Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 4 - indeterminación infinito dividido infinito en cociente de polinomios y raíces

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+x-1} = \frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación

Cociente de polinomios del mismo grado.

Divido todo por la máxima potencia.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2/x^2-3x/x^2+2/x^2}{2x^2/x^2+x/x^2-1/x^2}$ → simplifico → $\lim_{x \to +\infty} \frac{5-3/x+2/x^2}{2+1/x-1/x^2}$

Evalúo recordando que $k/\infty=0$ → $\frac{5-3/\infty+2/\infty}{2+1/\infty-1/\infty}=\frac{5-0+0}{2+0-0}=\frac{5}{2}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+6}{3x^3-x+5} = \frac{+\infty}{+\infty}$ → Indeterminación

Grado del numerador menor que Grado del denominador denominador.

Divido todo por la máxima potencia.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x/x^3+6/x^3}{3x^3/x^3-x/x^3+5/x^3}$ → simplifico → $\lim_{x \to +\infty} \frac{2/x^2+6/x^3}{3-1/x^2+5/x^3}$

Evalúo recordando que $k/\infty=0$ → $\frac{2/\infty+6/\infty}{3-1/\infty+5/\infty}=\frac{0}{3}=0$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{13x^2-x}{\sqrt{169x^4-x^2+8}} = \frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación

El mayor grado que aparece en el cociente es x^2 , porque el factor x^4 dentro de la raíz cuadrada se comporta como un polinomio de grado 2.

Divido todo por la máxima potencia. Cuando x^2 entra dentro de la raíz cuadrada, lo hace como x^4 .

$\lim_{x \to +\infty} \frac{13x^2/x^2-x/x^2}{\sqrt{169x^4/x^4-x^2/x^4+8/x^4}}$ → simplifico → $\lim_{x \to +\infty} \frac{13-1/x}{\sqrt{169-1/x^2+8/x^4}}$

Evalúo recordando que $k/\infty=0$ → $\frac{13-1/\infty}{\sqrt{169-1/\infty+8/\infty}}=\frac{13-0}{\sqrt{169-0+0}}=\frac{13}{\sqrt{169}}=\frac{13}{13}=1$

2. Calcula $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1+x}{x} - \frac{2+x}{1+x}\right)$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1+x}{x} - \frac{2+x}{1+x}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right) - \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2+x}{1+x}\right) = 1 - 1 = 0$$

El límite de la diferencia es la diferencia de los límites. Y en cada término tenemos un cociente de polinomios del mismo grado en numerador y denominador, por lo que el resultado es el cociente de los coeficientes que acompañan a las máximas potencias.

3. Calcula los siguientes límites en el infinito.

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6}$

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → Cociente de polinomios de igual grado

El límite coincide con el cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia (x^3) .

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}=\frac{1}{-2}$$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación

El numerador lo podemos ver, en el infinito, como un polinomio de grado ½. Y el denominador como un polinomio de grado 1. Como el grado del denominador es mayor que el del numerador, el cociente tiende a 0 cuando la variable tiende a infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6}=0$$

4. Resuelve:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+x-1}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → Cociente de polinomios del mismo grado

$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+x-1}=\frac{5}{2}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+6}{3x^2-x+5}=\frac{-\infty}{+\infty}$ → Indeterminación → Grado denominador > Grado numerador

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+6}{3x^2-x+5}=0$

c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^4-5x^2+6}}{3x^2+2x-4}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → Cociente de polinomios del mismo grado

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^4-5x^2+6}}{3x^2+2x-4}=\frac{\sqrt{9}}{3}=1$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^3+6x-7}{x^2-5x+3}=\frac{-\infty}{+\infty}$ → Indeterminación → Grado numerador > Grado denominador

$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^3+6x-7}{x^2-5x+3}=-\infty$

e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2-x+2}{\sqrt[3]{x^6+3x^3-2x}}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → Cociente de polinomios del mismo grado

$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2-x+2}{\sqrt[3]{x^6+3x^3-2x}}=\frac{5}{1}=5$

f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{13x^2-x}{\sqrt{169x^4-x^2+8}}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → Cociente de polinomios del mismo grado

$\lim_{x \to +\infty} \frac{13x^2-x}{\sqrt{169x^4-x^2+8}}=\frac{13}{\sqrt{169}}=1$