9=0,111...?. **Revista do Professor de Matemática**, n. 2. Conceitos e controvérsias. CD-ROM.

______. Representação decimal dos reais. In: **Números reais, conjuntos e funções**. (material de apoio da disciplina MA11) – PROFMAT, 2011.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito**. São Paulo: M.Books do Brasil Editora Ltda, 2012.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de História da Matemática**. (material de apoio da disciplina MA31) PROFMAT, 2012.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à teoria dos números**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1998. (Coleção Matemática Universitária).

STEWART, Ian. **Incríveis passatempos matemáticos**. Rio de Janeiro: Zahar, 2010.

SITES CONSULTADOS

Acesso em: 20 dez. 2012
http://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_numera%C3%A7%C3%A3o_bin%C3%A1rio

http://pt.wikipedia.org/wiki/ASCII

http://pt.wikipedia.org/wiki/Byte

Acesso em: 26 dez. 2012
http://www.hardware.com.br/livros/hardware-manual/como-funciona-sistema-binario.html

Acesso em: 29 dez. 2012
http://pt.wikipedia.org/wiki/Caractere_de_controle

Acesso em: 29 jan. 2013
http://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81baco

http://www.soroban.org/hist_origens.shtml

http://pt.wikipedia.org/wiki/Unidades_de_medida_chinesas

Acesso em: 19 mar. 2013
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/naturais/divisibilidade.htm

APÊNDICE A – Tabela de caracteres imprimíveis

<table>
<tr><th>DEC</th><th>BINARIO</th><th>CARACTERE</th><th>DEC</th><th>BINARIO</th><th>CARACTERE</th><th>DEC</th><th>BINARIO</th><th>CARACTERE</th></tr>
<tr><td>32</td><td>00100000</td><td></td><td>64</td><td>01000000</td><td>@</td><td>96</td><td>01100000</td><td>`</td></tr>
<tr><td>33</td><td>00100001</td><td>!</td><td>65</td><td>01000001</td><td>A</td><td>97</td><td>01100001</td><td>a</td></tr>
<tr><td>34</td><td>00100010</td><td>"</td><td>66</td><td>01000010</td><td>B</td><td>98</td><td>01100010</td><td>b</td></tr>
<tr><td>35</td><td>00100011</td><td>#</td><td>67</td><td>01000011</td><td>C</td><td>99</td><td>01100011</td><td>c</td></tr>
<tr><td>36</td><td>00100100</td><td>$</td><td>68</td><td>01000100</td><td>D</td><td>100</td><td>01100100</td><td>d</td></tr>
<tr><td>37</td><td>00100101</td><td>%</td><td>69</td><td>01000101</td><td>E</td><td>101</td><td>01100101</td><td>e</td></tr>
<tr><td>38</td><td>00100110</td><td>&</td><td>70</td><td>01000110</td><td>F</td><td>102</td><td>01100110</td><td>f</td></tr>
<tr><td>39</td><td>00100111</td><td>'</td><td>71</td><td>01000111</td><td>G</td><td>103</td><td>01100111</td><td>g</td></tr>
<tr><td>40</td><td>00101000</td><td>(</td><td>72</td><td>01001000</td><td>H</td><td>104</td><td>01101000</td><td>h</td></tr>
<tr><td>41</td><td>00101001</td><td>)</td><td>73</td><td>01001001</td><td>I</td><td>105</td><td>01101001</td><td>i</td></tr>
<tr><td>42</td><td>00101010</td><td>*</td><td>74</td><td>01001010</td><td>J</td><td>106</td><td>01101010</td><td>j</td></tr>
<tr><td>43</td><td>00101011</td><td>+</td><td>75</td><td>01001011</td><td>K</td><td>107</td><td>01101011</td><td>k</td></tr>
<tr><td>44</td><td>00101100</td><td>,</td><td>76</td><td>01001100</td><td>L</td><td>108</td><td>01101100</td><td>l</td></tr>
<tr><td>45</td><td>00101101</td><td>-</td><td>77</td><td>01001101</td><td>M</td><td>109</td><td>01101101</td><td>m</td></tr>
<tr><td>46</td><td>00101110</td><td>.</td><td>78</td><td>01001110</td><td>N</td><td>110</td><td>01101110</td><td>n</td></tr>
<tr><td>47</td><td>00101111</td><td>/</td><td>79</td><td>01001111</td><td>O</td><td>111</td><td>01101111</td><td>o</td></tr>
<tr><td>48</td><td>00110000</td><td>0</td><td>80</td><td>01010000</td><td>P</td><td>112</td><td>01110000</td><td>p</td></tr>
<tr><td>49</td><td>00110001</td><td>1</td><td>81</td><td>01010001</td><td>Q</td><td>113</td><td>01110001</td><td>q</td></tr>
<tr><td>50</td><td>00110010</td><td>2</td><td>82</td><td>01010010</td><td>R</td><td>114</td><td>01110010</td><td>r</td></tr>
<tr><td>51</td><td>00110011</td><td>3</td><td>83</td><td>01010011</td><td>S</td><td>115</td><td>01110011</td><td>s</td></tr>
<tr><td>52</td><td>00110100</td><td>4</td><td>84</td><td>01010100</td><td>T</td><td>116</td><td>01110100</td><td>t</td></tr>
<tr><td>53</td><td>00110101</td><td>5</td><td>85</td><td>01010101</td><td>U</td><td>117</td><td>01110101</td><td>u</td></tr>
<tr><td>54</td><td>00110110</td><td>6</td><td>86</td><td>01010110</td><td>V</td><td>118</td><td>01110110</td><td>v</td></tr>
<tr><td>55</td><td>00110111</td><td>7</td><td>87</td><td>01010111</td><td>W</td><td>119</td><td>01110111</td><td>w</td></tr>
<tr><td>56</td><td>00111000</td><td>8</td><td>88</td><td>01011000</td><td>X</td><td>120</td><td>01111000</td><td>x</td></tr>
<tr><td>57</td><td>00111001</td><td>9</td><td>89</td><td>01011001</td><td>Y</td><td>121</td><td>01111001</td><td>y</td></tr>
<tr><td>58</td><td>00111010</td><td>:</td><td>90</td><td>01011010</td><td>Z</td><td>122</td><td>01111010</td><td>z</td></tr>
<tr><td>59</td><td>00111011</td><td>;</td><td>91</td><td>01011011</td><td>[</td><td>123</td><td>01111011</td><td>{</td></tr>
<tr><td>60</td><td>00111100</td><td><</td><td>92</td><td>01011100</td><td>\</td><td>124</td><td>01111100</td><td>|</td></tr>
<tr><td>61</td><td>00111101</td><td>=</td><td>93</td><td>01011101</td><td>]</td><td>125</td><td>01111101</td><td>}</td></tr>
<tr><td>62</td><td>00111110</td><td>></td><td>94</td><td>01011110</td><td>^</td><td>126</td><td>01111110</td><td>~</td></tr>
<tr><td>63</td><td>00111111</td><td>?</td><td>95</td><td>01011111</td><td>_</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabela 3

APÊNDICE B – Conversões entre o sistema binário e os sistemas hexadecimal e octal

Em geral, quando desejamos converter um número de uma base b_1 para uma base b_2 realizamos primeiramente a conversão de b_1 para o SNPD e depois a conversão deste para a base b_2. Contudo, há casos em que a conversão pode ser feita de maneira direta. Este é o caso da conversão de um número expresso no sistema binário para o sistema hexadecimal (B ➔ H) ou para o octal (B ➔ O) e vice-versa (H ➔ B ou O ➔ B).

Para realizar as conversões B ➔ H ou H ➔ B é preciso, entretanto, ter à disposição, ou na memória, a tabela 4, a qual fornece a representação dos 16 algarismos hexadecimais na forma binária com 4 algarismos.

HEXADECIMAL	BINÁRIO
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Tabela 4
Conversão dos algarismos hexadecimais para o sistema binário.

Vejamos quais são os passos para a conversão B ➔ H.

P1. Se a quantidade de algarismos do numeral binário não for um múltiplo de quatro, acrescentam-se zeros à esquerda do numeral até que isso ocorra;

P2. Subdivide-se o numeral em grupos de quatro algarismos consecutivos;

P3. Substitui-se cada grupo obtido em P2 pelo algarismo hexadecimal correspondente da tabela 4 e o resultado obtido é o mesmo número expresso no sistema hexadecimal.

Vamos converter o número binário 1001101011 para hexadecimal.

1001101011 ➔ 001001101011 ➔ 0010 - 0110 - 1011 ➔ 26B

A conversão H ➔ B consiste em realizar os três passos vistos acima de maneira inversa.

Na seção 2.1, dissemos que mostraríamos que um byte sempre pode ser expresso como um hexadecimal de dois algarismos. Agora isto deve estar claro, pois um byte nada mais é do que um numeral binário de oito algarismos, os quais sempre poderão ser subdivididos em dois grupos de quatro algarismos, grupos estes que, como vimos, corresponderão, cada um, a um algarismo hexadecimal.

Embora tenhamos mostrado os três passos da conversão B ➔ H, não justificamos tais passos. Para fazer isso consideremos o numeral binário de $n+1$ algarismos $a_i \in \{0,1\}$ dado por $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_2$. Sem perda de generalidade, já que sempre é possível acrescentar zeros à esquerda, consideremos $n+1$ múltiplo de quatro. Assim,

$$(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0)_2 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

e, subdividindo o segundo membro em grupos com quatro termos consecutivos cada, obtemos a expressão:

$$(a_n \cdot 2^n + \cdots + a_{n-3} \cdot 2^{n-3}) + \cdots + (a_7 \cdot 2^7 + \cdots + a_4 \cdot 2^4) + (a_3 \cdot 2^3 + \cdots + a_0 \cdot 2^0),$$

na qual o expoente da potência de dois que multiplica o último termo de cada parêntese é sempre um múltiplo de 4. Colocando essas potências em evidência obtemos a expressão

$$(a_n \cdot 2^3 + \cdots + a_{n-3} \cdot 2^0) \cdot 2^{n-3} + \cdots + (a_7 \cdot 2^3 + \cdots + a_4 \cdot 2^0) \cdot 2^4 + (a_3 \cdot 2^3 + \cdots + a_0 \cdot 2^0).$$

Acontece que todas as potências colocadas em evidência são também potências de 16, pois $16 = 2^4$.

Assim, sendo $n+1 = 4(k+1)$, temos:

$$(a_n \cdot 2^3 + \cdots + a_{n-3} \cdot 2^0) \cdot 16^k + \cdots + (a_7 \cdot 2^3 + \cdots + a_4 \cdot 2^0) \cdot 16 + (a_3 \cdot 2^3 + \cdots + a_0 \cdot 2^0).$$

Como os termos entre parênteses nesta última expressão não passam de numerais binários de quatro algarismos, os quais correspondem, de acordo com a tabela 4, a algarismos do sistema hexadecimal, essa expressão é, na verdade, a forma expandida do numeral hexadecimal $(b_k b_{k-1} \ldots b_2 b_1 b_0)_{16}$, no qual $b_j = a_{j+3} \cdot 2^3 + \ldots + a_j \cdot 2^0$ são algarismos hexadecimais, ou seja, $b_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$.

Para fixar as ideias, vejamos um caso particular. Consideremos o binário 101001011_2 em sua forma expandida:

$$1 \times 2^8 + 0 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

Formando grupos de quatro termos consecutivos obtemos:

$$1 \times 2^8 + (0 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4) + (1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0).$$

Colocando em evidência a menor potência de dois presente em cada grupo ficamos com:

$$1 \times 2^8 + (0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0) \times 2^4 + (1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) =$$

$$= 1 \times 16^2 + (0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0) \times 16 + (1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) =$$

$$= 0001_2 \times 16^2 + 0100_2 \times 16 + 1011_2 = 14B_{16}.$$

As conversões envolvendo o sistema octal são efetuadas de modo similar, exceto pelo fato de que o numeral binário deve ser subdividido em grupos de três algarismos consecutivos, e não de quatro, como ocorre nas conversões envolvendo o sistema hexadecimal, isto porque $8 = 2^3$. Neste caso utiliza-se a tabela 5.

OCTAL	BINÁRIO
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Tabela 5
Conversão dos algarismos do sistema octal para binário.

APÊNDICE C – Material de apoio ao professor para o ensino das quatro operações

Os sistemas de numeração posicionais, além de nos permitirem representar qualquer número utilizando uma quantidade limitada de símbolos, também nos presenteiam com a possibilidade de realização dos cálculos aritméticos básicos com relativa facilidade. Esta é, sem sombra de dúvida, uma das características mais marcantes dos sistemas de numeração posicionais, com a qual entramos em contato ainda em nossos primeiros anos na escola, aprendendo lá os algoritmos que nos permitem realizar essas operações. Contudo, nem sempre aqueles que utilizam esses algoritmos sabem porque eles funcionam. Aqui pretendemos dar alguns esclarecimentos a esse respeito.

Muitas ideias matemáticas abstratas estão alicerçadas em objetos e ações do mundo real. Dado que nosso objetivo é dar significado aos algoritmos aprendidos pela maioria de nós na escola, as explicações aqui fornecidas seguirão uma abordagem mais heurística que rigorosa e formal.

Mas antes de falarmos sobre qualquer uma das quatro operações em particular, queremos deixar clara a diferença entre uma operação e uma relação. Adição (+), subtração (–), multiplicação (x) e divisão ($\div$) são exemplos de operações sobre conjuntos numéricos, enquanto que a igualdade (=) e as desigualdades (< e >) são exemplos de relações. Quando relacionamos dois números[16], tudo o que fazemos é estabelecer uma comparação entre eles, por outro lado, quando efetuamos uma operação entre números, haverá um resultado que, frequentemente, é outro número que pode ser ou não um dos números com os quais estamos operando.

Vamos estudar agora os algoritmos que utilizamos para realizar as quatro operações aritméticas explorando o significado concreto de cada uma delas.

ADIÇÃO

A operação de adição corresponde concretamente às ações de juntar, agrupar, reunir objetos da **mesma natureza**. Nela, os números que sofrem a operação são chamados de *parcelas* e o resultado é denominado *soma*.

[16] Relações e operações podem ser realizadas entre mais de dois objetos e esses objetos não precisam ser necessariamente números, contudo, não faz parte de nosso objetivo abordar tais questões. Se quiséssemos dar uma definição mais técnica, diríamos que uma operação qualquer, digamos $*$, sobre um conjunto não vazio A não passa de uma aplicação do tipo $*: A \times A \to A$.

É justamente para garantir que as parcelas da soma sejam da mesma natureza que, quando somamos dois números naturais, temos o hábito de deixá-los alinhados à direita, pois assim alinhamos os algarismos de ordens correspondentes, como unidades, dezenas e centenas, umas embaixo das outras. No caso de números que possuem vírgula, para que este alinhamento ocorra é preciso alinhar as vírgulas, já que é a vírgula que marca a posição das unidades. Veja o exemplo abaixo.

C	D	U	d	c
5	9	1,	4	
+		6,	1	3
5	9	7,	5	3

Nele, podemos fazer as somas:

0 centésimo + 3 centésimos = 3 centésimos

4 décimos + 1 décimo = 5 décimos

1 unidade + 6 unidades = 7 unidades

9 dezenas + 0 dezena = 9 dezenas

5 centenas + 0 centena = 5 centenas.

Se houver o cuidado da parte do professor de deixar claro para seus alunos que o objetivo de alinhar os numerais à direita ou colocar vírgula embaixo de vírgula é deixar os algarismos de ordens correspondentes alinhados uns embaixo dos outros, também o caso em que um dos números possui vírgula e o outro não, será encarado com maior naturalidade pelo aluno, já que terá a compreensão de que o que está em jogo não é o alinhamento das vírgulas, mas sim dos algarismos de ordens correspondentes, como ilustra o exemplo a seguir.

C	D	U	d	c
5	9	1		
+		6,	1	3
5	9	7,	1	3

Deixar claro o porquê das regras que ensina é uma obrigação do professor. Ele deve fazê-lo sempre que isto for possível, visto que elimina dúvidas e minimiza erros comuns, como o que consta no próximo exemplo.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \text{C} & \text{D} & \text{U} & \text{d} \\
 & 5 & 9 & 1, & 4 \\
 & & \text{U} & \text{d} & \text{c} \\
+ & & 6, & 1 & 3 \\
\hline
 & ? & ? & ? & ?
\end{array}$$

Erros desse tipo são típicos de alunos que aprenderam uma regra sem ter ideia de sua finalidade. Aqui o aluno, provavelmente habituado a efetuar somas, cujas parcelas são números naturais, segue a regra que manda alinhar os numerais à direita, ignorando completamente o papel da vírgula.

No próximo exemplo, veremos porque é conveniente efetuar os cálculos da direita para a esquerda.

$$\begin{array}{cccc}
 & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\
 & 9 & 4 & 5 \\
+ & 6 & 3 & 8 \\
\hline
 & ? & ? & ?
\end{array}$$

Aqui, as somas:

5 unidades + 8 unidades = 13 unidades

e

9 centenas + 6 centenas = 15 centenas.

excedem a dezena. Porém, em sistemas de numeração posicionais, como é o caso do SNPD, um algarismo nunca pode exceder ou ter seu valor igual ao da base do sistema de numeração, que, neste caso específico, é a base dez.

