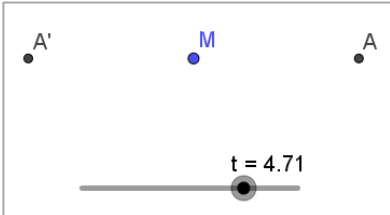
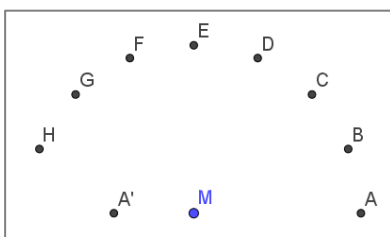
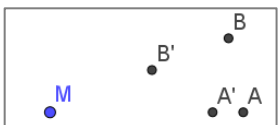
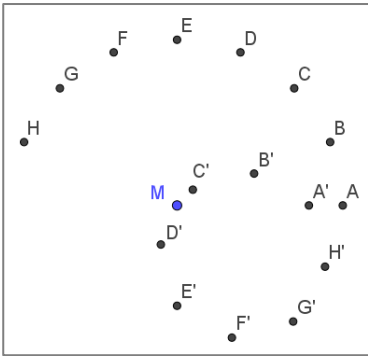


Die Datei „12a_Kreisillusion“ ist im GeoGebra-Book <https://www.geogebra.org/m/e2xuabke> abrufbar und kann auf Smartphone, Tablet oder PC genutzt werden. Mithilfe der Anleitung kann die Erstellung nachvollzogen und variiert werden. Man kann dabei den mathematischen Hintergrund erkunden und erhält einen vertieften Einblick in das Prinzip dieser optischen Täuschung. Fortgeschrittene Nutzer können Varianten oder eigene Erweiterungen erstellen.


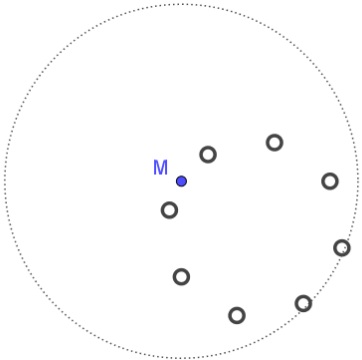
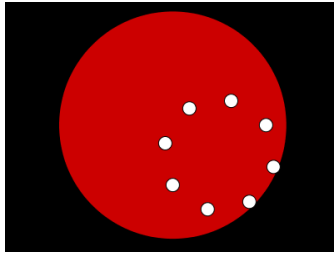


Basisversion (Rollender Kreis – Mathematische Modellierung)

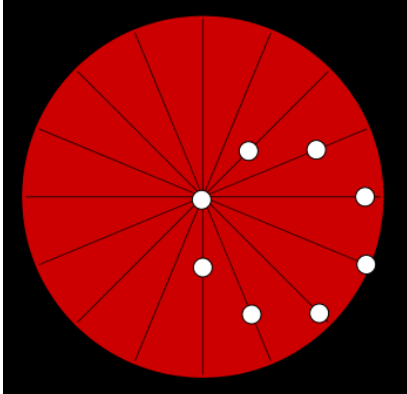
Symbol	Inhalt / Beschreibung	Alternativ in der Eingabezeile:
Eingabezeile	<p>Pendelbewegung eines Punktes A' um Mittelpunkt M</p> <p>Mit den rechts aufgeführten Befehlen legt man zunächst den Mittelpunkt M des großen äußeren Kreises und den Radius r fest, der später bei Bedarf variiert werden kann. Der Bezugspunkt A legt rechts außen in Mittellage den äußeren Randpunkt der Pendelbewegung fest.</p> <p>Der Schieberegler t durchläuft eine komplette Periode der Sinusfunktion und dient der Steuerung der Animation.</p> <p>Nach Rechtsklick auf den Schieberegler t kann man die Animation starten und unter Einstellungen -> Schieberegler deren Eigenschaften anpassen:</p> <p>Die Animationsgeschwindigkeit etwas erhöhen (z.B. auf 2) und die Wiederholung auf "zunehmend" setzen, damit die Pendelbewegung nicht nach einer Periode stoppt.</p> <p>Damit hat man bereits den Kern der Pendelbewegung umgesetzt. Die Verwendung des Vektors \vec{MA} ermöglicht hier eine übersichtliche Modellierung, die sich im Folgenden leicht auf die anderen Punkte anpassen lässt.</p>	<p>M=(0,0) r=schieberegler(1,5) r=2 A=(r,0) t=schieberegler(0,2*Pi) A' = M + sin(t)*vektor(M,A)</p>  <p><i>A' pendelt um M, für $t = \frac{3}{2}\pi \approx 4,71$ befindet sich A' nach einer $\frac{3}{4}$-Periode in der Randlage links außen..</i></p>
Eingabezeile	<p>Sieben weitere Punkte in Randlage definieren</p> <p>Der Punkt A legt für die erste Schwingungsachse (auf der x-Achse) die Randlage und damit die Amplitude (maximaler Ausschlag /Abstand von M) fest. Insgesamt soll es acht Schwingungsachsen geben, für die wir nun jeweils nur einen Punkt in Randlage definieren. Dazu kann man z.B. den Punkt A um M drehen. Damit die so entstehenden sieben Punkte gleichmäßig auf dem Außenkreis verteilt liegen, dreht man jeweils den achten Teil von 180°, also um $180^\circ:8=22.5^\circ$.</p> <p>Die zugehörigen Befehle und die so definierten Randpunkte B,C,D,E,F,G und H sind rechts zu sehen.</p> <p><i>Tip: Zur effizienten Eingabe sollte man copy&paste nutzen, indem man den ersten Befehl vor der Bestätigung markiert und kopiert ("Strg"+"c"). Nachdem der erste Befehl dann ausgeführt wurde, kann man ihn erneut in die Eingabezeile einfügen (mit dem Shortcut "Strg"+"v") und passend abwandeln</i></p>	<p>B=Drehe(A,22.5°,M) C=Drehe(B,22.5°,M) D=Drehe(C,22.5°,M) E=Drehe(D,22.5°,M) F=Drehe(E,22.5°,M) G=Drehe(F,22.5°,M) H=Drehe(G,22.5°,M)</p> 
Eingabezeile	<p>Zeitverzögerte Pendelbewegung von B'</p> <p>Damit B' nun passend verzögert schwingt, muss er A' um den achten Teil der halben Periode, also um "Pi/8" hinterherhinken. Dazu subtrahiert man im Argument des Sinus-Faktors den Wert Pi/8 und versetzt damit die beiden Schwingungsphasen um diese gewünschte "Phasenverschiebung".</p>	<p>B' = M + sin(t-Pi/8)*vektor(M,B)</p>  <p><i>B' folgt A' um $\frac{\pi}{8}$ verzögert nach ...</i></p>

