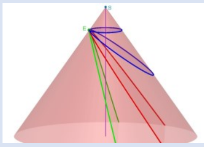
Kegelschnitte erkunden
genetisch, ganzheitlich, dynamisch, anschaulich

Hans-Jürgen Elschenbroich
elschenbroich@t-online.de



MNU, Koblenz 30.4.2023
Vernetzungstagung, Siegen 6.5.2023

www.geogebra.org/m/mmpd8yeq

Hans Schupp

Statt isolierter Betrachtungen eine „gemeinsame Einführung aller Kegelschnitte [...] unter einem **ganzheitlichen Aspekt**. (Schupp, S. 11)

Gelegenheit für ‚echte' Raumgeometrie. KEGEL-Schnitte mit digitalen Werkzeugen.

Frage

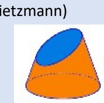
- ***Warum*** **noch Kegelschnitte unterrichten?**
- ***Wie*** **heutzutage Kegelschnitte unterrichten?**
- ***Was*** **aus dem Themenkreis Kegelschnitte unterrichten?**

Agenda

1. **KEGEL-Schnitte**
2. **Abstände**
3. Ortslinien
4. Implizite Gleichungen
5. Parametrische Kurven
6. Anwendungen
7. **Digitale Werkzeuge & Rückschau**

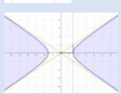
Stoffdidaktische Schwerpunkte (nach Lietzmann)

1. **Stereometrisch**: Kegel-Schnitte



2. **Planimetrisch**: Abstände & Ortslinien

3. **Analytisch**: Gleichungen, Parametrisierungen



Genetischer Gang!

1. KEGEL-Schnitte

1.1a Veranschaulichung und Anschauungsmodelle

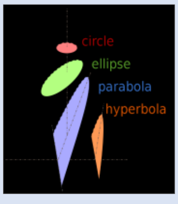
Veranschaulicht die Veranschaulichung das, worum es inhaltlich geht?

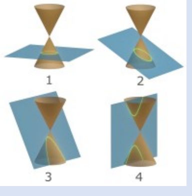
Fehlvorstellungen?

1.1b Kegelschnitt Modell Acryl

Kegelschnittmodell G. Herrman

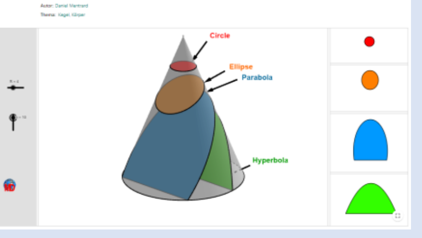
1.1c Kegelschnitt Modell graphisch





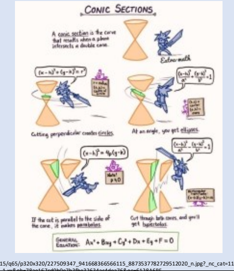
Wikipedia (en.)

1.1e Kegelschnitt Modell dynamisch (Fehler!)



https://www.geogebra.org/m/cc7fu4a9

1.1f Kegelschnitt Modell Comic *Extra-math*



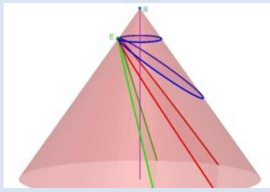
https://scontent-dus1-1.xx.fbcdn.net/v/t1.6435-9/cp0/e15/q65/p320x320/227509347_941668366566115_8873537782729512020_n.jpg?_nc_cat=110&ccb=1-3&_nc_sid=110474&efg=eyJpIjoibyJ9&_nc_ohc=xopctTozpF0AX-

1.1g Kegelschnitt Modell 3D Druck Holzmodell

Uni Marburg

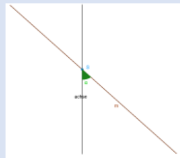
1.2 Kegelschnitt Modell korrekt und systematisch

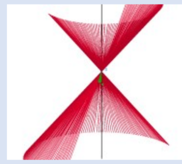
Hohlkegel: Das Schnittobjekt ist eine **Kurve** (hier: Parabel). *3D Druck: R. Hrach*

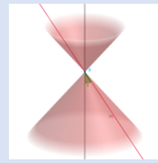


Dynamische Visualisierung: Systematische Variation der Schnittebene von einem Punkt E auf dem Kegel aus.

1.3 Definition Kegel (hohler Doppelkegel)

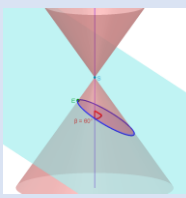






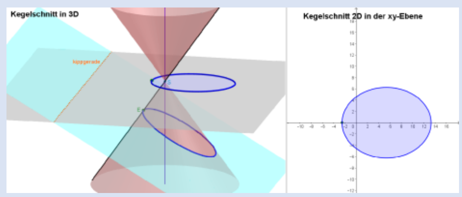
Rotation einer Geraden m um eine andere Gerade: Rotationsfläche.
Unendlicher holhler Doppelkegel (Schupp, S. 1), *infinitecone* in GeoGebra.