Isto se resolve facilmente, notando que:

13 unidades = 10 unidades + 3 unidades = 1 dezena + 3 unidades

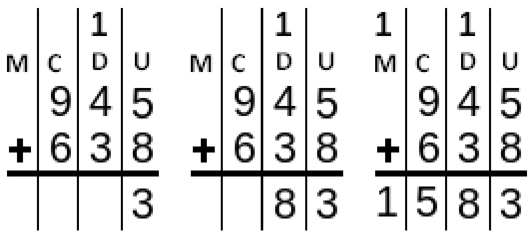
e

15 centenas = 10 centenas + 5 centenas = 1 milhar + 5 centenas

e procedendo como no exemplo seguinte, mantendo sempre alinhados algarismos de uma mesma ordem.

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\text{M} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\
 & 9 & 4 & 5 \\
+ & 6 & 3 & 8 \\
\hline
 & & 1 & 3 \\
 & & 7 & \\
1 & 5 & & \\
\hline
1 & 5 & 8 & 3
\end{array}$$

Se a conta fosse feita deste modo, não haveria qualquer razão para realizarmos as contas da direita para a esquerda, no sentido oposto ao da escrita. Porém, costumamos realizar este cálculo economizando papel e tempo do seguinte modo:

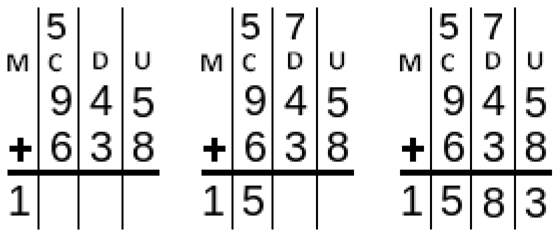


Ora, aqui, fizemos o mesmo que foi feito anteriormente, só que, desta vez, o cálculo:

4 dezenas + 3 dezenas = 7 dezenas

foi realizado mentalmente, adicionando-se a seguir a dezena excedente do cálculo das unidades. O problema é que, se realizarmos as contas da esquerda para a direita, seguindo o sentido da escrita, não saberemos ainda se haverá ou não excedente nos cálculos que estão por vir. Assim, se escrevêssemos o resultado 7 para as dezenas teríamos, a seguir, que apagá-lo para substituí-lo por 8 dezenas. Realizando os cálculos da direita para a esquerda evitamos este tipo de transtorno. Pronto! Eis o que justifica a realização dos cálculos no sentido oposto ao da escrita.

Realizando outros procedimentos seria possível fazer os cálculos no sentido da escrita, como no exemplo seguinte:



Aqui, fazemos 9 + 6 = 15, mas são as cinco centenas que ficam à espera de serem escritas, pois ainda não sabemos se haverá alguma centena excedente no cálculo das centenas que virá a seguir. Uma vez efetuado o cálculo das dezenas, 4 + 3 = 7, no qual verificamos não haver nenhuma centena excedente, podemos escrever definitivamente 5 centenas como resultado e deixar as 7 dezenas na fila de espera, enquanto verificamos se haverá alguma dezena excedente no cálculo das unidades. Uma vez constatado que sim, já que 5 + 8 = 13, somamos 7 + 1 = 8 dezenas e finalizamos as contas escrevendo as 3 unidades do resultado. Eis uma bela forma de realizar as contas no sentido da escrita que não costuma ser ensinada na escola, mas que poderia ser problemática se desejássemos efetuar uma soma envolvendo mais de duas parcelas.

Embora tenhamos utilizado números naturais em nossos exemplos, tudo o que foi dito permanece válido para números nos quais a vírgula aparece, como pode ser claramente constatado no exemplo a seguir.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & & 1 & & \\ \text{C} & \text{D} & \text{U} & \text{d} & \text{c} \\ 5 & 9 & 1, & 9 & \\ + & 7 & 6, & 1 & 3 \\ \hline 6 & 6 & 8, & 0 & 3 \end{array}$$

Entristece-nos saber que, em nossas escolas ainda ocorrem diversos casos de professores que ensinam regras para seus alunos como a do “vai um”, sem dar para seus discípulos maiores esclarecimentos sobre o porquê da validade de tais procedimentos, privando-os da possibilidade de dar significado àquilo que fazem, com tristes consequências para o seu processo de aprendizagem. Contrista-nos mais ainda saber que, em alguns casos, o próprio professor desconhece esses porquês.

Observa-se que todos os procedimentos descritos aqui aplicam-se a quaisquer sistemas posicionais, levando-se em conta apenas os necessários ajustes de que a tabuada utilizada na efetuação dos cálculos é a destes sistemas, e não a do SNPD, e de que os excedentes (os “vai um”) não representam mais dez unidades de uma ordem convertidas em uma unidade da ordem seguinte, e sim b unidades de uma ordem convertidas em uma unidade da ordem seguinte, em que b é a base do sistema de numeração.

Vejamos, por exemplo, a soma 7 + 6 = 13 efetuada no sistema binário, lembrando que neste sistema 1 + 1 = 10 e que o excedente surge toda vez que a soma resulta em dois:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 \\ + & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Resolvendo da direita para a esquerda temos

1ª ORDEM: 1 + 0 = 1

2ª ORDEM: 1 + 1 = 10 (fica 0, vai 1)

3ª ORDEM: 1 + 1 = 10 e com o 1 excedente 10 + 1 = 11.

Note que 7 = 111_2, 6 = 110_2 e que, de fato, 13 = 1101_2.

Vejamos outra soma no sistema binário, só que desta vez com quatro parcelas. Efetuaremos a conta 17 + 9 + 3 + 1 = 30.

		1		
1	0	0	0	1
	1	0	0	1
			1	1
		+		1
1	1	1	1	0

O curioso aqui é que o excedente que aparece na terceira coluna advém da soma efetuada na primeira e não na segunda coluna. Isto porque em binário, 1 + 1 + 1 + 1 = 100. Alguém poderia pensar: “Que bom que este tipo de coisa não acontece no SNPD”. Será?

Na verdade, isto também ocorre no SNPD, contudo o número de parcelas necessárias para que isso ocorra no SNPD é bem maior do que no binário. Algo deste tipo pode ocorrer no sistema binário quando temos apenas 3 parcelas (basta que em uma coluna apareça apenas o algarismo 1 e haja também, nessa coluna, um excedente), enquanto que para isso ocorrer no SNPD são necessárias, no mínimo, 11 parcelas (seria, por exemplo, o caso de todos os números possuírem o algarismo 9 na casa das dezenas e haver um excedente advindo da soma efetuada nas unidades, pois 11 x 9 + 1 = 100).

Quando falamos das aplicações dos sistemas de numeração posicionais no Capítulo 2, comentamos o exemplo do sistema sexagesimal, aplicado à contagem do tempo. Vejamos agora uma soma efetuada utilizando esse sistema:

1	1	
h	min	s
2	43	56
+ 1	19	35
4	03	31

Temos, neste caso, mais um exemplo de uma soma feita procedendo de acordo com os algoritmos estudados aqui, só que utilizando a lógica do sistema sexagesimal[17]. Aqui as horas fazem o papel das centenas, os minutos o das dezenas e os segundos o das unidades. Sempre que as somas excedem 60 cria-se um excedente, o qual será somado na coluna imediatamente à esquerda. Os cálculos acima só não são puramente sexagesimais porque estamos utilizando o SNPD para representar números menores que 60 e para efetuarmos cálculos com eles. Poderíamos, ao invés disso, ter utilizado símbolos específicos para representar cada um desses números, bem como a tabuada da adição para o sistema sexagesimal, que consta no APÊNDICE E. Se fizéssemos isso, utilizando a mesma convenção de símbolos que usamos no APÊNDICE E, a conta acima teria o seguinte aspecto:

1	1	
h	min	s
2	i	w
+ 1	J	a
4	3	W

Um instrumento especialmente útil para ensinar as crianças e, mesmo os adultos, os algoritmos da adição e da subtração são o ábaco, cujo uso, pensamos, deveria ser obrigatório no ensino de Matemática na Educação Infantil.

O ábaco é uma calculadora primitiva muito útil para efetuar operações aritméticas, especialmente adições e subtrações. Existem diversos tipos de ábaco, o que está representado na Ilustração 25, por exemplo, é conhecido como ábaco de pinos e é constituído por uma base, em geral de madeira, na qual se encaixam certa quantidade de pinos, nos quais são colocados discos perfurados.

Ilustração 25

Imagem de ábaco de pinos retirada do blog Crianças e Números.
Disponível em: <http://criancasenumeros.blogspot.com/2012/11/o-abaco-tipos-surgimento-e-utilidade.html>.
Acesso em: 7 fev. 2013.

[17] É verdade que nosso sistema de contagem do tempo não é puramente sexagesimal, afinal, um dia não possui 60 horas e subdividimos os segundos em décimos, centésimos ou mesmo milésimos e não em sessentésimos. Porém, nos limitando as conversões de minutos para horas e de segundos para minutos a ideia se aplica.

Para fazermos contas com o ábaco de pinos no sistema decimal, seguimos a regra que diz que em cada pino pode haver, no máximo, 9 discos. Se quiséssemos efetuar, por exemplo, a adição 25,9 + 60,45, utilizando um ábaco como o da Ilustração 25, primeiro “escreveríamos” o número 25,9 no ábaco, como mostra a Ilustração 26.

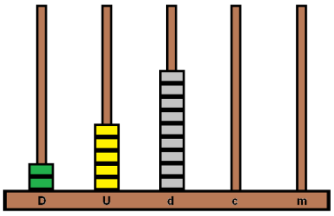


Ilustração 26
Representação do numeral 25,9 no ábaco de pinos.

Vamos imaginar que o ábaco de que dispomos possui exatamente dez discos para cada pino, sendo que as cores dos dicos estão associadas às dezenas, às unidades, aos décimos, aos centésimos e aos milésimos pelas cores verde, amarela, cinza, vermelha e azul, respectivamente. Assim, por exemplo, dez discos cinzas equivalem a um amarelo.

A seguir começaríamos a acrescentar nos pinos correspondentes, da direita para a esquerda, a quantidade de discos determinada pelos algarismos do número 60,45.

Assim, no pino correspondente aos centésimos, acrescentaríamos 5 discos vermelhos, conforme consta na Ilustração 27.

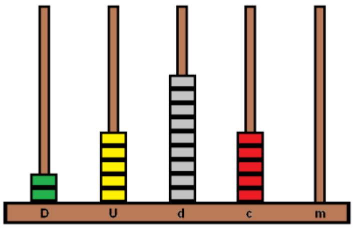


Ilustração 27
Acréscimo de 5 discos ao ábaco de pinos da Ilustração 26.

Depois, seria preciso acrescentar 4 discos cinzas no pino dos décimos. Contudo, como já usamos nove dicos dessa cor para escrever o número 25,9, só nos resta um disco cinza. Assim, acrescentamos no pino dos décimos o disco de que dispomos. Isso é mostrado na Ilustração 28.

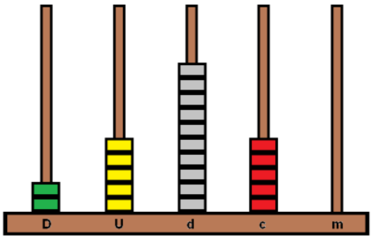


Ilustração 28
Pino dos décimos com 10 discos.

Temos agora um pino com dez discos cinzas, o que não é permitido e ainda devemos colocar nele mais 3 discos dessa cor. Para resolver esse problema devemos retirar os dez discos cinzas do pino e substituí-los por um da cor amarela, que a eles equivale. O disco amarelo será então colocado no pino imediatamente à esquerda, o das unidades, no qual ficam os discos amarelos. Observe a Ilustração 29:

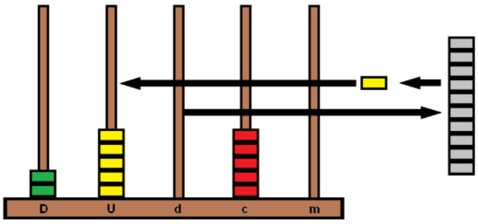


Ilustração 29
Substituição de dez décimos (discos cinzas) por uma unidade (disco amarelo).

Como dispomos agora de dez discos cinzas, podemos tomar os 3 de que necessitamos para colocá-los no pino dos décimos, que até então estava vazio. Veja a Ilustração 30:

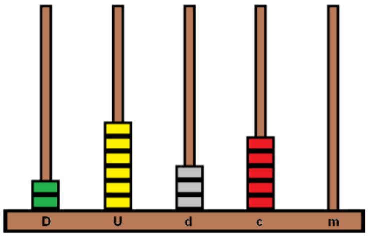


Ilustração 30
Acréscimo de 3 discos no pino dos décimos.

Como não há mais discos amarelos para serem acrescentados no pino das unidades, já que o algarismo das unidades do número 60,45 é zero, basta agora acrescentarmos 6 discos verdes no pino das dezenas. Assim, a aparência final do ábaco será aquela dada pela Ilustração 31:

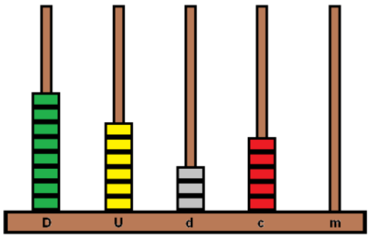


Ilustração 31
Representação do resultado 86,35 no ábaco de pinos após o acréscimo de 6 discos no pino das dezenas.

Esta configuração final deixa claro que o resultado da soma é dado pelo número 86,35. Assim, o ábaco permite ao aluno visualizar concretamente a conta que, feita no papel, fica com a aparência abaixo.

$$
\begin{array}{r|c|c|c}
 & 1 & & \\
\text{D} & \text{U} & \text{d} & \text{c} \\
2 & 5 & ,9 & \\
+6 & 0 & ,4 & 5 \\
\hline
8 & 6 & ,3 & 5
\end{array}
$$

Daí a importância do uso desse instrumento, principalmente pela necessidade de que as crianças e muitos adultos também têm de dar um significado concreto às ideias abstratas. Por isso mesmo, quando se trabalha com números que possuem vírgula, comparações com o dinheiro são sempre bem vindas, já que aproximam um assunto abstrato de suas aplicações no cotidiano. Um aluno que não sabe que 25,9 + 60,45 = 86,35, pode muito bem saber que se possui no bolso R$ 25,90 e recebe um pagamento no valor de R$ 60,45, contará agora com R$ 86,35, e esse conhecimento não pode ser ignorado pelo professor, muito pelo contrário, deve ser aproveitado para orientar o aluno no sentido de conduzi-lo no caminho da aprendizagem das ideias mais abstratas.

O algoritmo da adição é o mesmo para qualquer sistema posicional, depois de feitas pequenas adaptações. Assim também o ábaco, que funciona como um modelo concreto para este algoritmo pode, após pequenas adaptações, ser utilizado para efetuarmos contas em outras bases. Um bom exemplo disso é o ábaco Chinês, conhecido como “suan pan”, que se adequa perfeitamente ao sistema hexadecimal, guardando alguma relação com o sistema de pesos e medidas dessa civilização, no qual 1 kan equivale a 16 leung.

Ilustração 32
Imagem de suan pan retirada do blog KitOTABLA.
Disponível em: <http://kitotabla.blogspot.com/2012/11/abaco-china-suan-pan.html>.
Acesso em: 7 fev. 2013.

A Ilustração 32 mostra um exemplar deste tipo de ábaco. Nele, as hastes que contém os discos são divididas em duas partes, uma contendo dois discos e outra contendo cinco. Os dois discos isolados valem 5 unidades cada e os outros cinco uma unidade cada. Assim, em cada haste é possível representar os 15 algarismos do sistema hexadecimal. Por exemplo, na Ilustração 33, se considerarmos a primeira haste à direita como sendo a das unidades e que cada haste à sua esquerda representa as ordens seguintes do sistema hexadecimal, então o numeral representado nessa figura é expresso por $30.250.006.0C5_{16}$ = 3.308.467.019.973.

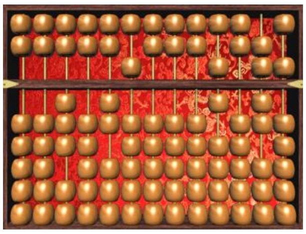


Ilustração 33
Imagem de suan pan retirada do site iOS – Peter Olafson.
Disponível em: <http://www.peterolafsoneditor.com/iphoneipadapps.htm>.
Acesso em: 07 fev. 2013.

Do “suan pan” deriva o ábaco japonês, conhecido como “soroban”, o qual perdeu dois discos de cada haste, um valendo 5 unidades e outro valendo duas unidades, sendo, portanto, perfeitamente adaptado ao SNPD, já que nele o maior algarismo que pode ser representado em uma haste é o 9. A Ilustração 34 apresenta um modelo de soroban.

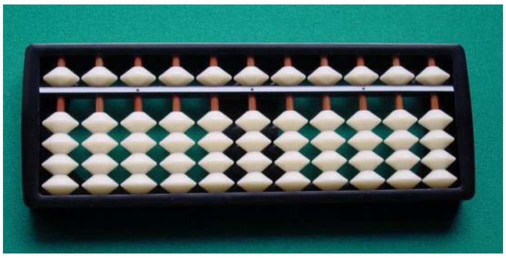


Ilustração 34
Soroban
Imagem de soroban retirada do blog Centro de Estudos Aprender.
Disponível em: <http://aprendercentrodeestudos.blogspot.com/2012/04/voce-conhece-o-soroban.html>.
Acesso em: 07 fev. 2013.

Aqui finalizamos nossas considerações sobre a operação de adição, que é a mais básica e fundamental das quatro operações de que trataremos neste apêndice. Passaremos agora a tratar de sua operação inversa, a subtração.