<p>Eingabezeile</p>	<p>Restliche Schwingungen und -Punkte definieren Jede Schwingung wird gegenüber der vorherigen um $\frac{\pi}{8}$ verschoben. Bezieht man diese Verzögerungen jeweils auf die Schwingung von A' um M, so subtrahiert man im Argument des Sinus letztlich die Vielfachen von $\frac{\pi}{8}$, wie es rechts zu sehen ist.</p> 	<p>$C' = M + \sin(t - 2 \cdot \frac{\pi}{8}) \cdot \text{vektor}(M, C)$ $D' = M + \sin(t - 3 \cdot \frac{\pi}{8}) \cdot \text{vektor}(M, D)$ $E' = M + \sin(t - 4 \cdot \frac{\pi}{8}) \cdot \text{vektor}(M, E)$ $F' = M + \sin(t - 5 \cdot \frac{\pi}{8}) \cdot \text{vektor}(M, F)$ $G' = M + \sin(t - 6 \cdot \frac{\pi}{8}) \cdot \text{vektor}(M, G)$ $H' = M + \sin(t - 7 \cdot \frac{\pi}{8}) \cdot \text{vektor}(M, H)$</p>
<p><i>Diese Basisversion zeigt bereits den Kern der optischen Täuschung. Jeder der Punkte schwingt geradlinig auf einem Durchmesser und es entsteht der Eindruck eines sich abrollenden Kreises.</i></p>		


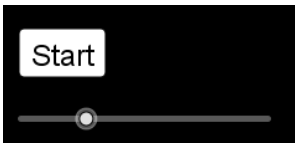
Erweiterung I (Rollender Kreis – angepasstes Layout)

Symbol	Inhalt / Beschreibung	Alternativ in der Eingabezeile:
 <p>oder Eingabezeile</p>	<p>Kreis definieren und Punkte / Beschriftungen ausblenden Die Illusion wird wirkungsvoller, wenn man den Kreis um M mit Radius r auch sieht. Man definiert ihn dazu als Objekt und kann ihn z.B. wie in der Skizze rechts gestrichelt formatieren (unter Einstellungen → Darstellung). Die Punkte A, B, ..., H werden nicht benötigt und werden ausgeblendet. <i>Tipp: Zur Auswahl bei gedrückter Strg-Taste nacheinander anklicken, ggf. vorher einfärben (dann findet man sie später gut in der Algebra-Ansicht) und unter Grundeinstellungen das Kästchen vor "Objekt anzeigen" deaktivieren.</i> Die Einstellungen der Punkte A', B', ..., H' sollte man ebenfalls anpassen. Für die nebenstehende Skizze wurde beispielsweise die Beschriftung ausgeblendet und die Punktdarstellung als leerer Kreis ausgewählt.</p>	<p>$c = \text{Kreis}(M, r)$</p> 
<p>Eingabezeile</p>	<p>Rechteck als Hintergrund erzeugen Mit den beiden nebenstehenden Befehlen kann man ein zum Ursprung symmetrisches Rechteck erzeugen, das sich dann skalieren und einfärben lässt (unter Einstellungen → Farben). Die Deckkraft sollte man dann gleichzeitig auf 100% setzen.</p>	<p>$k = \text{Schieberegler}(1, 10)$ $\text{Vieleck}((-k, -k/2), (k, -k/2), (k, k/2), (-k, k/2))$</p>
<p>Einstellungen / Eigenschaften</p>	<p>Anordnungs-Ebenen der Objekte anpassen Damit der Kreis c und die Punkte A', B', ..., H' auch vor dem schwarz gefärbten Rechteck sichtbar sind, sollte man sie in der Hierarchie der Anordnungsebenen eine Stufe höher ansiedeln. Dies geht am einfachsten, in dem man sie gemeinsam auswählt ("Strg" + Klick) und in ihren Eigenschaften im Register "Erweitert" die (Ansichts-) Ebene auf 1 statt 0 einstellt. So bleibt das Rechteck in der Ebene "0" im Hintergrund, während Kreis und Punkte in der Ebene "1" im Vordergrund angeordnet sind.</p>	 <p><i>Der Kreis wurde rot und die Punkte wurden weiß formatiert, als normale "ausgefüllte Punkte".</i></p>

