Problemas – Tema 6

Problemas resueltos - 5 - ángulo entre dos rectas

1. Obtener el ángulo que forman las rectas $r: \sqrt{3}x+y-5=0$ **y** $s: 3x-\sqrt{3}y+1=0$ **.**

Podemos expresar el ángulo formado por dos rectas a partir de sus vectores directores:

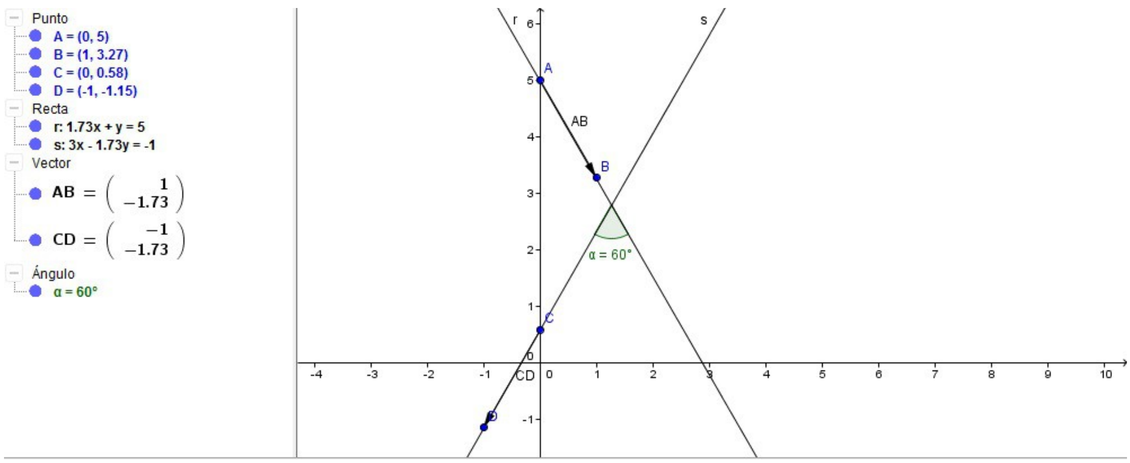
$$\vec{u}_r=(-B, A)=(-1, \sqrt{3})$$
$$\vec{u}_s=(-B', A')=(\sqrt{3}, 3)$$

Tal y como demostramos en teoría:

$$\cos(\alpha)=\left|\frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|}\right| \rightarrow \cos(\alpha)=\left|\frac{A \cdot A'+B \cdot B'}{\sqrt{A^2+B^2} \cdot \sqrt{(A')^2+(B')^2}}\right|$$

Aplicado a nuestro problema:

$$\cos(\alpha)=\left|\frac{-\sqrt{3}+3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3+1} \cdot \sqrt{9+3}}\right|=\left|\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{12}}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right|=\sqrt{\frac{3}{12}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2} \rightarrow \alpha=60^{o}$$



2. Escribe la ecuación general de una recta que pase por el punto $P(3,1)$ y forme con la recta $r: x-2y+7=0$ un ángulo de 45º.

Sea la recta:

$r: x-2y+7=0$ → pendiente → $m_r=\frac{1}{2}$

Buscamos una recta s que pase por $P(3,1)$ y forme un ángulo de 45º con r. Por lo tanto:

$$tg\,\gamma=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_r\cdot m_s}\right| \rightarrow tg\,45=\left|\frac{\frac{1}{2}-m_s}{1+\frac{1}{2}\cdot m_s}\right| \rightarrow 1=\left|\frac{\frac{1}{2}-m_s}{1+\frac{1}{2}\cdot m_s}\right| \rightarrow \pm 1=\frac{\frac{1}{2}-m_s}{1+\frac{1}{2}\cdot m_s}$$

Como tenemos un valor absoluto igualado a un número, podemos quitar las barras del valor absoluto y añadir signo positivo y negativo al número.

$$+1=\frac{\frac{1}{2}-m_s}{1+\frac{1}{2}\cdot m_s} \rightarrow m_s=\frac{-1}{3}$$

$$-1=\frac{\frac{1}{2}-m_s}{1+\frac{1}{2}\cdot m_s} \rightarrow m_s=3$$

Una vez obtenida la pendiente de la recta s podemos aplicar la ecuación punto pendiente de la recta, ya que debe pasar por el punto $P(3,1)$.