SUBTRAÇÃO

Se a adição corresponde às atitudes de congregar, agrupar, reunir objetos, a subtração, que é sua operação inversa, corresponde a atitude de retirar elementos de um conjunto. Enquanto na adição temos as parcelas resultando em uma soma, sem que a ordem das parcelas influa no resultado, o que é conhecido como propriedade comutativa da adição, na subtração há três elementos distintos: o *minuendo*, o *subtraendo* e a *diferença*, também chamada de *resto*.

O minuendo é o número que sofre a subtração, isto é, é dele que será "retirada uma parte".

O subtraendo corresponde à quantidade que será "retirada" do minuendo.

A diferença ou resto é o resultado da operação de subtração, ou seja, é o que "sobra" do minuendo.

Na subtração a seguir o número 7945 é o minuendo, o número 613 é o subtraendo e o número 7332 é a diferença ou resto.

M	C	D	U
7	9	4	5
–	6	1	3
7	3	3	2

Esse primeiro exemplo, contudo, não oferece qualquer desafio para alguém que já domine a tabuada da subtração. É claro que, assim como na adição, algarismos de mesma ordem devem estar alinhados, pois se o significado concreto da subtração é retirar elementos de um conjunto, digamos de bananas, aquilo que está sendo retirado evidentemente serão bananas, bem como aquilo que sobrará. Logo não há muito o que dizer até aqui sem ser prolixo, já que a lógica na armação da conta, inclusive no caso de números que possuem vírgula, é a mesma que a utilizada para a adição.

Vejamos um exemplo no qual um novo procedimento precisa ser desenvolvido e justificado. Este é o caso quando no minuendo e no subtraendo há algarismos de mesma ordem tais que o algarismo do minuendo tem valor menor que o do subtraendo. Digamos que desejássemos calcular a diferença entre os números 571,9 e 76,13. Já sabemos que devemos posicionar vírgula embaixo de vírgula, mas e depois?

C	D	U	d	c
5	7	1,	9	
–	7	6,	1	3
?	?	?	?	?

O primeiro passo é, certamente acrescentar um 0 aos centésimos do minuendo, já que não há ali nenhum algarismo. Mas isso não resolve o maior dos problemas: Como retirar 3 centésimos de onde não há nenhum? Ou 6 unidades de uma apenas?

A ideia aqui consiste em realizar um “empréstimo”[18]. Ora, não podemos, de fato, retirar 3 centésimos do minuendo, como exige o subtraendo, pois não há ali nenhum, contudo, sabemos que 1 décimo corresponde a 10 centésimos, mais do que aquilo de que necessitamos, e o minuendo dispõe, nesse caso, de 9 décimos. Convertendo 1 dos 9 décimos em 10 centésimos, podemos calcular a diferença

10 centésimos – 3 centésimos = 7 centésimos.

Note que agora o minuendo passa a dispor de apenas 8 décimos. Esse procedimento está ilustrado a seguir:

			8	10
C	D	U	d	c
5	7	1,	9	0
–	7	6,	1	3
?	?	?,	?	7

[18] Sem direito a devolução! Melhor seria fazer uma doação.

Na prática, os fatos de que os 9 décimos foram reduzidos para apenas 8 e de que os centésimos, até então inexistentes, passaram a ser em número de 10, não são registrados no papel, mas guardados na memória durante a efetuação dos cálculos.

Há professores que ensinam este procedimento dizendo que o 9 "empresta um" para o 0, que assim passa a ser 10. Ensinado deste modo, sem maiores explicações algumas dúvidas podem "martelar" na cabeça do aluno. Para mostrar essa situação, vamos imaginar um diálogo entre um aluno cheio de dúvidas e um professor despreparado para enfrentar essa situação.

ALUNO:

– Tudo bem, emprestei 1 e o 9 virou 8, legal 9 – 1 = 8. Mas como foi que o 0 virou 10? Afinal, 0 + 1 não é igual a 1?

PROFESSOR:

– É só colocar o 1 à esquerda do 0, aí vira 10.

Talvez essa resposta até não atrapalhe na aprendizagem puramente mecânica do algoritmo, mas certamente não é nada esclarecedora para o aluno e profundamente danosa para o desenvolvimento do raciocínio. O problema é que não se discute o que está sendo "emprestado", neste caso um décimo, nem sua conversão, nesta situação, em 10 centésimos.

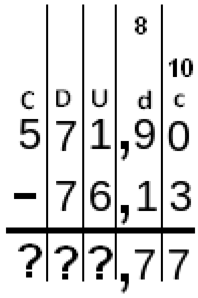
Mesmo que o professor dê todos os esclarecimentos que estamos dando aqui, é preciso convir que, para aqueles que têm dificuldades para abstração, um recurso didático faz falta. Note que o 8 e o 10 não são grafados, e tudo o que o aluno vê é isso.

$$\begin{array}{r} 571{,}90 \\ -\ 76{,}13 \\ \hline 7 \end{array}$$

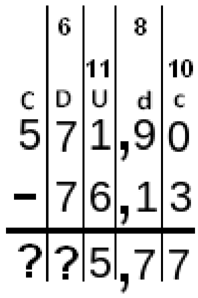
Não parece nada óbvio, para quem está aprendendo, de onde veio o 7, mesmo depois de ter sido esclarecido pelo professor (a aprendizagem costuma ser um processo lento). E o próximo passo, pode ser pior ainda, pois vamos aparentemente fazer $9 - 1 = 7$, já que a conta que realmente será feita, $8 - 1 = 7$, não está escrita no papel, mas deve estar gravada na memória do aluno. É por situações como estas que acreditamos que o ábaco deveria ser um instrumento obrigatório no ensino de Matemática nas séries iniciais, por possibilitar uma interpretação concreta para este procedimento extremamente abstrato para o aluno. Mais adiante veremos como esta mesma conta pode ser trabalhada com o auxílio do ábaco.

Assim como frequentemente ocorre na sala de aula, fizemos uma interrupção no meio de um raciocínio em andamento para elucidar uma questão da maior importância. Contudo, agora é preciso retomar o raciocínio do ponto em que paramos.

Precisávamos retirar 3 centésimos de nenhum, portanto, 1 décimo dos 9 de que dispúnhamos foi convertido em 10 centésimos, de tal modo que agora retiraremos 3 centésimos dos 10 de que agora dispomos, restando assim 7 centésimos. Como 1 décimo deve ainda ser retirado dos 8 que nos sobraram depois do “empréstimo”, restarão somente 7 décimos na diferença. O resultado está ilustrado a seguir:



Deparamo-nos novamente com a situação de ter que retirar uma quantidade maior de outra menor. Contudo, agora, já sabemos como lidar com ela. Não sendo possível retirar 6 unidades de apenas uma, tomamos uma das 7 dezenas de que dispomos e convertemo-la em 10 unidades, que com uma de que já dispomos totalizarão 11 unidades, das quais podemos retirar 6 unidades, como manda o subtraendo. Restarão, portanto, 5 unidades na diferença e 6 dezenas no minuendo.



O próximo passo seria fazer

6 dezenas – 7 dezenas,

porém, vendo a conta, mostrada abaixo sob a perspectiva do aluno que está aprendendo, perceba como é difícil resistir à tentação de fazer o cálculo incorreto, que não exige nenhum “empréstimo”,

7 dezenas – 7 dezenas = 0 dezena.

$$\begin{array}{r} 5\,7\,1{,}9\,0 \\ -\ 7\,6{,}1\,3 \\ \hline 5{,}7\,7 \end{array}$$

Digamos que nosso aluno tenha resistido à tamanha tentação. Deverá ainda resistir a outra, que é a de “colocar o 1 à esquerda do 7 e formar 17”.

Vamos ao que deve realmente ser feito. Lembrando que uma das 7 dezenas de que dispõe o minuendo foi cedida para a formação de 10 unidades, sabemos que restam apenas 6 dezenas no minuendo. Convertendo uma das 5 centenas do minuendo em 10 dezenas ficamos com:

10 dezenas + 6 dezenas = 16 dezenas

das quais vamos, de acordo com o subtraendo, retirar 7 dezenas, obtendo:

16 dezenas – 7 dezenas = 9 dezenas.

Como, depois do “empréstimo” de uma centena do minuendo restaram apenas 4 centenas, nossa conta termina com o resultado 495,77.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 4 & 6 & & 8 & \\ & 16 & 11 & & 10 \\ C & D & U & d & c \\ 5 & 7 & 1, & 9 & 0 \\ - & 7 & 6, & 1 & 3 \\ \hline 4 & 9 & 5, & 7 & 7 \end{array}$$

Observe que não seria nada prático realizar todo este processo da esquerda para a direita, pois os resultados, depois de obtidos, teriam de ser apagados para serem substituídos por outros toda vez que um “empréstimo” fosse necessário.

Vejamos agora como esta conta seria efetuada de maneira concreta com o uso do ábaco. Vamos imaginar um ábaco bem parecido com aquele que utilizamos para trabalhar com a adição. Assim como o anterior, possui cinco pinos, só que desta vez o primeiro pino a partir da esquerda é o das centenas e não o das dezenas e o último é o dos centésimos e não o dos milésimos. As cores que utilizamos para os discos permanecem válidas, exceto pelo fato de que a cor azul agora está associada às centenas e não aos milésimos. Deste modo:

AZUL	➔	CENTENA
VERDE	➔	DEZENA
AMARELO	➔	UNIDADE

CINZA ➔ DÉCIMO

VERMELHO ➔ CENTÉSIMO

Além disso, vamos supor que cada pino possui 19 discos.

Utilizando estas convenções, vamos primeiro representar o minuendo no ábaco da forma como está mostrado na Ilustração 35.

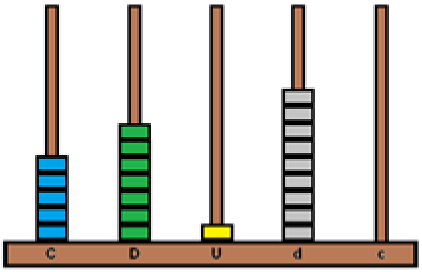


Ilustração 35
Representação do numeral 571,9 no ábaco de pinos.

Como o subtraendo é 76,13, devemos retirar 7 discos verdes, 6 amarelas, 1 cinza e 3 vermelhas, só que a partir do pino dos centésimos, o qual está vazio. Já sabemos, entretanto, que a ideia aqui é converter um disco cinza em 10 vermelhos, como está indicado na Ilustração 36, obtendo a configuração dada pela Ilustração 37.

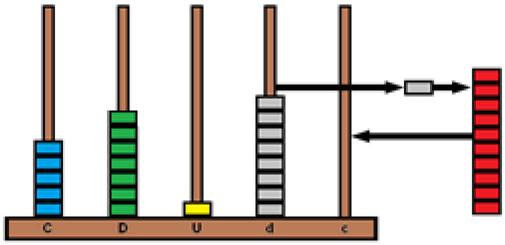


Ilustração 36
Substituição de um décimo por 10 centésimos.

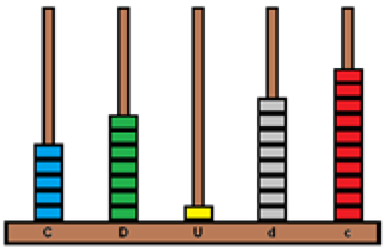


Ilustração 37
Disposição dos discos após a substituição da Ilustração 36.

Agora, como há 10 discos vermelhos podemos retirar 3 deles conforme exige o subtraendo. A disposição do ábaco será a da Ilustração 38.

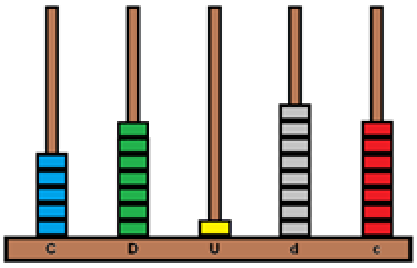


Ilustração 38
Retirada de 3 discos do pino dos centésimos.

O próximo passo é retirar 1 décimo por exigência do subtraendo. Note que há exatamente 8 discos cinzas, fato que, no papel não aparece e deve ser guardado na memória. Daí mais uma vez a importância da utilização do ábaco. Na Ilustração 39 a subtração de um décimo está feita:

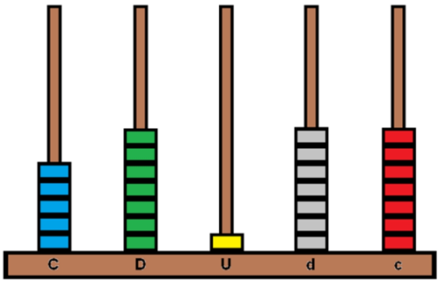


Ilustração 39
Retirada de um disco do pino dos décimos.

Agora deveríamos retirar 6 discos amarelos do pino das unidades. Isto, contudo, não é possível, pois há nesse pino apenas um disco. Assim, nova conversão será feita, de tal modo que um disco verde do pino das dezenas será trocado por 10 amarelos que serão postos no pino das unidades que já possui um disco e contará agora com 11, como mostra a Ilustração 40:

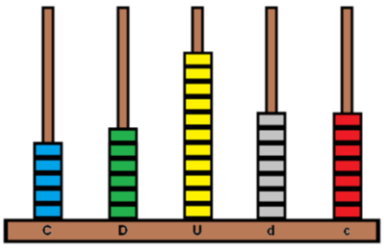


Ilustração 40
Substituição de uma dezena por dez unidades,
resultando em 11 discos no pino das unidades.

A seguir basta retirar do pino das unidades os 6 discos amarelos. O arranjo do ábaco após essa operação é dado pela Ilustração 41:

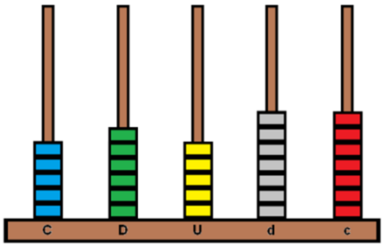


Ilustração 41
Retirada de 6 discos do pino das unidades.

Se o ábaco possuísse apenas 10 discos, como frequentemente ocorre, bastaria fazer a conta 10 – 6 = 4 mentalmente e depois colocar 4 discos amarelos no pino das unidades. Por isso, 19 discos são necessários para efetuar a subtração de modo completamente concreto no ábaco de pinos.

Agora devemos retirar 7 discos verdes do pino das dezenas. Note que, no ábaco, ao contrário do que ocorre com o cálculo escrito, é impossível não enxergar a impossibilidade de fazê-lo, visto que há, no pino das dezenas apenas 6 discos verdes. Logo, somos obrigados a tomar um disco azul do pino das centenas e convertê-lo em dez discos verdes que, quando colocados no pino das dezenas totalizarão 16 discos, como mostra a Ilustração 42:

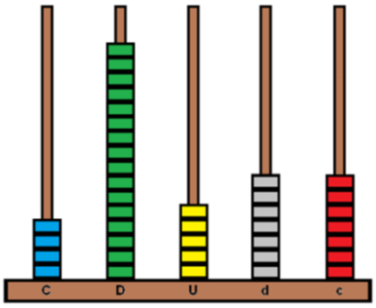


Ilustração 42
Substituição de uma centena por 10 dezenas
resultando em 16 discos no pino das dezenas.

Finalmente a conta com o ábaco é concluída retirando os 7 discos verdes do pino das dezenas, o que deixará o ábaco com a aparência da Ilustração 43. Nele, teremos representado o número 495,77, que é justamente o resultado da subtração.

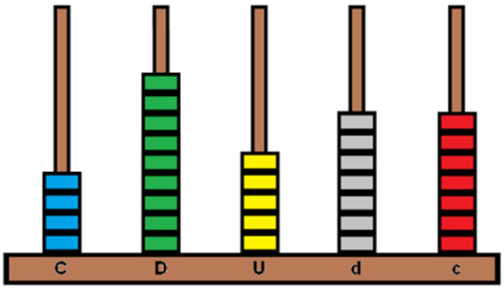


Ilustração 43
Numeral 495,77, obtido como resultado final da subtração após a retirada de 7 discos do pino das dezenas.

Há ainda outro exemplo de subtração que causa dúvida em muitos alunos. Trata-se de subtrações nas quais os algarismos de uma determinada ordem são tais que o algarismo do minuendo tem valor menor que o do subtraendo e o algarismo do minuendo de ordem imediatamente maior é 0. Um bom exemplo é a subtração 102 – 5. Note que o problema aí reside no fato de que precisamos efetuar um “empréstimo”, mas não há nenhum “vizinho” que possa nos ajudar. O problema é resolvido “emprestando de alguém que mora mais longe”.

Dessa vez, resolveremos o problema primeiro no ábaco, que imaginaremos idêntico ao que usamos antes, só que sem os pinos dos décimos e dos centésimos. A Ilustração 44 mostra um ábaco desse tipo no qual está representado o número 102.

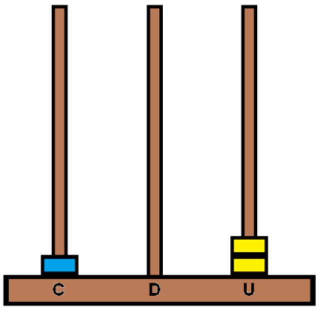


Ilustração 44
Representação do numeral 102 no ábaco.

Como queremos subtrair 5 unidades, precisaremos converter um disco verde em 10 amarelos. Mas, como pode ser observado na Ilustração 44, não há discos verdes. Precisamos então fazer com que hajam, e a melhor forma de fazê-lo é tomando um disco azul do pino das centenas e convertendo-o em 10 discos verdes, dos quais 9 serão colocados no pino das dezenas e um será convertido em dez discos amarelos que, junto com os dois discos dessa cor de que já dispomos, somarão 12 discos no pino das unidades. Na Ilustração 45 vemos o processo que acabamos de descrever e seu resultado final.