Erweiterung II (Schwingungsachsen einblenden)

Symbol	Inhalt / Beschreibung	Alternativ in der Eingabezeile:
<p>Eingabezeile</p> <p>Einstellungen: Erweitert Darstellung</p>	<p>Schwingungsachsen als Fokussierungshilfen</p> <p>Um die geradlinige Bewegung der einzelnen Punkte zu betonen und besser verfolgen zu können, bietet es sich nun an, die zugehörigen Kreisdurchmesser einzublenden. Dazu spiegelt man A an M und legt damit den linken Randpunkt S fest, mit dem dann die Strecke s definiert wird.</p> <p>Statt die Strecke s nun siebenmal um je 22.5° um M zu drehen, kann man diese Abfolge mit dem Folgebefehl auch "auf einen Schlag" umsetzen. Der Wert der Laufvariablen i erhöht sich bei jedem Durchlauf um 1, so dass man am Ende 8 gleichmäßig verteilte Durchmesser erhält, die als Liste zu einem Objekt zusammengefasst sind (siehe Bild rechts).</p> <p><i>Achtung: Formatierung / Anordnung anpassen!</i></p> <p>Auch hier müssen die Anordnungs-Ebenen passend gewählt werden. Die Liste l1 wird (unter Einstellungen → Erweitert) in der Ebene 2 eingebunden, damit die 8 Schwingungsachsen <u>vor</u> dem roten Kreis erscheinen. Außerdem sollten die Achsen (also Liste l1) schwarz und dünn (z.B. Strichstärke 2 statt 5) formatiert werden, damit sie als dezente Fokussierungshilfen wirken können. Die acht weißen Punkte sollten dagegen in ganz nach vorn gesetzt und betont werden (in Ebene 3).</p> <p>Abschließend kann man noch die Sichtbarkeit der Pendelachsen (Liste l1) steuern. Dazu legt man z.B. das Kontrollkästchen a (boolesche Variable) mit der Beschriftung "Pendelachsen einblenden" an und trägt nach Rechtsklick auf die Liste l1 in deren Einstellungen unter "Erweitert" als Bedingung für die Sichtbarkeit a ein. Alternativ kann man auch den Befehl rechts in der Eingabezeile angeben.</p>	<p>S=Spiegle(A,M) s=strecke(S,A) Folge(Drehe(s, i*22.5°, M),i, 1, 8) erzeugt die Liste l1, in der die acht Durchmesser zu einem Objekt zusammengefasst sind, das sich dadurch leichter formatieren lässt:</p>  <p><input checked="" type="checkbox"/> Pendelachsen einblenden</p> <p>Kontrollkästchen("Pendelachsen einblenden",l1) <i>Hinweis: Ggf. wird die bedingte Sichtbarkeit für die Liste l1 nicht korrekt übernommen und muss doch von Hand eingetragen werden.</i></p>

Erweiterung III (Start/Stop-Button für die Animation)

Symbol	Inhalt / Beschreibung	Alternativ in der Eingabezeile:
 <p>oder</p> <p>Eingabezeile</p>	<p>Schaltfläche zum Starten/Stoppen der Animation</p> <p>Das Kontrollkästchen "anim" wird im Skript der Schaltfläche zur Steuerung der Animation benötigt, sollte aber nicht sichtbar sein. Man richtet dann die Schaltfläche1 mit folgendem Skript (bei Mausklick) ein:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. SetzeWert(anim,lanim) 2. StartAnimation(t, anim) 3. SetzeBeschriftung(Schaltfläche1,Wenn(anim,"Stop","Start")) <p>Der Schieberegler t wurde hier noch hellgrau gefärbt und ohne Beschriftung vor dem schwarzen Hintergrund eingebunden.</p>	<p>anim=kontrollkästchen()</p> 

Viel Spaß bei den weiteren Variationen!