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow \frac{-1}{3}=\frac{y-1}{x-3} \rightarrow s: x+3y-6=0$$

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow 3=\frac{y-1}{x-3} \rightarrow s: 3x-y-8=0$$

3. Las rectas $r: 3x+2y-1=0$ **y** $s: x+k\cdot y-2=0$ **forman un ángulo de** $\frac{\pi}{3}$ **radianes. Obtener el valor de** k **.**

De la ecuación general de la recta podemos obtener la pendiente:

$$Ax+By+C=0 \quad \rightarrow \quad m=\frac{-A}{B}$$

$$m_r=\frac{-3}{2} \quad , \quad m_s=\frac{-1}{k}$$

Y podemos aplicar la fórmula que relaciona el ángulo γ formado por dos rectas con las pendientes de las rectas:

$$tg(\gamma)=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_r m_s}\right| \quad \rightarrow \quad tg\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left|\frac{\frac{-3}{2}+\frac{1}{k}}{1+\frac{3}{2k}}\right| \quad \rightarrow \quad \sqrt{3}=\left|\frac{\frac{-3k+2}{2k}}{\frac{2k+3}{2k}}\right| \quad \rightarrow \quad \pm\sqrt{3}=\frac{\frac{-3k+2}{2k}}{\frac{2k+3}{2k}}$$

Como tenemos un valor absoluto igualado a un número, podemos quitar las barras del valor absoluto y añadir signo positivo y negativo al número.

$$+\sqrt{3}=\frac{\frac{-3k+2}{2k}}{\frac{2k+3}{2k}} \quad \rightarrow \quad 3\sqrt{3}-2=-3k-2\sqrt{3}k \quad \rightarrow \quad 2-3\sqrt{3}=3k+2\sqrt{3}k$$

$$2-3\sqrt{3}=(3+2\sqrt{3})k \quad \rightarrow \quad k=\frac{2-3\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}$$

$$-\sqrt{3}=\frac{\frac{-3k+2}{2k}}{\frac{2k+3}{2k}} \quad \rightarrow \quad -3\sqrt{3}-2=-3k+2\sqrt{3}k \quad \rightarrow \quad 2+3\sqrt{3}=3k-2\sqrt{3}k$$

$$2+3\sqrt{3}=(3-2\sqrt{3})k \quad \rightarrow \quad k=\frac{2+3\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}}$$

4. Halla las ecuaciones de las dos rectas que, pasando por $P(2,3)$, forman un ángulo de 45º con la recta de ecuación $r: x+2y-5=0$.

Obtenemos la pendiente de la recta r.

$$m_r=\frac{-A}{B}\rightarrow m_r=\left(\frac{-1}{2}\right)$$

Y sabemos que el ángulo formado por dos rectas al cortarse cumple la relación:

$$tg\,\alpha=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_r\cdot m_s}\right|\rightarrow tg45^o=\left|\frac{\frac{-1}{2}-m_s}{1+\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot m_s}\right|$$

Con $\alpha=45^o$ un ángulo del primer cuadrante → $tg(45^o)=1$ → $1=\left|\frac{\frac{-1}{2}-m_s}{1+\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot m_s}\right|$

¡Ojo! Hay un valor absoluto. Por lo que podemos quitar las barras de valor absoluto si consideramos que el argumento es igual a +1 y a -1.

$$\pm 1=\frac{\frac{-1}{2}-m_s}{1+\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot m_s}$$ → Tendremos dos ecuaciones por resolver

signo positivo → $1-\frac{m_s}{2}=\frac{-1}{2}-m_s$ → $2-m_s=-1-2m_s$ → $m_s=-3$

signo negativo → $-1+\frac{m_s}{2}=\frac{-1}{2}-m_s$ → $\frac{-1}{2}=\frac{-3m_s}{2}$ → $m_s=\frac{1}{3}$

Ya tenemos las pendientes de las rectas que pasan por el punto $P(2,3)$ por donde pasa. Podemos obtener las ecuaciones punto-pendiente.

$$s: y-3=-3(x-2) \quad\rightarrow\quad s: 3x+y-9=0$$

$$s': y-3=\frac{1}{3}(x-2) \quad\rightarrow\quad s': x-3y+7=0$$

5. Obtener el ángulo formado por el corte de las rectas $r: \frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1$ **y** $s: y=\frac{-1}{3}x-1$

Sean las rectas $r: \frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1$ y $s: y=\frac{-1}{3}x-1$. Sus pendientes son:

$$r: \frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1 \rightarrow r: y=2x+4 \rightarrow m_r=2$$

$$s: y=\frac{-1}{3}x-1 \rightarrow m_s=\frac{-1}{3}$$

El ángulo formado por el corte de ambas rectas cumple la siguiente relación para su tangente:

$$tg(\alpha)=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_r \cdot m_s}\right|=\left|\frac{2+\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right|=7 \rightarrow \alpha \simeq 81,87^o$$

6. Obtener el ángulo que forman entre sí las rectas $r: 2x-3y+1=0$ **y** $s: x+4y-2=0$ **.**

Dos rectas que no son paralelas se cortan formando cuatro ángulos, iguales dos a dos. El ángulo formado por las rectas se define como el más pequeño de ellos.