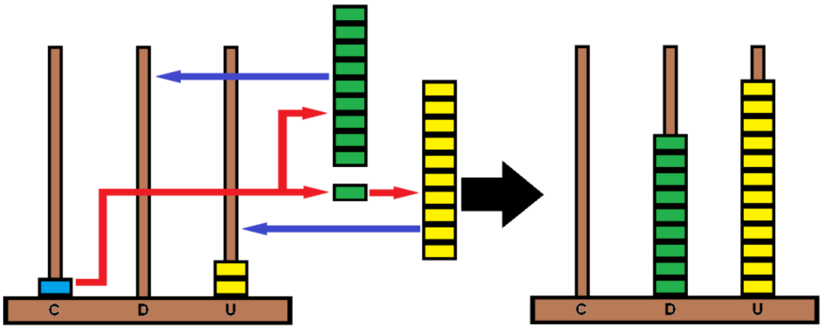


Ilustração 45
Realização da operação 102 – 5 no ábaco de pinos.

Agora basta retirarmos 5 discos amarelos do pino das unidades para chegarmos ao resultado final, que é o número 97, representado no ábaco pela Ilustração 46:

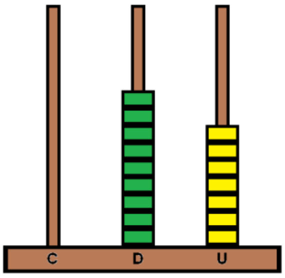
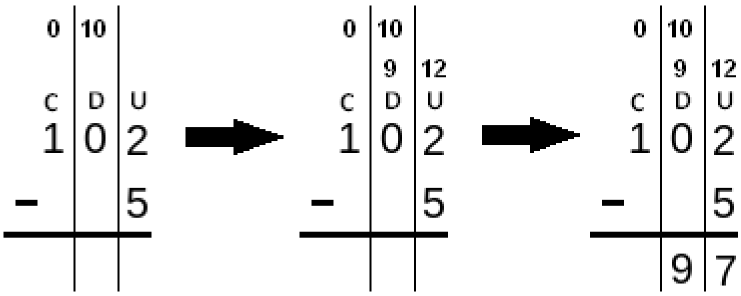


Ilustração 46
Representação do numeral 97 como resultado da operação 102 – 5.

No papel, essa conta se faz ilustrado na sequência a seguir:



Não sendo possível subtrair 5 unidades de 2 e não havendo dezenas no minuendo para transformar em unidades, uma centena é convertida em 10 dezenas, de modo que não restará mais nenhuma centena. A seguir, uma das 10 dezenas de que passamos a dispor é convertida em 10 unidades de modo que sobram apenas 9 dezenas e passamos a dispor de 12 unidades, pois já tínhamos 2. Finalmente, restam as 9 dezenas e 7 das 12 unidades após subtrairmos 5 delas, ou seja, o resto é 97.

Todos os procedimentos vistos aqui para a subtração aplicam-se a qualquer sistema de numeração posicional, desde que respeitado o fato de que as conversões de uma ordem para a outra devem ser feitas utilizando a base do sistema de numeração que está sendo utilizado e que as contas sejam feitas utilizando as tabuadas desses sistemas. Aliás, isto se aplica a todas as quatro operações.

Embora tenhamos nos detido apenas ao conjunto dos números naturais em nossas explicações, já que estamos falando de subtração, não nos custa nada fazer algumas observações sobre números inteiros negativos e o jogo de sinal da adição.

Os números negativos surgem como uma resposta a questões do tipo “quanto vale 2 menos 3?”, em que o minuendo é menor que o subtraendo.

Para reger o funcionamento da operação de adição com números inteiros[19] estabelece-se então o jogo de sinal.

O que muitos professores talvez não deixem claro para seus alunos é que existem dois jogos de sinal, um para a adição e outro para a multiplicação, os quais seguem lógicas diferentes, para as quais é preciso dar um significado concreto, a fim de que o aluno possa melhor internalizá-las.

Assim, depois que os alunos já tiverem aprendido as regras do jogo de sinal, tanto para a adição quanto para a multiplicação, o professor deve orientá-los no sentido de identificar primeiro que operação ele pretende efetuar para, só então, utilizar o jogo de sinal adequado. Talvez, uma das causas da dificuldade dos alunos para perceberem que jogo de sinal devem utilizar tenha sua origem no fato de que os jogos de sinal da adição e da multiplicação são trabalhados separadamente (como realmente devem ser) e depois não são suficientemente exercitados conjuntamente, a fim de que o aluno adquira a habilidade de perceber qual o jogo de sinal adequado à operação que está realizando. Outra possível causa seria, como já dissemos, a falta de significado concreto dado a estas regras.

As questões levantadas aqui sobre a aprendizagem do jogo de sinal são dignas de estudo, devendo ser pesquisadas pelo professor em sala de aula. De minha parte, não passam de conjecturas baseadas em minha prática docente na educação básica e em reflexões a respeito do assunto, averiguar a validade de tais considerações é um desafio que lanço aos colegas de profissão. É claro que outros fatores, como o socioeconômico, só para citar um exemplo, também contribuem para essa dificuldade de aprendizagem, qualquer pesquisa séria na área da educação não pode

[19] Ao trabalhar com números inteiros deixamos de pensar em termos de subtração. A única operação aqui é a adição e a subtração passa a ser entendida como a adição com o simétrico, daí falarmos em jogo de sinal da adição e não da subtração.

desconsiderar a influência de tais fatores sobre seus resultados. Porém, cabe ao professor, empenhar-se para modificar em favor do processo de ensino-aprendizagem os fatores que estão ao seu alcance.

O professor pode estar se perguntando sobre o que queremos dizer com “dar significado concreto ao jogo de sinal”. Uma abordagem dentro do ensino de Matemática para trabalhar diversos conteúdos é a utilização de jogos. Referindo-se aos alunos, Rosane Avello, em sua dissertação de mestrado defendida em 2006, Jogos como Estratégia para Facilitar o Ensino-Aprendizagem de Operações com Números Inteiros, afirma “Aqueles que conheciam as regras de sinais diziam estar entendendo o porquê desta regra, demonstrando a satisfação em relação à maneira como estavam aprendendo.”. Sendo assim, esta é uma abordagem que recomendamos fortemente. Contudo, independentemente do uso de jogos em sala de aula, o jogo de sinal pode ser relacionado a questões financeiras, temperatura, velocidade etc. A ideia de associar valores negativos à dívida e positivos a saldo é muito boa, já que lidar com dinheiro é algo bastante próximo da realidade das pessoas.

Logo, ao invés de nos limitarmos a dizer para nossos alunos que $2 - 3 = -1$ simplesmente porque a regra diz que, quando os sinais são diferentes, devemos conservar o sinal do número que tem maior módulo e calcular a diferença entre o número de maior módulo e o de menor módulo, podemos motivá-los através de uma situação concreta dizendo que $2 - 3 = -1$ porque se tenho R$ 2,00 e devo R$ 3,00, só posso pagar parte da dívida, e fico devendo ainda R$ 1,00.

O mesmo pode ser feito se quero explicar porque $-2 - 3 = -5$, já que se devo R$ 2,00 para alguém e contraio outra dívida de R$ 3,00, então minha nova dívida é a soma das duas dívidas, ou seja, devo um total de R$ 5,00.

Esse tipo de abordagem não é difícil de fazer e certamente é mais eficaz que enunciar secamente que, na adição de dois números que possuem o mesmo sinal, este sinal é conservado e seus valores absolutos são somados.

Com estas recomendações aos colegas professores encerramos nossas considerações a respeito da subtração, passando agora para a próxima operação, a multiplicação.

MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação nos permite escrever de maneira abreviada uma soma em que há diversas parcelas de mesmo valor. Todos temos de convir que escrever 8 x 9 e memorizar que o resultado é 72 é bem menos laborioso do que escrever 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 18 + 18 + 18 + 18 = 36 + 36 = 72.

Na multiplicação, o resultado da operação recebe o nome de *produto* e os números com os quais estamos operando são chamados de *fatores*.

É muito importante que o aluno saiba que, na multiplicação, um dos fatores representa a quantidade de parcelas de uma soma em que todas as parcelas são iguais ao outro fator. Isso é atribuir significado à operação de multiplicação a partir da operação de adição, cujo significado concreto já deve ter sido trabalhado com o aluno.

Uma vez que o aluno tenha atribuído significado à operação de multiplicação, o algoritmo utilizado para efetuar esta operação pode ser ensinado. Porém, tal algoritmo precisa ser justificado.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \color{red}{2} & \color{red}{3} & \\
 & & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \\
 & & 1, & 4 & 5 \\
 & \times & 6 & 3, & 1 \\
\hline
 & & 1 & 4 & 5 \\
 & 4 & 3 & 5 & \\
8 & 7 & 0 & & + \\
\hline
9 & 1, & 4 & 9 & 5
\end{array}
$$

Observando os cálculos registrados acima, cujos números em vermelho nem sempre são expressos no papel, mas geralmente guardados na memória, algumas dúvidas podem surgir. Ao efetuar a multiplicação do fator de cima por cada um dos algarismos do outro fator, por que os resultados não ficam alinhados à direita como ocorria na adição? Por que esses resultados são somados? Por que os números em vermelho devem ser somados? Que critério foi utilizado para posicionar a vírgula no produto final? Por que esse critério foi adotado?

O cálculo anterior, que envolve a multiplicação de dois números com vários algarismos e em que a vírgula está presente será trabalhado mais adiante. Para compreendê-lo vamos estudar primeiro outros casos mais simples.

O primeiro caso que estudaremos diz respeito à multiplicação de dois números tais que um deles possui apenas um algarismo, como ocorre com o exemplo dado a seguir.

$$\begin{array}{rrr} {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & \\ 1 & 4 & 5 \\ & \times & 6 \\ \hline 8 & 7 & 0 \end{array}$$

O que fazemos aqui é efetuar as seguintes multiplicações:

6 x 5 unidades = 30 unidades = 3 dezenas + 0 unidade

6 x 4 dezenas = 24 dezenas = 20 dezenas + 4 dezenas = 2 centenas + 4 dezenas

6 x 1 centena = 6 centenas

portanto, o resultado da multiplicação é:

3 dezenas + 0 unidade + 2 centenas + 4 dezenas + 6 centenas

como podemos somar apenas entes de mesma natureza temos:

(2 centenas + 6 centenas) + (4 dezenas + 3 dezenas) + 0 unidade =

= 8 centenas + 7 dezenas + 0 unidade =

= 800 unidades + 70 unidades + 0 unidade = 870 unidades

Observe que escrevermos, por exemplo:

6 x 4 dezenas

e não:

6 unidades x 4 dezenas

como fazíamos com a adição, isto porque o número 6 aqui não é encarado como um objeto concreto, como ocorria com as parcelas da adição. O número 6 indica, na multiplicação, simplesmente o número de parcelas iguais a 4 dezenas que devem ser somadas.

Vejamos agora como fica esta mesma conta quando indicamos as colunas correspondentes às unidades, às dezenas e às centenas.

$$\begin{array}{r|r|r} {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & \\ {\scriptstyle C} & {\scriptstyle D} & {\scriptstyle U} \\ 1 & 4 & 5 \\ & \times & 6 \\ \hline 8 & 7 & 0 \end{array}$$

Logo, a maneira como dispomos os numerais para fazer os cálculos é uma forma prática de, depois de efetuar as multiplicações, posicionar os algarismos de modo que aqueles que são de uma mesma ordem fiquem sempre alinhados.

Entretanto, nas explicações que acabamos de dar, utilizamos tacitamente uma propriedade dos números reais, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, pois quando explicamos o algoritmo para efetuar a multiplicação 6 x 145, utilizamos o fato de que:

6 x (100 + 40 + 5) = 6 x 100 + 6 x 40 + 6 x 5.

A propriedade distributiva nos garante que, dados três números reais a, b e c, a igualdade $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ é verdadeira. Na verdade, para o conjunto dos números reais, não se trata de uma propriedade, mas de um axioma.

Não vamos aqui dar uma demonstração matematicamente rigorosa desta propriedade para os números naturais. Contudo, mostraremos seu funcionamento a partir de um exemplo com números naturais.

Pela definição que demos para multiplicação

3 x (5 + 2) = (5 + 2) + (5 + 2) + (5 + 2)

utilizando as propriedades comutativa e associativa da adição que, embora não tenham sido trabalhadas por nós, cremos serem mais intuitivas e certamente do conhecimento de qualquer professor de Matemática, reorganizar o segundo membro da equação acima para obtermos:

3 x (5 + 2) = (5 + 5 + 5) + (2 + 2 + 2)

finalmente, utilizando novamente a definição dada para a operação de multiplicação, concluímos que

3 x (5 + 2) = 3 x 5 + 3 x 2.

Esta não é certamente a melhor maneira de apresentar uma demonstração da validade da propriedade distributiva no conjunto dos naturais num seminário cheio de matemáticos profissionais, mas com toda certeza é melhor do que simplesmente postular a validade dessa propriedade para alunos do ensino básico. Quando criamos o hábito de justificar aquilo que apresentamos para nossos alunos, criamos também neles o hábito de se questionarem sobre o funcionamento das coisas ao invés de simplesmente as aceitarem como lhes são apresentadas.

É claro que fazer:

3 x (5 + 2) = 3 x 7 = 21

e

3 x 5 + 3 x 2 = 15 + 6 = 21

Portanto:

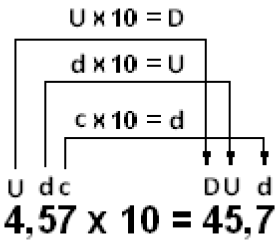
3 x (5 + 2) = 3 x 5 + 3 x 2,

é uma alternativa viável para mostrar a validade dessa propriedade, já que estamos apenas apresentando um caso particular. Contudo, a forma utilizada antes aplica um raciocínio que é mais fácil de generalizar, embora uma demonstração absolutamente rigorosa dessa propriedade para os naturais deva utilizar o método de indução matemática.

Vamos agora analisar o que acontece quando multiplicamos um número por potências da base do sistema de numeração.

Cedo aprendemos que para multiplicar um número como 457 por 1000 basta acrescentar três zeros após o 7, obtendo 457.000 como resposta, e que para multiplicar 4,57 por 1000 basta “andar” com a vírgula três “casas” para a direita, completando o numeral com um zero, já que há apenas duas “casas” para “andar”, chegando ao resultado 4.570. Na verdade, a regra geral diz que, no caso da multiplicação de naturais por 10^p, devemos acrescentar, ao final do numeral, p zeros e, no caso de números nos quais a vírgula se fizer presente e depois dela houver $q$algarismos, devemos deslocá-la para a direita p algarismos completando o resultado com $p-q$ zeros caso p seja maior que q.

Note que, ao multiplicar um número por 10 transformamos centésimos em décimos, décimos em unidades, unidades em dezenas, dezenas em centenas etc. Ou seja, deslocamos a vírgula um algarismo para a direita, visto que o algarismo que representava os décimos no fator representa as unidades no produto.



Multiplicar um número por 100 é repetir este processo duas vezes, já que 100 = 10 x 10, ou seja, multiplicar um número por 100 equivale a deslocar a vírgula dois algarismos para a direita. Assim também, multiplicar por 1.000 é repeti-lo três vezes, por 10.000, quatro vezes, etc.

Esta regra justifica-se facilmente também para qualquer outra base b.

Um número como b^p será sempre representado, na base b, por um 1 seguido de p zeros. Assim, por exemplo, $1.000.000_b = b^6$.

Seja $n = \sum_{i=k}^{m} a_i b^i$ o número que desejamos multiplicar por b^p. Como sabemos, a ordem de um algarismo a_i é uma unidade maior do que o expoente da potência de b que o multiplica. Então, como $c = n \cdot b^p = \sum_{i=k}^{m} a_i b^{i+p}$, isso significa que a_0, que é o algarismo das unidades de n, será o algarismo de ordem p de c, ou seja, o algarismo das unidades de c, e consequentemente a vírgula, que sempre o acompanha, foi deslocado p "casas" para a direita.

Agora veremos qual o procedimento utilizado para multiplicarmos dois números naturais quaisquer e porque este procedimento funciona. Observe a conta abaixo.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 1 & 4 & 5 \\
 & \times & 6 & 3 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 4 & 5 \\
 & 4 & 3 & 5 & \\
8 & 7 & 0 & & + \\
\hline
9 & 1 & 4 & 9 & 5
\end{array}
$$

Embora não saibamos ainda como multiplicar 631 x 145, já sabemos como efetuar multiplicações por números com um único algarismo e por potências de dez. Sabemos também da existência da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição[20]. Utilizando esses conhecimentos podemos fazer:

631 x 145 = (600 + 30 + 1) x 145

631 x 145 = 600 x 145 + 30 x 145 + 1 x 145

631 x 145 = 100 x (6 x 145) + 10 x (3 x 145) + 1 x 145

reduzindo o problema de multiplicar dois números naturais quaisquer aos problemas já estudados antes. Assim, basta, por exemplo, efetuar primeiro as multiplicações:

1 x 145 = 145

3 x 145 = 435

6 x 145 = 870

que já aprendemos a fazer, pois são multiplicações por números de um único algarismo e depois efetuar a multiplicação dos resultados pelas potências de 10 adequadas:

---

[20] É preciso ter em mente que a propriedade distributiva não se aplica só à adição e à multiplicação, nem apenas aos números reais. Temos, à guisa de exemplo, quando fazemos $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, a propriedade distributiva da potenciação em relação à multiplicação. Não havendo, em nosso caso, perigo de confusão, diremos simplesmente propriedade distributiva quando quisermos nos referir à propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição.

