Consideraciones para el estudio del movimiento de los cuerpos y partículas

1. $a = f(t)$. *La aceleración es una función dada de t.* Al resolver (11.2) para dv y sustituir $f(t)$ por a, se escribe

$$dv = a\,dt$$
$$dv = f(t)\,dt$$

Al integrar ambos miembros, se obtiene la ecuación

$$\int dv = \int f(t)\,dt$$

que define v en términos de t. Sin embargo, debe notarse que una constante arbitraria se introducirá como resultado de la integración. Esto se debe al hecho de que hay muchos movimientos que corresponden a la aceleración dada $a = f(t)$. Para definir en forma única el movimiento de la partícula, es necesario especificar las *condiciones iniciales* del movimiento, esto es, el valor de v_0 de la velocidad y el valor x_0 de la coordenada de la posición en $t = 0$. Al sustituir las integrales indefinidas por *integrales definidas* con los límites inferiores correspondientes a las condiciones iniciales $t = 0$ y $v = v_0$ y los límites superiores correspondientes a $t = t$ y $v = v$, se escribe

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t f(t)\,dt$$

$$v - v_0 = \int_0^t f(t)\,dt$$

lo cual produce v en términos de t.

La ecuación $v = \frac{dx}{dt}$ puede resolverse ahora para dx,

$$dx = v\,dt$$

y la expresión que se acaba de obtener sea sustituida por v. Ambos miembros se integran después, el miembro izquierdo con respecto a x desde $x = x_0$ hasta $x = x$, y el miembro derecho respecto a t desde $t = 0$ hasta $t = t$. La coordenada de la posición x se obtiene de ese modo en términos de t; el movimiento está completamente determinado.

2. $a = f(x)$. *La aceleración se da en función de* x. Al reordenar la ecuación (11.4) y sustituir $f(x)$ para a, se escribe

$$v\,dv = a\,dx$$
$$v\,dv = f(x)\,dx$$

Puesto que cada miembro contiene sólo una variable, se puede integrar la ecuación. Denotando de nuevo mediante v_0 y x_0, respectivamente, los valores iniciales de la velocidad y la coordenada de la posición, se obtiene

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

la cual produce v en términos de x. A continuación se resuelve $v = \frac{dx}{dt}$ para dt,

$$dt = \frac{dx}{v}$$

y se sustituye por v la expresión que acaba de obtenerse. Ambos miembros pueden integrarse entonces para obtener la relación deseada entre x y t. Sin embargo, en muchos casos esta última integración no puede llevarse a cabo de manera analítica y debe recurrirse a un método de integración numérico.

3. $a = f(v)$. *La aceleración es una función dada de* v. Es posible sustituir $f(v)$ por a en $a = \frac{dv}{dt}$ u $a = v\frac{dv}{dx}$ para obtener cualquiera de las relaciones siguientes:

$$f(v) = \frac{dv}{dt} \qquad f(v) = v\frac{dv}{dx}$$

$$dt = \frac{dv}{f(v)} \qquad dx = \frac{v\,dv}{f(v)}$$

La integración de la primera ecuación producirá una relación entre v y t; la integración de la segunda ecuación originará una relación entre v y x. Cualquiera de estas relaciones puede utilizarse junto con la ecuación $v = \frac{dx}{dt}$ para obtener la relación entre x y t que caracteriza el movimiento de la partícula.