Una forma de obtenerlo es operar para obtener el ángulo de cada recta respecto al eje horizontal, y restar finalmente ambos ángulos.

Si escribimos $r: 2x-3y+1=0$ en forma explícita:

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

El coeficiente que acompaña a x es la pendiente → $m=\frac{2}{3}$

La pendiente es la tangente del ángulo que estamos buscando:

$tg(\alpha)=\frac{2}{3}$ → $\alpha=arcotg\left(\frac{2}{3}\right)$ → $\alpha=33,69^{o}$ → ángulo positivo en sentido antihorario, respecto al eje horizontal.

Si escribimos $s: x+4y-2=0$ en forma explícita:

$$y=\frac{-1}{4}x+\frac{1}{2}$$

$tg(\beta)=\frac{-1}{4}$ → $\beta=arcotg\left(\frac{-1}{4}\right)$ → $\beta=-14,04^{o}$ → ángulo negativo en sentido horario, respecto al eje horizontal.

La diferencia entre ambos ángulos nos da el ángulo que forman ambas rectas:

$$\alpha-\beta=33,69^{o}-(-14,04^{o})=47,73^{o}$$

Otra forma de obtener este ángulo es a partir de los vectores directores de la recta. Un vector director es paralelo a la recta.

Si $m_r=\frac{2}{3}$ → $\vec{u}_r=(3,2)$

Si $m_s=\frac{-1}{4}$ → $\vec{u}_s=(4,-1)$

El ángulo formado por ambos vectores es el valor absoluto del cociente entre el producto escalar y el producto de los módulos.

$$\cos(\gamma)=\left|\frac{\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_s|}\right| \rightarrow \cos(\gamma)=\left|\frac{(3,2)\cdot(4,-1)}{\sqrt{3^2+2^2}\cdot\sqrt{4^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{3\cdot 4+2\cdot(-1)}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}}\right|=0,67 \rightarrow \gamma=47,73^{o}$$

7. Escribe la ecuación de la recta que pasando por el punto $P(2,-7)$ sea:

a) paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

b) perpendicular a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

a) La bisectriz del primer cuadrante tiene pendiente 1, por que divide al cuadrante en dos mitades de 45º cada una. Una recta paralela a la bisectriz tendrá esa misma pendiente.
Usando la ecuación punto-pendiente:

$$1=\frac{y+7}{x-2} \rightarrow y+7=x-2 \rightarrow \quad x-y-9=0$$

b) La ecuación de la bisectriz del primer y tercer cuadrante es perpendicular a la bisectriz del segundo cuarto. Por lo tanto, necesitamos una recta que sea paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante, y que pase por el punto $P(2,-7)$.
Y esta recta es la misma que hemos obtenido en el apartado anterior:

$$x-y-9=0$$

8. Calcula las bisectrices de los ángulos que forman las siguientes rectas al cortarse:

$r: x-y=0$

$s: x=0$

Los puntos de la recta bisectriz los forman los puntos del plano P(x,y) equidistante a ambas rectas. Por lo tanto, si:

$$r: Ax+By+C=0 \rightarrow d(P,r)=\left|\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

$$s: A'x+B'y+C'=0 \rightarrow d(P,s)=\left|\frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{(A')^2+(B')^2}}\right|$$

Igualamos distancias:

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{(A')^2+(B')^2}}$$

Para nuestro problema concreto, tendremos:

$$\frac{1\cdot x-1\cdot y+0}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\pm\frac{1\cdot x+0\cdot y+0}{\sqrt{1^2+0^2}} \rightarrow \frac{x-y}{\sqrt{2}}=\pm x \rightarrow x-y=\pm\sqrt{2}\cdot x$$

Obtenemos dos ecuaciones distintas, al ser dos bisectrices:

bisectriz 1: $(1-\sqrt{2})x-y=0$

bisectriz 2: $(1+\sqrt{2})x-y=0$