1 x 145 = 145

10 x 435 = 4.350

100 x 870 = 87.000

somando os resultados obtidos para encontrar o produto final, que é 91.495. A primeira armação que fizemos na discussão desse exemplo é mostrada novamente a seguir, agora sem ocultar os zeros e explicitando as colunas em que estão alinhadas unidades, dezenas, centenas, milhares e dezenas de milhares.

			2	3	
			1	1	
	DM	M	C	D	U
			1	4	5
		x	6	3	1
	1		1	4	5
		4	3	5	0
+	8	7	0	0	0
	9	1	4	9	5

Outra forma de interpretar a armação que utilizamos para efetuar a multiplicação de dois números naturais é a seguinte:

145 x 631 = 145 x (6 centenas + 3 dezenas + 1 unidade)

logo, pela propriedade distributiva,

145 x 631 = 145 x 6 centenas + 145 x 3 dezenas + 145 x 1 unidade

recaindo assim no caso em que multiplicamos dois números naturais, sendo um deles de apenas um algarismo. Assim teríamos

145 x 631 = 870 centenas + 435 dezenas + 145 unidades,

o que justifica o fato de os resultados das multiplicações pelos algarismos não aparecerem alinhados à direita para a soma.

Embora essa abordagem seja mais simples e perfeitamente viável para justificar o algoritmo para os alunos, não a apresentamos primeiro por uma questão de coerência em nossas justificativas, pois segundo essa interpretação, 145, que possui mais de um algarismo, é encarado como o número de parcelas iguais a serem somadas e os números de um único algarismo, como a quantidade de objetos concretos (unidades, dezenas, centenas) que constituem as parcelas da soma, justamente o oposto do que fizemos em nossa justificativa da multiplicação por números com um único algarismo.

Poderíamos mesmo ter omitido aqui a primeira justificativa, deixando apenas a segunda, uma vez que o que estamos apresentando aqui não é um conjunto de demonstrações rigorosas baseadas no método dedutivo, mas um conjunto de justificativas que têm por objetivo fazer com que os procedimentos utilizados na realização das quatro operações ganhem um significado mais concreto para os alunos. Se deixamos ambas as demonstrações aqui é porque valorizamos a ideia de que um mesmo problema pode e deve ser abordado de diferentes maneiras pelo professor e por seus alunos, cabendo ao professor avaliar a possibilidade de fazê-lo dentro das limitações de tempo e respeitando as peculiaridades de cada turma em que leciona.

Iremos finalmente abordar o caso da multiplicação de decimais exatos, justificando o procedimento utilizado para determinar o posicionamento da vírgula no produto em função de seu posicionamento nos fatores.

$$\begin{array}{r} 1{,}4\,5 \\ \times\ 6\,3{,}1 \\ \hline 1\,4\,5 \\ 4\,3\,5 \\ 8\,7\,0 + \\ \hline 9\,1{,}4\,9\,5 \end{array}$$

Na conta registrada acima, o posicionamento da vírgula no produto é obtido da seguinte forma: verifica-se quantos algarismos aparecem após a vírgula em cada um dos fatores (2 e 1, neste caso) posicionando a vírgula no produto de modo que haja, após ela, uma quantidade de algarismos que corresponda a soma do número de algarismos dos dois fatores (2 + 1 = 3, neste caso).

Ou seja, para que o aluno seja capaz de efetuar multiplicações com decimais exatos basta que ele ignore a presença da vírgula nos fatores e proceda como se estes fossem números naturais, utilizando depois a regra exposta acima para posicionar a vírgula no resultado.

A regra acima, embora simples de ser compreendida, não é óbvia. Mesmo assim, justificá-la não é tão difícil quanto se poderia pensar. Basta que coloquemos os fatores na forma de frações ordinárias para podermos enxergar o motivo de somar o número de algarismos da parte não inteira.

$$1{,}45 \times 63{,}1 = \frac{145}{100} \cdot \frac{631}{10} = \frac{145}{10^2} \cdot \frac{631}{10^1} = \frac{91.495}{10^{2+1}} = \frac{91.495}{10^3} = \frac{91.495}{1000} = 91{,}495$$

Encerramos que o exemplo acima, que pode ser facilmente generalizado, nossas explicações sobre o algoritmo da multiplicação.

DIVISÃO

Dividir significa, concretamente, repartir em partes iguais. Seus elementos são o *dividendo* que é o número dividido, o *divisor* que é o número que divide, o *quociente* que é o resultado da divisão e o *resto* que é o que sobra do dividendo após a divisão.

A divisão pode ser inteira ou continuada. No primeiro caso, o quociente deve ser um número inteiro, no segundo, isto pode não acontecer.

Na tentativa de justificar os procedimentos utilizados no algoritmo da divisão vamos imaginar as ordens a que cada algarismo do dividendo corresponde como objetos concretos. Por exemplo, quando tentamos dividir 84 por 2, o que queremos fazer é distribuir 8 dezenas e 4 unidades em dois grupos que devem possuir a mesma quantidade de elementos, ou seja, 4 dezenas e 2 unidades cada. Assim, neste caso, dezenas e unidades eram os objetos que estávamos dividindo.

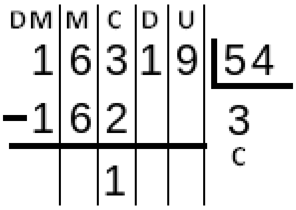
Nossas explicações serão baseadas na divisão do número 16.319 pelo número 54. Contudo, aplicam-se às divisões de uma maneira geral. Note que $54 = 2 \times 3^3$ e que 16.319 não é múltiplo nem de 3, nem de 2. Isto significa que $\frac{16319}{54}$ é uma fração irredutível cujo denominador possui um fator primo que não é divisor de 10. Logo, é certo que esta divisão vai resultar em uma dízima periódica. Abaixo mostramos o registro dos cálculos efetuados na divisão destes dois números.

```
 16319 |54
-162     302,20370...
  119
 -108
   110
  -108
    200
   -162
     380
    -378
      200
```

O número 16.319 dispõe de 1 dezena de milhar, que evidentemente não pode ser dividida por 54, logo será convertida em 10 milhares que com os 6 que este número já possui resultarão em 16 milhares, que também não podem ser divididos por 54. Assim, convertendo os 16 milhares em 160 centenas e juntando a essas centenas as 3 de que o dividendo já dispunha ficamos com

163 centenas = 54 x (3 centenas) + 1 centena,

ou seja, formamos 54 grupos iguais com 3 centenas cada e ainda nos restou uma centena. No registro dos cálculos da divisão estamos no seguinte ponto.

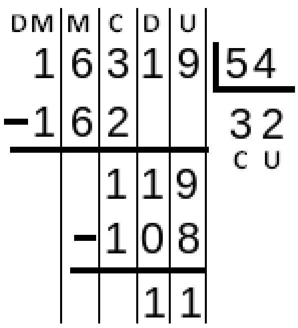


Observe que, nos cálculos efetuados, o valor 3 no quociente é encontrado por meio de um processo de tentativa e erro, no qual testamos cada um dos algarismos do sistema de numeração no qual estamos trabalhando em busca daquele que gera o maior múltiplo de 54 que não excede 163[21] (em bases menores que a 10 temos menos algarismos, portanto menos tentativas costumam ser necessárias, nas maiores dá-se o contrário). É claro que a experiência nos possibilita estimar o valor procurado, minimizando o número de tentativas.

Tomamos agora a centena restante e a convertemos em 10 dezenas, com mais uma de que dispomos são 11 dezenas. Ora, não podemos, com 11 dezenas, formar 54 grupos. Essas 11 dezenas devem ser convertidas em 110 unidades que, com as 9 de que já dispomos, somam 119 unidades, as quais formam 54 grupos iguais com 2 unidades cada, ou seja:

119 unidades = 54 x (2 unidades) + 11 unidades.

Se fôssemos registrar o que acabamos de fazer teríamos



o que não está errado.

[21] Na verdade, não é preciso encontrar o maior múltiplo que não excede a parte do dividendo considerada, porém, procedendo desta maneira minimizamos nossos cálculos.

Porém não temos o hábito de colocar as letras indicativas das ordens de cada um dos algarismos nem sobre, nem abaixo deles. Portanto, nosso registro estaria assim:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 1 & 6 & 3 & 1 & 9 & 54 \\ \cline{7-7}
- & 1 & 6 & 2 & & & 32 \\ \cline{1-6}
 & & & 1 & 1 & 9 & \\
 & & - & 1 & 0 & 8 & \\ \cline{3-6}
 & & & & 1 & 1 &
\end{array}
$$

que está errado. Este é, aliás, um erro muito frequentemente cometido pelos alunos. O problema é que, quando dissemos que não podíamos, com 11 dezenas, formar 54 grupos, não deixamos registrado que nenhuma, ou melhor, zero dezena, foi distribuída, deixando esta situação registrada com a presença do algarismo 0 no quociente. É por isso que, quando precisamos “baixar” mais de um algarismo do dividendo devemos acrescentar zeros no quociente, um para cada algarismo excedente “baixado”. Assim, o registro correto seria:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 1 & 6 & 3 & 1 & 9 & 54 \\ \cline{7-7}
- & 1 & 6 & 2 & & & 302 \\ \cline{1-6}
 & & & 1 & 1 & 9 & \\
 & & - & 1 & 0 & 8 & \\ \cline{3-6}
 & & & & 1 & 1 &
\end{array}
$$

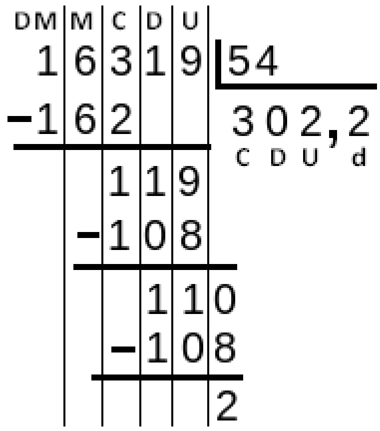
pondo fim à divisão inteira, já que o resto é constituído de unidades.

Parar aqui seria o caso se estivéssemos distribuindo 16.319 brinquedos para 54 crianças, porém, não seria este o caso se estivéssemos dividindo R$ 16.319,00 entre 54 pessoas. Neste caso a divisão deveria prosseguir até os centavos. Vamos, contudo, efetuar a divisão até termos certeza de que conhecemos o período.

Converteremos as 11 unidades restantes em 110 décimos, obtendo:

110 décimos = 54 x (2 décimos) + 2 décimos

ou, no registro das contas

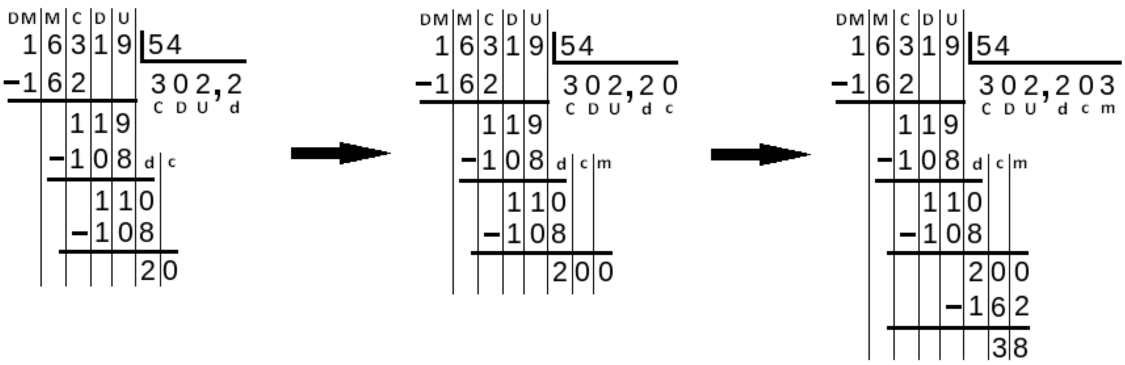


Note que, com o fim da divisão inteira, foi necessário acrescentar a vírgula no quociente, indicando que o algarismo seguinte é o resultado da distribuição dos décimos.

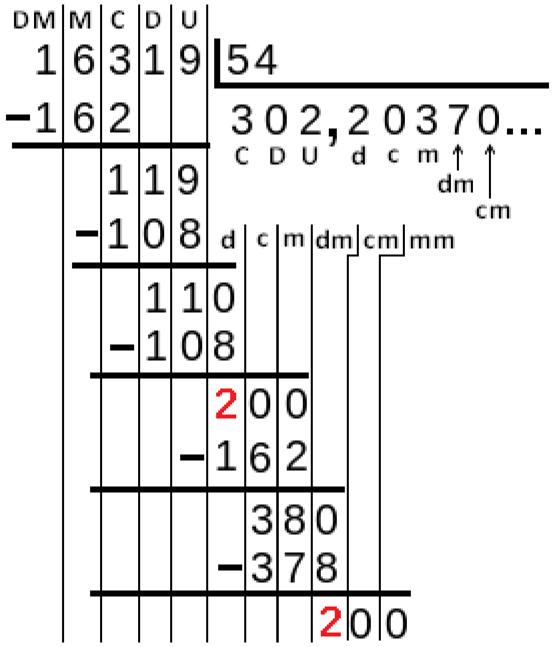
Agora os 2 décimos restantes são convertidos em 20 centésimos, os quais não podem ser distribuídos igualmente em 54 grupos, devendo esse fato ser registrado com o acréscimo de um zero no quociente (foi distribuído 0 centésimo para cada grupo). Os 20 centésimos são então convertidos em 200 milésimos, de modo que temos:

200 milésimos = 54 x (3 milésimos) + 38 milésimos

e nos registros foram seguidos os seguintes passos.



Daqui por diante, não há nenhuma novidade nos passos a serem seguidos. Se desejamos realizar as contas fazendo um arredondamento da ordem dos centésimos, este é o momento ideal para pararmos e dizer que o resultado da divisão é de aproximadamente 302,20. Se, contudo, quisermos ter uma ideia do resultado exato, devemos estar atentos aos restos a partir do momento em que teve fim a divisão inteira. Assim, há apenas duas possibilidades: um dos restos é zero, e o resultado é um decimal exato (este, como já vimos, não é o caso deste exemplo), ou um dos restos vai se repetir, e teremos clareza de que se trata de uma dízima periódica, cujo período passa a ser por nós identificado. Abaixo continuamos os registros até este ponto, destacando de vermelho o resto que se repete.



Assim como ocorre com a multiplicação, conhecendo os procedimentos utilizados para a divisão de dois naturais, resolvemos facilmente divisões em que o dividendo, o divisor ou ambos são números que possuem vírgula.

Se queremos, a título de exemplo, dividir 163,19 por 5,4, tudo o que precisamos fazer é igualar o número de casas decimais destes dois números, ignorar as vírgula e proceder a divisão entre os dois inteiros obtidos segundo os procedimentos estudados. A justificativa para isto também se faz facilmente por meio da representação destes números na forma de frações decimais. Vejamos

$$163{,}19 \div 5{,}4 = 163{,}19 \div 5{,}40 = \frac{16319}{100} \div \frac{540}{100} = \frac{\frac{16319}{100}}{\frac{540}{100}} = \frac{16319}{100} \cdot \frac{100}{540} = \frac{16319}{540}.$$

Logo, o objetivo de igualar as casas decimais e ignorar as vírgulas antes de efetuar a divisão é fazer com que os números obtidos se tornem os numeradores de frações decimais de mesmo denominador.

Com isto encerramos nossa explanação sobre os algoritmos das quatro operações, esperando que este material sirva de apoio para os professores, em especial aqueles que atuam nas séries iniciais da educação básica.

Se as informações nele contidas não são novidade para o professor que o lê, esperamos que pelo menos que sirvam como um guia, no sentido de mostrar aquilo que não pode ser ocultado do aluno quando do ensino dos algoritmos das quatro operações.

APÊNDICE D – Prova dos nove

A “prova dos nove” ou “noves fora”, como também é conhecida, guarda relação com o conteúdo trabalhado no Capítulo 3, em especial com a demonstração apresentada para o TEOREMA 7, e fundamenta-se em dois resultados fundamentais da aritmética dos restos, que são:

1) A soma dos restos das parcelas é congruente ao resto da soma;
2) O produto dos restos dos fatores é congruente ao resto do produto.

Logo, se uma soma como, por exemplo, 758 + 867, for efetuada corretamente, a soma dos restos que as parcelas deixam na divisão por um determinado número, digamos 9, deve ser igual ao resto deixado pela soma na divisão por 9.

$$\begin{array}{rcr} 758 & \rightarrow & 2 \\ +\,867 & \rightarrow & +\,3 \\ \hline 1625 & \rightarrow & 5 \end{array}$$

Ilustração 47

Efetuação de uma soma paralelamente à soma dos restos da divisão por nove.

No exemplo ilustrado acima 2, 3 e 5 são os restos da divisão de 758, 867 e 1.625 por nove, respectivamente. Note que, embora no exemplo dado tenhamos 2 + 3 = 5, não se exige a igualdade, apenas a congruência módulo 9. Neste exemplo tomamos os restos da divisão por 9, mas poderíamos ter tomado os resto da divisão por 7, 5 ou qualquer outro número.

