Problemas sobre continuidad en funciones a trozos y límite

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach CCSS	Funciones y Límite	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Estudia los límites laterales de $f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ \ x\leq 1 \\ 3x^2-1 & si\ \ x>1 \end{cases}$ en el punto $x_0=1$.

Realizamos el límite lateral por la izquierda. Recuerda que, en un primer paso, calcular el límite es simplemente evaluar la función en el punto.

$L^- = \lim_{x\to 1^-}(x+1)=1+1=2 \rightarrow$ Fíjate que L^- significa límite por la izquierda.

$L^+ = \lim_{x\to 1^+}(3x^2-1)=3-1=2 \rightarrow$ Fíjate que L^+ significa límite por la derecha.

Como los límites laterales en $x_0=1$coinciden, podemos afirmar que existe el límite de la función en $x_0=1$ y su valor es:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = L = 2$

PROBLEMA 2

Estudia los límites laterales de $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ \ x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & si\ \ x > 0 \end{cases}$ en el punto $x_0 = 0$.

Evaluamos en la función.

$L^- = \lim_{x \to 0^-} (x+1) = 0 + 1 = 1$

$L^+ = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \to$ ¿Qué hacemos? ¿Se puede dividir por 0?

No estamos dividiendo por 0, sino por un valor muy próximo a 0 pero sin llegar a tocarlo (recuerda el concepto de "tender" que hemos explicado en clase). Un número (en nuestro caso tenemos 1 en el numerador) dividido por algo muy, muy, muy pequeño (un valor a la derecha de 0) tiende a algo muy, muy, muy grande (más infinito).

PROBLEMA 3

Estudia la continuidad de la función en $x = 2$.

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{x^2 - 4}}{\boldsymbol{x - 2}} & \boldsymbol{si\ \ x \neq 2} \\ \boldsymbol{3\ \ si\ \ x = 2} \end{cases}$$

Ojo con la forma en que está expresa esta función a trozos. Tanto a la izquierda como a la derecha de 2, la ecuación de la función es el cociente de polinomios. Y solo cuando la variable x vale 2, la ecuación de la función es la recta horizontal $f(x) = 2$.

Primera condición: existe la función en el punto frontera.

$\exists f(2) = 3$

Segunda condición: límites laterales iguales.

Dada la forma en que está definida la función a trozos, la expresión del límite por la izquierda va a coincidir con la expresión del límite por la derecha, ya que ambos límites se aplican sobre la misma ecuación para la función: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.

Empecemos por el límite lateral izquierdo.

$L^- = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación $\to$ Factorizar y simplificar.

$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 2) = volver\ a\ evaluar = 4 \to L^- = 4$

Si hacemos el límite lateral derecho, llegaremos al mismo resultado $\to L^+ = 4$

En consecuencia:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4 = L$

Si comparamos el valor de la función en el punto frontera con el valor del límite, comprobamos que no coinciden.

$f(2) = 3 \neq 4 = L$

Estamos ante una discontinuidad evitable en $x = 2$.

PROBLEMA 4

Indica el valor de k para que la función:

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \frac{3x}{2x-2} \;\; si \;\; x \neq \frac{1}{2} \\ k \;\; si \;\; x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

sea continua en $x = \frac{1}{2}$.

Primera condición: existe la función en el punto frontera.

$$\exists f\left(\frac{1}{2}\right) = k$$

Segunda condición: límites laterales iguales.

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{3x}{2x-2} = evaluar = \frac{-3}{2} \rightarrow L^- = \frac{-3}{2}$$

Por la forma de la función a trozos, la expresión del límite lateral derecho coincide con la expresión del límite lateral izquierdo.

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{3x}{2x-2} = evaluar = \frac{-3}{2} \rightarrow L^+ = \frac{-3}{2}$$

$$L^- = L^+ = L = \frac{-3}{2}$$

Según la tercera condición, el valor de la función en el punto debe coincidir con el valor del límite.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = k, L = \frac{-3}{2} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = L \rightarrow k = \frac{-3}{2}$$