Se o método de verificação de cálculos acabasse neste ponto, temos de convir que seria bem pouco eficiente, já que não é imediata, por exemplo, a observação de que o resto da divisão de 1.625 por 9 é 5, seriam necessárias três divisões para verificar uma única adição. Além disso, nada justificaria o nome prova dos “nove”, já que poderíamos considerar os restos da divisão por qualquer outro número.

Aqui, passamos a nos servir do resultado obtido a partir da demonstração do TEOREMA 7, que nos garante que, no SNPD, no caso específico da divisão por 9, o resto de um número é igual ao resto deixado pela soma dos algarismos que o representam. Assim, para acharmos o resto da divisão de 1625 por 9, não precisamos efetuar a divisão, basta somarmos os algarismos desse número e utilizarmos o resultado que acabamos de enunciar. No caso de 1625, basta fazermos 1 + 6 + 2 + 5 = 14, aplicando novamente o resultado até encontrarmos um número menor que 9. Neste caso, faríamos ainda 1 + 4 = 5. Pronto, eis aí uma maneira simples e eficiente para encontrar os restos da divisão por nove.

A demonstração do COROLÁRIO 2, nos habilitaria ainda a criarmos uma “prova dos três”, já que o resultado fornecido por essa demonstração é essencialmente o mesmo que aquele que acabamos de utilizar para o 9.

O termo “noves fora” vem do fato de que, no processo de soma dos algarismos, podemos subtrair 9 toda vez que obtivermos uma soma igual ou superior a este número, já que isto não altera o resto da divisão por nove. Assim, na soma dos algarismos de 1625, poderíamos ter feito (1 + 6 + 2) + 5 = 9 + 5 e após subtrair 9 teríamos também concluído que 5 é o resto procurado.

No que expusemos até este ponto reside a essência da prova dos nove, a qual difere pouca coisa nas outras operações. Não nos custa, contudo, fazer algumas ressalvas quanto as outros operações.

No que diz respeito à subtração, ao invés da soma dos restos temos que a diferença entre os restos do minuendo e do subtraendo, nessa ordem, deve ser igual ao resto da diferença. Atenção, não se trata de fazer a diferença entre o maior e o menor resto, como deixa claro o exemplo abaixo.

$$\begin{array}{rcl} 821 & \longrightarrow & 2 \\ -\,807 & \longrightarrow & -6 \\ \hline 14 & \longrightarrow & -4 \equiv 5 \bmod 9 \end{array}$$

Ilustração 48
Efetuação de uma subtração paralelamente à diferença entre os restos da divisão por nove.

Na operação acima os restos do minuendo e do subtraendo são, respectivamente, 2 e 6. Se efetuássemos a diferença 6 – 2 = 4, não obteríamos a congruência módulo 9 com 5 = 4 + 1, porém, fazendo 2 – 6 = - 4, obtemos um resultado congruente com 5 módulo 9, já que 9 + (- 4) = 5.

Quanto a multiplicação, a única observação é que, como era de se esperar, faremos o produto dos restos dos fatores e não a soma. Assim, na conta 456 x 328 = 149.568, após obtermos os restos de 456 e 328 como sendo 6 e 4, respectivamente, o resultado é conferido por meio da prova dos nove fazendo 6 x 4 = 24. Como 2 + 4 = 6, que é o resto de 149.568, então a conta passou pela prova dos nove e tem a chance de estar correta, como, de fato, está.

Também na divisão inteira os restos do dividendo, do divisor, do quociente e do resto da divisão podem ser obtidos pelos mesmos processos vistos anteriormente. Para aplicar a prova dos nove devemos atentar para o fato de que **dividendo = divisor x quociente + resto**, ou seja, depois de realizada a divisão basta nos certificarmos de que o resto do dividendo é congruente módulo 9 ao produto dos restos do divisor e do quociente mais o resto do resto da divisão. Por exemplo, ao dividirmos 149.783 por 456 encontramos 328 como quociente e 215 como resto da divisão, sabendo os restos da divisão por 9 desses quatro números são, respectivamente, 5, 6, 4 e 8, verificamos que os cálculos passam pela prova dos nove, já que $5 \equiv 6 \times 4 + 8 \mod 9$. De fato, $6 \times 4 = 24$ e $2 + 4 = 6$, como $6 + 8 = 14$ e $1 + 4 = 5$, então a congruência módulo 9 se verifica.

Embora os noves fora não nos deem certeza a respeito da correção dos cálculos que passam por essa prova, não vemos nisso motivo para que este método deixe de ser ensinado, muito pelo contrário, o professor pode encontrar neste fato uma oportunidade para discutir questões como a validade de um teorema e sua recíproca, ou seja, se uma conta está correta, então a prova dos nove vai funcionar, porém se a prova dos nove funcionar, isso não quer dizer que a conta esteja correta.

O professor pode ainda instigar seus alunos para que procurem casos em que a prova dos nove falha. Para criar um exemplo basta considerarmos a conta de adição que realizamos no início deste apêndice, 758 + 867, permutando os algarismos do resultado. Assim, 758 + 867 = 5612 satisfaz a prova dos nove, embora esta conta seja obviamente incorreta. Pensar nas chances que esse tipo de problema tem de acontecer é certamente um exercício interessante para se fazer com os alunos.

APÊNDICE E – Tabuadas de adição e multiplicação

Base 2

+	0	1
0	0	1
1	1	10

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Base 3

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Base 4

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Base 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Base 6

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	10
2	2	3	4	5	10	11
3	3	4	5	10	11	12
4	4	5	10	11	12	13
5	5	10	11	12	13	14

x	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

Base 7

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	10
2	2	3	4	5	6	10	11
3	3	4	5	6	10	11	12
4	4	5	6	10	11	12	13
5	5	6	10	11	12	13	14
6	6	10	11	12	13	14	15

x	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	11	13	15
3	0	3	6	12	15	21	24
4	0	4	11	15	22	26	33
5	0	5	13	21	26	34	42
6	0	6	15	24	33	42	51

Base 8

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

x	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Base 9

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8	10
2	2	3	4	5	6	7	8	10	11
3	3	4	5	6	7	8	10	11	12
4	4	5	6	7	8	10	11	12	13
5	5	6	7	8	10	11	12	13	14
6	6	7	8	10	11	12	13	14	15
7	7	8	10	11	12	13	14	15	16
8	8	10	11	12	13	14	15	16	17

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8	11	13	15	17
3	0	3	6	10	13	16	20	23	26
4	0	4	8	13	17	22	26	31	35
5	0	5	11	16	22	27	33	38	44
6	0	6	13	20	26	33	40	46	53
7	0	7	15	23	31	38	46	54	62
8	0	8	17	26	35	44	53	62	71

Base 10

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Base11

+		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	10
2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	10	11
3	3	3	4	5	6	7	8	9	A	10	11	12
4	4	4	5	6	7	8	9	A	10	11	12	13
5	5	5	6	7	8	9	A	10	11	12	13	14
6	6	6	7	8	9	A	10	11	12	13	14	15
7	7	7	8	9	A	10	11	12	13	14	15	16
8	8	8	9	A	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	9	A	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	A	A	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

X		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
2	2	0	2	4	6	8	A	11	13	15	17	19
3	3	0	3	6	9	11	14	17	1A	22	25	28
4	4	0	4	8	11	15	19	22	26	2A	33	37
5	5	0	5	A	14	19	23	28	32	37	41	46
6	6	0	6	11	17	22	28	33	39	44	4A	55
7	7	0	7	13	1A	26	32	39	45	51	58	64
8	8	0	8	15	22	2A	37	44	51	59	66	73
9	9	0	9	17	25	33	41	4A	58	66	74	82
10	A	0	A	19	28	37	46	55	64	73	82	91

Base 12

+		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10
2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10	11
3	3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10	11	12
4	4	4	5	6	7	8	9	A	B	10	11	12	13
5	5	5	6	7	8	9	A	B	10	11	12	13	14
6	6	6	7	8	9	A	B	10	11	12	13	14	15
7	7	7	8	9	A	B	10	11	12	13	14	15	16
8	8	8	9	A	B	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	9	A	B	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	A	A	B	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	B	B	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A

X		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
2	2	0	2	4	6	8	A	10	12	14	16	18	1A
3	3	0	3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	4	0	4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	5	0	5	A	13	18	21	26	2B	34	39	42	47
6	6	0	6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	7	0	7	12	19	24	2B	36	41	48	53	5A	65
8	8	0	8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	9	0	9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
10	A	0	A	18	26	34	42	50	5A	68	76	84	92
11	B	0	B	1A	29	38	47	56	65	74	83	92	A1

Base 13

+		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	10
2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	10	11
3	3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	10	11	12
4	4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	10	11	12	13
5	5	5	6	7	8	9	A	B	C	10	11	12	13	14
6	6	6	7	8	9	A	B	C	10	11	12	13	14	15
7	7	7	8	9	A	B	C	10	11	12	13	14	15	16
8	8	8	9	A	B	C	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	9	A	B	C	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	A	A	B	C	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	B	B	C	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
12	C	C	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B

X		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C
2	2	0	2	4	6	8	A	C	11	13	15	17	19	1B
3	3	0	3	6	9	C	12	15	18	1B	21	24	27	2A
4	4	0	4	8	C	13	17	1B	22	26	2A	31	35	39
5	5	0	5	A	12	17	1C	24	29	31	36	3B	43	48
6	6	0	6	C	15	1B	24	2A	33	39	42	48	51	57
7	7	0	7	11	18	22	29	33	3A	44	4B	55	5C	66
8	8	0	8	13	1B	26	31	39	44	4C	57	62	6A	75
9	9	0	9	15	21	2A	36	42	4B	57	63	6C	78	84
10	A	0	A	17	24	31	3B	48	55	62	6C	79	86	93
11	B	0	B	19	27	35	43	51	5C	6A	78	86	94	A2
12	C	0	C	1B	2A	39	48	57	66	75	84	93	A2	B1

Base 14

+		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	10
2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	10	11
3	3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	10	11	12
4	4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	10	11	12	13
5	5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	10	11	12	13	14
6	6	6	7	8	9	A	B	C	D	10	11	12	13	14	15
7	7	7	8	9	A	B	C	D	10	11	12	13	14	15	16
8	8	8	9	A	B	C	D	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	9	A	B	C	D	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	A	A	B	C	D	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	B	B	C	D	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
12	C	C	D	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
13	D	D	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C

X		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D
2	2	0	2	4	6	8	A	C	10	12	14	16	18	1A	1C
3	3	0	3	6	9	C	11	14	17	1A	1D	22	25	28	2B
4	4	0	4	8	C	12	16	1A	20	24	28	2C	32	36	3A
5	5	0	5	A	11	16	1B	22	27	2C	33	38	3D	44	49
6	6	0	6	C	14	1A	22	28	30	36	3C	44	4A	52	58
7	7	0	7	10	17	20	27	30	37	40	47	50	57	60	67
8	8	0	8	12	1A	24	2C	36	40	48	52	5A	64	6C	76
9	9	0	9	14	1D	28	33	3C	47	52	5B	66	71	7A	85
10	A	0	A	16	22	2C	38	44	50	5A	66	72	7C	88	94
11	B	0	B	18	25	32	3D	4A	57	64	71	7C	89	96	A3
12	C	0	C	1A	28	36	44	52	60	6C	7A	88	96	A4	B2
13	D	0	D	1C	2B	3A	49	58	67	76	85	94	A3	B2	C1

Base 15

+		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	10
2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	10	11
3	3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	10	11	12
4	4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	10	11	12	13
5	5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	10	11	12	13	14
6	6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	10	11	12	13	14	15
7	7	7	8	9	A	B	C	D	E	10	11	12	13	14	15	16
8	8	8	9	A	B	C	D	E	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	9	A	B	C	D	E	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	A	A	B	C	D	E	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	B	B	C	D	E	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
12	C	C	D	E	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
13	D	D	E	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
14	E	E	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D

X		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E
2	2	0	2	4	6	8	A	C	E	11	13	15	17	19	1B	1D
3	3	0	3	6	9	C	10	13	16	19	1C	20	23	26	29	2C
4	4	0	4	8	C	11	15	19	1D	22	26	2A	2E	33	37	3B
5	5	0	5	A	10	15	1A	20	25	2A	30	35	3A	40	45	4A
6	6	0	6	C	13	19	20	26	2C	33	39	40	46	4C	53	59
7	7	0	7	E	16	1D	25	2C	34	3B	43	4A	52	59	61	68
8	8	0	8	11	19	22	2A	33	3B	44	4C	55	5D	66	6E	77
9	9	0	9	13	1C	26	30	39	43	4C	56	60	69	73	7C	86
10	A	0	A	15	20	2A	35	40	4A	55	60	6A	75	80	8A	95
11	B	0	B	17	23	2E	3A	46	52	5D	69	75	81	8C	98	A4
12	C	0	C	19	26	33	40	4C	59	66	73	80	8C	99	A6	B3
13	D	0	D	1B	29	37	45	53	61	6E	7C	8A	98	A6	B4	C2
14	E	0	E	1D	2C	3B	4A	59	68	77	86	95	A4	B3	C2	D1

Base 16

+		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
12	C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
13	D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
14	E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
15	F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

X		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
10	A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
11	B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
12	C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
13	D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
14	E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
15	F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Base 17

+		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	10
2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	10	11
3	3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	10	11	12
4	4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	10	11	12	13
5	5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	10	11	12	13	14
6	6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	10	11	12	13	14	15
7	7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	10	11	12	13	14	15	16
8	8	8	9	A	B	C	D	E	F	G	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	9	A	B	C	D	E	F	G	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	A	A	B	C	D	E	F	G	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	B	B	C	D	E	F	G	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
12	C	C	D	E	F	G	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
13	D	D	E	F	G	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
14	E	E	F	G	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
15	F	F	G	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E
16	G	G	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F

X		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G
2	2	0	2	4	6	8	A	C	E	G	11	13	15	17	19	1B	1D	1F
3	3	0	3	6	9	C	F	11	14	17	1A	1D	1G	22	25	28	2B	2E
4	4	0	4	8	C	G	13	17	1B	1F	22	26	2A	2E	31	35	39	3D
5	5	0	5	A	F	13	18	1D	21	26	2B	2G	34	39	3E	42	47	4C
6	6	0	6	C	11	17	1D	22	28	2E	33	39	3F	44	4A	4G	55	5B
7	7	0	7	E	14	1B	21	28	2F	35	3C	42	49	4G	56	5D	63	6A
8	8	0	8	G	17	1F	26	2E	35	3D	44	4C	53	5B	62	6A	71	79
9	9	0	9	11	1A	22	2B	33	3C	44	4D	55	5E	66	6F	77	7G	88
10	A	0	A	13	1D	26	2G	39	42	4C	55	5F	68	71	7B	84	8E	97
11	B	0	B	15	1G	2A	34	3F	49	53	5E	68	72	7D	87	91	9C	A6
12	C	0	C	17	22	2E	39	44	4G	5B	66	71	7D	88	93	9F	AA	B5
13	D	0	D	19	25	31	3E	4A	56	62	6F	7B	87	93	9G	AC	B8	C4
14	E	0	E	1B	28	35	42	4G	5D	6A	77	84	91	9F	AC	B9	C6	D3
15	F	0	F	1D	2B	39	47	55	63	71	7G	8E	9C	AA	B8	C6	D4	E2
16	G	0	G	1F	2E	3D	4C	5B	6A	79	88	97	A6	B5	C4	D3	E2	F1

Base 18

+		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	10
2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	10	11
3	3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	10	11	12
4	4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	10	11	12	13
5	5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	10	11	12	13	14
6	6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	10	11	12	13	14	15
7	7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	10	11	12	13	14	15	16
8	8	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	9	A	B	C	D	E	F	G	H	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	A	A	B	C	D	E	F	G	H	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	B	B	C	D	E	F	G	H	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
12	C	C	D	E	F	G	H	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
13	D	D	E	F	G	H	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
14	E	E	F	G	H	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
15	F	F	G	H	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E
16	G	G	H	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F
17	H	H	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G

X		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H
2	2	0	2	4	6	8	A	C	E	G	10	12	14	16	18	1A	1C	1E	1G
3	3	0	3	6	9	C	F	10	13	16	19	1C	1F	20	23	26	29	2C	2F
4	4	0	4	8	C	G	12	16	1A	1E	20	24	28	2C	2G	32	36	3A	3E
5	5	0	5	A	F	12	17	1C	1H	24	29	2E	31	36	3B	3G	43	48	4D
6	6	0	6	C	10	16	1C	20	26	2C	30	36	3C	40	46	4C	50	56	5C
7	7	0	7	E	13	1A	1H	26	2D	32	39	3G	45	4C	51	58	5F	64	6B
8	8	0	8	G	16	1E	24	2C	32	3A	40	48	4G	56	5E	64	6C	72	7A
9	9	0	9	10	19	20	29	30	39	40	49	50	59	60	69	70	79	80	89
10	A	0	A	12	1C	24	2E	36	3G	48	50	5A	62	6C	74	7E	86	8G	98
11	B	0	B	14	1F	28	31	3C	45	4G	59	62	6D	76	7H	8A	93	9E	A7
12	C	0	C	16	20	2C	36	40	4C	56	60	6C	76	80	8C	96	A0	AC	B6
13	D	0	D	18	23	2G	3B	46	51	5E	69	74	7H	8C	97	A2	AF	BA	C5
14	E	0	E	1A	26	32	3G	4C	58	64	70	7E	8A	96	A2	AG	BC	C8	D4
15	F	0	F	1C	29	36	43	50	5F	6C	79	86	93	A0	AF	BC	C9	D6	E3
16	G	0	G	1E	2C	3A	48	56	64	72	80	8G	9E	AC	BA	C8	D6	E4	F2
17	H	0	H	1G	2F	3E	4D	5C	6B	7A	89	98	A7	B6	C5	D4	E3	F2	G1

Base 19

+		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	10
2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	10	11
3	3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	10	11	12
4	4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	10	11	12	13
5	5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	10	11	12	13	14
6	6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	10	11	12	13	14	15
7	7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	10	11	12	13	14	15	16
8	8	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	B	B	C	D	E	F	G	H	I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
12	C	C	D	E	F	G	H	I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
13	D	D	E	F	G	H	I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
14	E	E	F	G	H	I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
15	F	F	G	H	I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E
16	G	G	H	I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F
17	H	H	I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G
18	I	I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H

X		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2	2	0	2	4	6	8	A	C	E	G	I	11	13	15	17	19	1B	1D	1F	1H
3	3	0	3	6	9	C	F	I	12	15	18	1B	1E	1H	21	24	27	2A	2D	2G
4	4	0	4	8	C	G	11	15	19	1D	1H	22	26	2A	2E	2I	33	37	3B	3F
5	5	0	5	A	F	11	16	1B	1G	22	27	2C	2H	33	38	3D	3I	44	49	4E
6	6	0	6	C	I	15	1B	1H	24	2A	2G	33	39	3F	42	48	4E	51	57	5D
7	7	0	7	E	12	19	1G	24	2B	2I	36	3D	41	48	4F	53	5A	5H	65	6C
8	8	0	8	G	15	1D	22	2A	2I	37	3F	44	4C	51	59	5H	66	6E	73	7B
9	9	0	9	I	18	1H	27	2G	36	3F	45	4E	54	5D	63	6C	72	7B	81	8A
10	A	0	A	11	1B	22	2C	33	3D	44	4E	55	5F	66	6G	77	7H	88	8I	99
11	B	0	B	13	1E	26	2H	39	41	4C	54	5F	67	6I	7A	82	8D	95	9G	A8
12	C	0	C	15	1H	2A	33	3F	48	51	5D	66	6I	7B	84	8G	99	A2	AE	B7
13	D	0	D	17	21	2E	38	42	4F	59	63	6G	7A	84	8H	9B	A5	AI	BC	C6
14	E	0	E	19	24	2I	3D	48	53	5H	6C	77	82	8G	9B	A6	B1	BF	CA	D5
15	F	0	F	1B	27	33	3I	4E	5A	66	72	7H	8D	99	A5	B1	BG	CC	D8	E4
16	G	0	G	1D	2A	37	44	51	5H	6E	7B	88	95	A2	AI	BF	CC	D9	E6	F3
17	H	0	H	1F	2D	3B	49	57	65	73	81	8I	9G	AE	BC	CA	D8	E6	F4	G2
18	I	0	I	1H	2G	3F	4E	5D	6C	7B	8A	99	A8	B7	C6	D5	E4	F3	G2	H1

Base 20

Tabuada da Adição

+		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	10
2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	10	11
3	3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	10	11	12
4	4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	10	11	12	13
5	5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	10	11	12	13	14
6	6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	10	11	12	13	14	15
7	7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	10	11	12	13	14	15	16
8	8	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
12	C	C	D	E	F	G	H	I	J	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
13	D	D	E	F	G	H	I	J	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
14	E	E	F	G	H	I	J	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
15	F	F	G	H	I	J	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E
16	G	G	H	I	J	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F
17	H	H	I	J	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G
18	I	I	J	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H
19	J	J	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I

Base 20

Tabuada da Multiplicação

X		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2	2	0	2	4	6	8	A	C	E	G	I	10	12	14	16	18	1A	1C	1E	1G	1I
3	3	0	3	6	9	C	F	I	11	14	17	1A	1D	1G	1J	22	25	28	2B	2E	2H
4	4	0	4	8	C	G	10	14	18	1C	1G	20	24	28	2C	2G	30	34	38	3C	3G
5	5	0	5	A	F	10	15	1A	1F	20	25	2A	2F	30	35	3A	3F	40	45	4A	4F
6	6	0	6	C	I	14	1A	1G	22	28	2E	30	36	3C	3I	44	4A	4G	52	58	5E
7	7	0	7	E	11	18	1F	22	29	2G	33	3A	3H	44	4B	4I	55	5C	5J	66	6D
8	8	0	8	G	14	1C	20	28	2G	34	3C	40	48	4G	54	5C	60	68	6G	74	7C
9	9	0	9	I	17	1G	25	2E	33	3C	41	4A	4J	58	5H	66	6F	74	7D	82	8B
10	A	0	A	10	1A	20	2A	30	3A	40	4A	50	5A	60	6A	70	7A	80	8A	90	9A
11	B	0	B	12	1D	24	2F	36	3H	48	4J	5A	61	6C	73	7E	85	8G	97	9I	A9
12	C	0	C	14	1G	28	30	3C	44	4G	58	60	6C	74	7G	88	90	9C	A4	AG	B8
13	D	0	D	16	1J	2C	35	3I	4B	54	5H	6A	73	7G	89	92	9F	A8	B1	BE	C7
14	E	0	E	18	22	2G	3A	44	4I	5C	66	70	7E	88	92	9G	AA	B4	BI	CC	D6
15	F	0	F	1A	25	30	3F	4A	55	60	6F	7A	85	90	9F	AA	B5	C0	CF	DA	E5
16	G	0	G	1C	28	34	40	4G	5C	68	74	80	8G	9C	A8	B4	C0	CG	DC	E8	F4
17	H	0	H	1E	2B	38	45	52	5J	6G	7D	8A	97	A4	B1	BI	CF	DC	E9	F6	G3
18	I	0	I	1G	2E	3C	4A	58	66	74	82	90	9I	AG	BE	CC	DA	E8	F6	G4	H2
19	J	0	J	1I	2H	3G	4F	5E	6D	7C	8B	9A	A9	B8	C7	D6	E5	F4	G3	H2	I1

Base 60

Tabuada da Adição

+		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**k**	**m**	**n**	**o**	**p**	**q**	**r**	**s**	**t**	**u**	**v**	**w**	**x**	**y**	**z**
0	**0**	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
1	**1**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10
2	**2**	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11
3	**3**	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12
4	**4**	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13
5	**5**	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14
6	**6**	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15
7	**7**	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16
8	**8**	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17
9	**9**	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	**A**	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	**B**	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
12	**C**	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
13	**D**	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
14	**E**	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
15	**F**	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E
16	**G**	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F
17	**H**	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G
18	**I**	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H
19	**J**	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I
20	**K**	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J
21	**L**	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K
22	**M**	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L
23	**N**	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M
24	**P**	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N
25	**Q**	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P
26	**R**	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q
27	**S**	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R
28	**T**	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S
29	**U**	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T
30	**V**	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U
31	**W**	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V
32	**X**	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W
33	**Y**	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X
34	**Z**	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y
35	**a**	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z
36	**b**	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a
37	**c**	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b
38	**d**	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c
39	**e**	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d
40	**f**	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e
41	**g**	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f
42	**h**	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g
43	**i**	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h
44	**j**	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i
45	**k**	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j
46	**m**	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j	1k
47	**n**	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j	1k	1m
48	**o**	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j	1k	1m	1n
49	**p**	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j	1k	1m	1n	1o
50	**q**	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j	1k	1m	1n	1o	1p
51	**r**	r	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j	1k	1m	1n	1o	1p	1q
52	**s**	s	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j	1k	1m	1n	1o	1p	1q	1r
53	**t**	t	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j	1k	1m	1n	1o	1p	1q	1r	1s
54	**u**	u	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j	1k	1m	1n	1o	1p	1q	1r	1s	1t
55	**v**	v	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j	1k	1m	1n	1o	1p	1q	1r	1s	1t	1u
56	**w**	w	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j	1k	1m	1n	1o	1p	1q	1r	1s	1t	1u	1v
57	**x**	x	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j	1k	1m	1n	1o	1p	1q	1r	1s	1t	1u	1v	1w
58	**y**	y	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j	1k	1m	1n	1o	1p	1q	1r	1s	1t	1u	1v	1w	1x
59	**z**	z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F	1G	1H	1I	1J	1K	1L	1M	1N	1P	1Q	1R	1S	1T	1U	1V	1W	1X	1Y	1Z	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	1i	1j	1k	1m	1n	1o	1p	1q	1r	1s	1t	1u	1v	1w	1x	1y

Base 60

Tabuada da Multiplicação

X		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**	**k**	**m**	**n**	**o**	**p**	**q**	**r**	**s**	**t**	**u**	**v**	**w**	**x**	**y**	**z**
0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	**1**	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
2	**2**	0	2	4	6	8	A	C	E	G	I	K	M	P	R	T	V	X	Z	b	d	f	h	j	m	o	q	s	u	w	y	10	12	14	16	18	1A	1C	1E	1G	1I	1K	1M	1P	1R	1T	1V	1X	1Z	1b	1d	1f	1h	1j	1m	1o	1q	1s	1u	1w	1y
3	**3**	0	3	6	9	C	F	I	L	P	S	V	Y	b	e	h	k	o	r	u	x	10	13	16	19	1C	1F	1I	1L	1P	1S	1V	1Y	1b	1e	1h	1k	1o	1r	1u	1x	20	23	26	29	2C	2F	2I	2L	2P	2S	2V	2Y	2b	2e	2h	2k	2o	2r	2u	2x
4	**4**	0	4	8	C	G	K	P	T	X	b	f	j	o	s	w	10	14	18	1C	1G	1K	1P	1T	1X	1b	1f	1j	1o	1s	1w	20	24	28	2C	2G	2K	2P	2T	2X	2b	2f	2j	2o	2s	2w	30	34	38	3C	3G	3K	3P	3T	3X	3b	3f	3j	3o	3s	3w
5	**5**	0	5	A	F	K	Q	V	a	f	k	q	v	10	15	1A	1F	1K	1Q	1V	1a	1f	1k	1q	1v	20	25	2A	2F	2K	2Q	2V	2a	2f	2k	2q	2v	30	35	3A	3F	3K	3Q	3V	3a	3f	3k	3q	3v	40	45	4A	4F	4K	4Q	4V	4a	4f	4k	4q	4v
6	**6**	0	6	C	I	P	V	b	h	o	u	10	16	1C	1I	1P	1V	1b	1h	1o	1u	20	26	2C	2I	2P	2V	2b	2h	2o	2u	30	36	3C	3I	3P	3V	3b	3h	3o	3u	40	46	4C	4I	4P	4V	4b	4h	4o	4u	50	56	5C	5I	5P	5V	5b	5h	5o	5u
7	**7**	0	7	E	L	T	a	h	p	w	13	1A	1H	1P	1W	1d	1k	1s	1z	26	2D	2K	2S	2Z	2g	2o	2v	32	39	3G	3N	3V	3c	3j	3r	3y	45	4C	4J	4R	4Y	4f	4n	4u	51	58	5F	5M	5U	5b	5i	5q	5x	64	6B	6I	6Q	6X	6e	6m	6t
8	**8**	0	8	G	P	X	f	o	w	14	1C	1K	1T	1b	1j	1s	20	28	2G	2P	2X	2f	2o	2w	34	3C	3K	3T	3b	3j	3s	40	48	4G	4P	4X	4f	4o	4w	54	5C	5K	5T	5b	5j	5s	60	68	6G	6P	6X	6f	6o	6w	74	7C	7K	7T	7b	7j	7s
9	**9**	0	9	I	S	b	k	u	13	1C	1L	1V	1e	1o	1x	26	2F	2P	2Y	2h	2r	30	39	3I	3S	3b	3k	3u	43	4C	4L	4V	4e	4o	4x	56	5F	5P	5Y	5h	5r	60	69	6I	6S	6b	6k	6u	73	7C	7L	7V	7e	7o	7x	86	8F	8P	8Y	8h	8r
10	**A**	0	A	K	V	f	q	10	1A	1K	1V	1f	1q	20	2A	2K	2V	2f	2q	30	3A	3K	3V	3f	3q	40	4A	4K	4V	4f	4q	50	5A	5K	5V	5f	5q	60	6A	6K	6V	6f	6q	70	7A	7K	7V	7f	7q	80	8A	8K	8V	8f	8q	90	9A	9K	9V	9f	9q
11	**B**	0	B	M	Y	j	v	16	1H	1T	1e	1q	21	2C	2N	2Z	2k	2w	37	3I	3U	3f	3r	42	4D	4P	4a	4m	4x	58	5J	5V	5g	5s	63	6E	6Q	6b	6n	6y	79	7K	7W	7h	7t	84	8F	8R	8c	8o	8z	9A	9L	9X	9i	9u	A5	AG	AS	Ad	Ap
12	**C**	0	C	P	b	o	10	1C	1P	1b	1o	20	2C	2P	2b	2o	30	3C	3P	3b	3o	40	4C	4P	4b	4o	50	5C	5P	5b	5o	60	6C	6P	6b	6o	70	7C	7P	7b	7o	80	8C	8P	8b	8o	90	9C	9P	9b	9o	A0	AC	AP	Ab	Ao	B0	BC	BP	Bb	Bo
13	**D**	0	D	R	e	s	15	1I	1W	1j	1x	2A	2N	2b	2p	32	3F	3T	3g	3u	47	4K	4Y	4m	4z	5C	5Q	5d	5r	64	6H	6V	6i	6w	79	7M	7a	7o	81	8E	8S	8f	8t	96	9J	9X	9k	9y	AB	AP	Ac	Aq	B3	BG	BU	Bh	Bv	C8	CL	CZ	Cn
14	**E**	0	E	T	h	w	1A	1P	1d	1s	26	2K	2Z	2o	32	3G	3V	3j	3y	4C	4R	4f	4u	58	5M	5b	5q	64	6I	6X	6m	70	7E	7T	7h	7w	8A	8P	8d	8s	96	9K	9Z	9o	A2	AG	AV	Aj	Ay	BC	BR	Bf	Bu	C8	CM	Cb	Cq	D4	DI	DX	Dm
15	**F**	0	F	V	k	10	1F	1V	1k	20	2F	2V	2k	30	3F	3V	3k	40	4F	4V	4k	50	5F	5V	5k	60	6F	6V	6k	70	7F	7V	7k	80	8F	8V	8k	90	9F	9V	9k	A0	AF	AV	Ak	B0	BF	BV	Bk	C0	CF	CV	Ck	D0	DF	DV	Dk	E0	EF	EV	Ek
16	**G**	0	G	X	o	14	1K	1b	1s	28	2P	2f	2w	3C	3T	3j	40	4G	4X	4o	54	5K	5b	5s	68	6P	6f	6w	7C	7T	7j	80	8G	8X	8o	94	9K	9b	9s	A8	AP	Af	Aw	BC	BT	Bj	C0	CG	CX	Co	D4	DK	Db	Ds	E8	EP	Ef	Ew	FC	FT	Fj
17	**H**	0	H	Z	r	18	1Q	1h	1z	2G	2Y	2q	37	3P	3g	3y	4F	4X	4p	56	5N	5f	5x	6E	6W	6o	75	7M	7e	7w	8D	8V	8n	94	9L	9d	9v	AC	AU	Am	B3	BK	Bc	Bu	CB	CT	Ck	D2	DJ	Db	Dt	EA	ES	Ej	F1	FI	Fa	Fs	G9	GR	Gi
18	**I**	0	I	b	u	1C	1V	1o	26	2P	2h	30	3I	3b	3u	4C	4V	4o	56	5P	5h	60	6I	6b	6u	7C	7V	7o	86	8P	8h	90	9I	9b	9u	AC	AV	Ao	B6	BP	Bh	C0	CI	Cb	Cu	DC	DV	Do	E6	EP	Eh	F0	FI	Fb	Fu	GC	GV	Go	H6	HP	Hh
19	**J**	0	J	d	x	1G	1a	1u	2D	2X	2r	3A	3U	3o	47	4R	4k	54	5N	5h	61	6K	6e	6y	7H	7b	7v	8E	8Y	8s	9B	9V	9p	A8	AS	Am	B5	BP	Bi	C2	CL	Cf	Cz	DI	Dc	Dw	EF	EZ	Et	FC	FW	Fq	G9	GT	Gn	H6	HQ	Hj	I3	IM	Ig
20	**K**	0	K	f	10	1K	1f	20	2K	2f	30	3K	3f	40	4K	4f	50	5K	5f	60	6K	6f	70	7K	7f	80	8K	8f	90	9K	9f	A0	AK	Af	B0	BK	Bf	C0	CK	Cf	D0	DK	Df	E0	EK	Ef	F0	FK	Ff	G0	GK	Gf	H0	HK	Hf	I0	IK	If	J0	JK	Jf
21	**L**	0	L	h	13	1P	1k	26	2S	2o	39	3V	3r	4C	4Y	4u	5F	5b	5x	6I	6e	70	7L	7h	83	8P	8k	96	9S	9o	A9	AV	Ar	BC	BY	Bu	CF	Cb	Cx	DI	De	E0	EL	Eh	F3	FP	Fk	G6	GS	Go	H9	HV	Hr	IC	IY	Iu	JF	Jb	Jx	KI	Ke
22	**M**	0	M	j	16	1T	1q	2C	2Z	2w	3I	3f	42	4P	4m	58	5V	5s	6E	6b	6y	7K	7h	84	8R	8o	9A	9X	9u	AG	Ad	B0	BM	Bj	C6	CT	Cq	DC	DZ	Dw	EI	Ef	F2	FP	Fm	G8	GV	Gs	HE	Hb	Hy	IK	Ih	J4	JR	Jo	KA	KX	Ku	LG	Ld
23	**N**	0	N	m	19	1X	1v	2I	2g	34	3S	3q	4D	4b	4z	5M	5k	68	6W	6u	7H	7f	83	8R	8p	9C	9a	9y	AL	Aj	B7	BV	Bt	CG	Ce	D2	DQ	Do	EB	EZ	Ex	FK	Fi	G6	GU	Gs	HF	Hd	I1	IP	In	JA	JY	Jw	KJ	Kh	L5	LT	Lr	ME	Mc
24	**P**	0	P	o	1C	1b	20	2P	2o	3C	3b	40	4P	4o	5C	5b	60	6P	6o	7C	7b	80	8P	8o	9C	9b	A0	AP	Ao	BC	Bb	C0	CP	Co	DC	Db	E0	EP	Eo	FC	Fb	G0	GP	Go	HC	Hb	I0	IP	Io	JC	Jb	K0	KP	Ko	LC	Lb	M0	MP	Mo	NC	Nb
25	**Q**	0	Q	q	1F	1f	25	2V	2v	3K	3k	4A	4a	50	5Q	5q	6F	6f	75	7V	7v	8K	8k	9A	9a	A0	AQ	Aq	BF	Bf	C5	CV	Cv	DK	Dk	EA	Ea	F0	FQ	Fq	GF	Gf	H5	HV	Hv	IK	Ik	JA	Ja	K0	KQ	Kq	LF	Lf	M5	MV	Mv	NK	Nk	PA	Pa
26	**R**	0	R	s	1I	1j	2A	2b	32	3T	3u	4K	4m	5C	5d	64	6V	6w	7M	7o	8E	8f	96	9X	9y	AP	Aq	BG	Bh	C8	CZ	D0	DR	Ds	EI	Ej	FA	Fb	G2	GT	Gu	HK	Hm	IC	Id	J4	JV	Jw	KM	Ko	LE	Lf	M6	MX	My	NP	Nq	PG	Ph	Q8	QZ
27	**S**	0	S	u	1L	1o	2F	2h	39	3b	43	4V	4x	5P	5r	6I	6k	7C	7e	86	8Y	90	9S	9u	AL	Ao	BF	Bh	C9	Cb	D3	DV	Dx	EP	Er	FI	Fk	GC	Ge	H6	HY	I0	IS	Iu	JL	Jo	KF	Kh	L9	Lb	M3	MV	Mx	NP	Nr	PI	Pk	QC	Qe	R6	RY
28	**T**	0	T	w	1P	1s	2K	2o	3G	3j	4C	4f	58	5b	64	6X	70	7T	7w	8P	8s	9K	9o	AG	Aj	BC	Bf	C8	Cb	D4	DX	E0	ET	Ew	FP	Fs	GK	Go	HG	Hj	IC	If	J8	Jb	K4	KX	L0	LT	Lw	MP	Ms	NK	No	PG	Pj	QC	Qf	R8	Rb	S4	SX
29	**U**	0	U	y	1S	1w	2Q	2u	3N	3s	4L	4q	5J	5o	6H	6m	7F	7j	8D	8h	9B	9f	A9	Ad	B7	Bb	C5	CZ	D3	DX	E1	EV	Ez	FT	Fx	GR	Gv	HP	Ht	IM	Ir	JK	Jp	KI	Kn	LG	Lk	ME	Mi	NC	Ng	PA	Pe	Q8	Qc	R6	Ra	S4	SY	T2	TW
30	**V**	0	V	10	1V	20	2V	30	3V	40	4V	50	5V	60	6V	70	7V	80	8V	90	9V	A0	AV	B0	BV	C0	CV	D0	DV	E0	EV	F0	FV	G0	GV	H0	HV	I0	IV	J0	JV	K0	KV	L0	LV	M0	MV	N0	NV	P0	PV	Q0	QV	R0	RV	S0	SV	T0	TV	U0	UV
31	**W**	0	W	12	1Y	24	2a	36	3c	48	4e	5A	5g	6C	6i	7E	7k	8G	8n	9I	9p	AK	Ar	BM	Bt	CP	Cv	DR	Dx	ET	Ez	FV	G1	GX	H3	HZ	I5	Ib	J7	Jd	K9	Kf	LB	Lh	MD	Mj	NF	Nm	PH	Po	QJ	Qq	RL	Rs	SN	Su	TQ	Tw	US	Uy	VU
32	**X**	0	X	14	1b	28	2f	3C	3j	4G	4o	5K	5s	6P	6w	7T	80	8X	94	9b	A8	Af	BC	Bj	CG	Co	DK	Ds	EP	Ew	FT	G0	GX	H4	Hb	I8	If	JC	Jj	KG	Ko	LK	Ls	MP	Mw	NT	P0	PX	Q4	Qb	R8	Rf	SC	Sj	TG	To	UK	Us	VP	Vw	WT
33	**Y**	0	Y	16	1e	2C	2k	3I	3r	4P	4x	5V	63	6b	79	7h	8F	8o	9L	9u	AS	B0	BY	C6	Ce	DC	Dk	EI	Er	FP	Fx	GV	H3	Hb	I9	Ih	JF	Jo	KL	Ku	LS	M0	MY	N6	Ne	PC	Pk	QI	Qr	RP	Rx	SV	T3	Tb	U9	Uh	VF	Vo	WL	Wu	XS
34	**Z**	0	Z	18	1h	2G	2q	3P	3y	4X	56	5f	6E	6o	7M	7w	8V	94	9d	AC	Am	BK	Bu	CT	D2	Db	EA	Ek	FI	Fs	GR	H0	HZ	I8	Ih	JG	Jq	KP	Ky	LX	M6	Mf	NE	No	PM	Pw	QV	R4	Rd	SC	Sm	TK	Tu	UT	V2	Vb	WA	Wj	XI	Xs	YR
35	**a**	0	a	1A	1k	2K	2v	3V	45	4f	5F	5q	6Q	70	7a	8A	8k	9K	9v	AV	B5	Bf	CF	Cq	DQ	E0	Ea	FA	Fk	GK	Gv	HV	I5	If	JF	Jq	KQ	L0	La	MA	Mk	NK	Nv	PV	Q5	Qf	RF	Rq	SQ	T0	Ta	UA	Uk	VK	Vv	WV	X5	Xf	YF	Yq	ZQ
36	**b**	0	b	1C	1o	2P	30	3b	4C	4o	5P	60	6b	7C	7o	8P	90	9b	AC	Ao	BP	C0	Cb	DC	Do	EP	F0	Fb	GC	Go	HP	I0	Ib	JC	Jo	KP	L0	Lb	MC	Mo	NP	P0	Pb	QC	Qo	RP	S0	Sb	TC	To	UP	V0	Vb	WC	Wo	XP	Y0	Yb	ZC	Zo	aP
37	**c**	0	c	1E	1r	2T	35	3h	4J	4w	5Y	6A	6n	7P	81	8d	9F	9s	AU	B6	Bi	CK	Cx	DZ	EB	Eo	FQ	G2	Ge	HG	Ht	IV	J7	Jj	KL	Ky	La	MC	Mp	NR	P3	Pf	QH	Qu	RW	S8	Sk	TM	Tz	Ub	VD	Vq	WS	X4	Xg	YI	Yv	ZX	a9	am	bN
38	**d**	0	d	1G	1u	2X	3A	3o	4R	54	5h	6K	6y	7b	8E	8s	9V	A8	Am	BP	C2	Cf	DI	Dw	EZ	FC	Fq	GT	H6	Hj	IM	J0	Jd	KG	Ku	LX	MA	Mo	NR	P4	Ph	QK	Qy	Rb	SE	Ss	TV	U8	Um	VP	W2	Wf	XI	Xw	YZ	ZC	Zq	aT	b6	bj	cM
39	**e**	0	e	1I	1x	2b	3F	3u	4Y	5C	5r	6V	79	7o	8S	96	9k	AP	B3	Bh	CL	D0	De	EI	Ex	Fb	GF	Gu	HY	IC	Ir	JV	K9	Ko	LS	M6	Mk	NP	P3	Ph	QL	R0	Re	SI	Sx	Tb	UF	Uu	VY	WC	Wr	XV	Y9	Yo	ZS	a6	ak	bP	c3	ch	dL
40	**f**	0	f	1K	20	2f	3K	40	4f	5K	60	6f	7K	80	8f	9K	A0	Af	BK	C0	Cf	DK	E0	Ef	FK	G0	Gf	HK	I0	If	JK	K0	Kf	LK	M0	Mf	NK	P0	Pf	QK	R0	Rf	SK	T0	Tf	UK	V0	Vf	WK	X0	Xf	YK	Z0	Zf	aK	b0	bf	cK	d0	df	eK
41	**g**	0	g	1M	23	2j	3Q	46	4n	5T	69	6q	7W	8C	8t	9Z	AF	Aw	Bc	CI	Cz	Df	EL	F2	Fi	GP	H5	Hm	IS	J8	Jp	KV	LB	Ls	MY	NE	Nv	Pb	QH	Qy	Re	SK	T1	Th	UN	V4	Vk	WR	X7	Xo	YU	ZA	Zr	aX	bD	bu	ca	dG	dx	ed	fJ
42	**h**	0	h	1P	26	2o	3V	4C	4u	5b	6I	70	7h	8P	96	9o	AV	BC	Bu	Cb	DI	E0	Eh	FP	G6	Go	HV	IC	Iu	Jb	KI	L0	Lh	MP	N6	No	PV	QC	Qu	Rb	SI	T0	Th	UP	V6	Vo	WV	XC	Xu	Yb	ZI	a0	ah	bP	c6	co	dV	eC	eu	fb	gI
43	**i**	0	i	1R	29	2s	3a	4I	51	5j	6S	7A	7t	8b	9J	A2	Ak	BT	CB	Cu	Dc	EK	F3	Fm	GU	HC	Hv	Id	JL	K4	Kn	LV	MD	Mw	Ne	PM	Q5	Qo	RW	SE	Sx	Tf	UN	V6	Vp	WX	XF	Xy	Yg	ZP	a7	aq	bY	cG	cz	dh	eQ	f8	fr	gZ	hH
44	**j**	0	j	1T	2C	2w	3f	4P	58	5s	6b	7K	84	8o	9X	AG	B0	Bj	CT	DC	Dw	Ef	FP	G8	Gs	Hb	IK	J4	Jo	KX	LG	M0	Mj	NT	PC	Pw	Qf	RP	S8	Ss	Tb	UK	V4	Vo	WX	XG	Y0	Yj	ZT	aC	aw	bf	cP	d8	ds	eb	fK	g4	go	hX	iG
45	**k**	0	k	1V	2F	30	3k	4V	5F	60	6k	7V	8F	90	9k	AV	BF	C0	Ck	DV	EF	F0	Fk	GV	HF	I0	Ik	JV	KF	L0	Lk	MV	NF	P0	Pk	QV	RF	S0	Sk	TV	UF	V0	Vk	WV	XF	Y0	Yk	ZV	aF	b0	bk	cV	dF	e0	ek	fV	gF	h0	hk	iV	jF
46	**m**	0	m	1X	2I	34	3q	4b	5M	68	6u	7f	8R	9C	9y	Aj	BV	CG	D2	Do	EZ	FK	G6	Gs	Hd	IP	JA	Jw	Kh	LT	ME	N0	Nm	PX	QI	R4	Rq	Sb	TM	U8	Uu	Vf	WR	XC	Xy	Yj	ZV	aG	b2	bo	cZ	dK	e6	es	fd	gP	hA	hw	ih	jT	kE
47	**n**	0	n	1Z	2L	38	3v	4h	5U	6G	73	7q	8c	9P	AB	Ay	Bk	CX	DJ	E6	Et	Ff	GS	HE	I1	Io	Ja	KM	L9	Lw	Mi	NV	PH	Q4	Qr	Rd	SQ	TC	Tz	Um	VY	WK	X7	Xu	Yg	ZT	aF	b2	bp	cb	dN	eA	ex	fj	gW	hI	i5	is	je	kR	mD
48	**o**	0	o	1b	2P	3C	40	4o	5b	6P	7C	80	8o	9b	AP	BC	C0	Co	Db	EP	FC	G0	Go	Hb	IP	JC	K0	Ko	Lb	MP	NC	P0	Po	Qb	RP	SC	T0	To	Ub	VP	WC	X0	Xo	Yb	ZP	aC	b0	bo	cb	dP	eC	f0	fo	gb	hP	iC	j0	jo	kb	mP	nC
49	**p**	0	p	1d	2S	3G	45	4u	5i	6X	7L	8A	8z	9o	Ac	BR	CF	D4	Dt	Eh	FW	GK	H9	Hy	In	Jb	KQ	LE	M3	Ms	Ng	PV	QJ	R8	Rx	Sm	Ta	UP	VD	W2	Wr	XF	YU	ZI	a7	aw	bk	cZ	dN	eC	f1	fq	ge	hT	iH	j6	jv	kj	mY	nM	oB
50	**q**	0	q	1f	2V	3K	4A	50	5q	6f	7V	8K	9A	A0	Aq	Bf	CV	DK	EA	F0	Fq	Gf	HV	IK	JA	K0	Kq	Lf	MV	NK	PA	Q0	Qq	Rf	SV	TK	UA	V0	Vq	Wf	XV	YK	ZA	a0	aq	bf	cV	dK	eA	f0	fq	gf	hV	iK	jA	k0	kq	mf	nV	oK	pA
51	**r**	0	r	1h	2Y	3P	4F	56	5x	6o	7e	8V	9L	AC	B3	Bu	Ck	Db	ES	FI	G9	H0	Hr	Ih	JY	KP	LF	M6	Mx	No	Pe	QV	RL	SC	T3	Tu	Uk	Vb	WS	XI	Y9	Z0	Zr	ah	bY	cP	dF	e6	ex	fo	ge	hV	iL	jC	k3	ku	mk	nb	oS	pI	q9
52	**s**	0	s	1j	2b	3T	4K	5C	64	6w	7o	8f	9X	AP	BG	C8	D0	Ds	Ej	Fb	GT	HK	IC	J4	Jw	Ko	Lf	MX	NP	PG	Q8	R0	Rs	Sj	Tb	UT	VK	WC	X4	Xw	Yo	Zf	aX	bP	cG	d8	e0	es	fj	gb	hT	iK	jC	k4	kw	mo	nf	oX	pP	qG	r8
53	**t**	0	t	1m	2e	3X	4Q	5I	6B	74	7x	8q	9i	Ab	BU	CN	DF	E8	F1	Fu	Gn	Hf	IY	JR	KJ	LC	M5	My	Nr	Pj	Qc	RV	SN	TG	U9	V2	Vv	Wo	Xg	YZ	ZS	aK	bD	c6	cz	ds	ek	fd	gW	hP	iH	jA	k3	kw	mp	nh	oa	pT	qL	rE	s7
54	**u**	0	u	1o	2h	3b	4V	5P	6I	7C	86	90	9u	Ao	Bh	Cb	DV	EP	FI	GC	H6	I0	Iu	Jo	Kh	Lb	MV	NP	PI	QC	R6	S0	Su	To	Uh	Vb	WV	XP	YI	ZC	a6	b0	bu	co	dh	eb	fV	gP	hI	iC	j6	k0	ku	mo	nh	ob	pV	qP	rI	sC	t6
55	**v**	0	v	1q	2k	3f	4a	5V	6Q	7K	8F	9A	A5	B0	Bv	Cq	Dk	Ef	Fa	GV	HQ	IK	JF	KA	L5	M0	Mv	Nq	Pk	Qf	Ra	SV	TQ	UK	VF	WA	X5	Y0	Yv	Zq	ak	bf	ca	dV	eQ	fK	gF	hA	i5	j0	jv	kq	mk	nf	oa	pV	qQ	rK	sF	tA	u5
56	**w**	0	w	1s	2o	3j	4f	5b	6X	7T	8P	9K	AG	BC	C8	D4	E0	Ew	Fs	Go	Hj	If	Jb	KX	LT	MP	NK	PG	QC	R8	S4	T0	Tw	Us	Vo	Wj	Xf	Yb	ZX	aT	bP	cK	dG	eC	f8	g4	h0	hw	is	jo	kj	mf	nb	oX	pT	qP	rK	sG	tC	u8	v4
57	**x**	0	x	1u	2r	3o	4k	5h	6e	7b	8Y	9V	AS	BP	CL	DI	EF	FC	G9	H6	I3	J0	Jx	Ku	Lr	Mo	Nk	Ph	Qe	Rb	SY	TV	US	VP	WL	XI	YF	ZC	a9	b6	c3	d0	dx	eu	fr	go	hk	ih	je	kb	mY	nV	oS	pP	qL	rI	sF	tC	u9	v6	w3
58	**y**	0	y	1w	2u	3s	4q	5o	6m	7j	8h	9f	Ad	Bb	CZ	DX	EV	FT	GR	HP	IM	JK	KI	LG	ME	NC	PA	Q8	R6	S4	T2	U0	Uy	Vw	Wu	Xs	Yq	Zo	am	bj	ch	df	ed	fb	gZ	hX	iV	jT	kR	mP	nM	oK	pI	qG	rE	sC	tA	u8	v6	w4	x2
59	**z**	0	z	1y	2x	3w	4v	5u	6t	7s	8r	9q	Ap	Bo	Cn	Dm	Ek	Fj	Gi	Hh	Ig	Jf	Ke	Ld	Mc	Nb	Pa	QZ	RY	SX	TW	UV	VU	WT	XS	YR	ZQ	aP	bN	cM	dL	eK	fJ	gI	hH	iG	jF	kE	mD	nC	oB	pA	q9	r8	s7	t6	u5	v4	w3	x2	y1