1.4 Kegelschnitte dynamisch mit GeoGebra 3D



Ein gemeinsamer Startpunkt E variabel, aber fest!
Systematische Variation von erzeugendem Winkel α und Neigungswinkel β (v. Hanxleden & Hentze, S. 231).

1.5 Wahre Größe



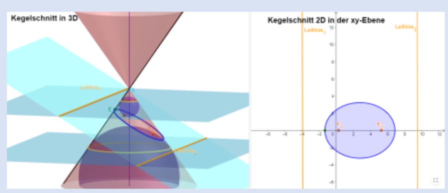
Kipp-Verfahren (Schupp, S. 4f) statt Grundriss-Aufriss

1.6a Dandelinsche-Kugeln Modelle

Modellsammlung TU Darmstadt

SLUB Dresden, Modell Stoll.
Mit Leitgeraden und Brennpunkten.

1.6b Dandelinsche Kugeln



Konstruktiver Zugang zu **Brennpunkten** und **Leitgeraden** (Lietzmann, S. 45)

1.7 Numerische Exzentrizität

$$\varepsilon = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$$

Geometrischer Zugang zur **numerischen Exzentrizität ε**.
(Schupp, S. 9)

1.8 Ganzheitliche Betrachtung

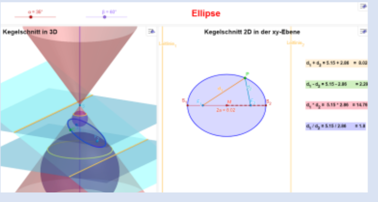
Systematische Variation von β bei gegebenem α und festgehaltenem Punkt E:

- 90° ≥ β > α: Es gibt zwei Kugeln, zwei Brennpunkte und zwei Leitlinien. Alle liegen im gleichen Teil des (Doppel-)Kegels. Der Kegelschnitt ist eine **Ellipse** (im Sonderfall β = 90° ein Kreis).
- β = α: Es gibt *eine* Kugel, *einen* Brennpunkt und *eine* Leitlinie. Die Schnittkurve ist nicht mehr geschlossen, der Kegelschnitt ist eine **Parabel**.
- β < α: Es gibt zwei Kugeln, zwei Brennpunkte und zwei Leitlinien. Sie liegen in unterschiedlichen Teilen des (Doppel-) Kegels. Der Kegelschnitt ist eine **Hyperbel**. (Hilbert & Cohn-Vossen, S. 8)

Einheitlicher Ansatz mit Brennpunkten und Leitgeraden durch die **Dandelinschen Kugeln**.
Numerische Exzentrizität ε aus den Winkeln α und β.

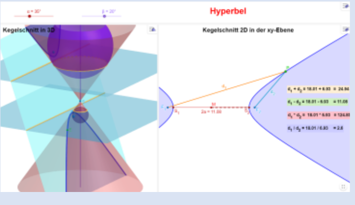
2. Abstände

2.1 Ellipse: Abstand zu den Brennpunkten



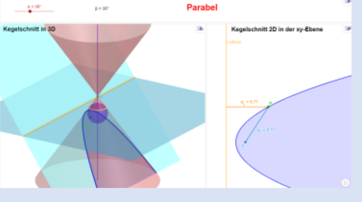
Die Abstandssumme von P zu den Brennpunkten ist konstant: $d_1 + d_2 = 2a$.

2.2 Hyperbel: Abstand zu den Brennpunkten



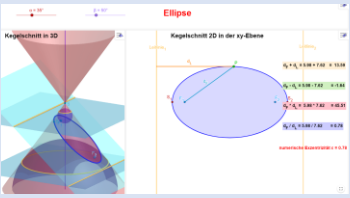
Die Abstandsdifferenz zu den Brennpunkten ist konstant: $d_1 - d_2 = 2a$.

2.3 Parabel: Abstand zu Brennpunkt & Leitgerade



Der Abstand von P zum Brennpunkt ist gleich dem Abstand zur Leitgeraden.

2.4 Allgemein Abstand zu Brennpunkt & Leitgerade



$$\varepsilon = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$$

(Schupp, S. 9)

Geometrischer Zugang zur **numerischen Exzentrizität**.

Der Quotient Abstand von P zum Brennpunkt durch Abstand von P zur Leitgeraden, das Abstandsverhältnis d_F/d_L, ist konstant = ε.
(Hilbert & Cohn-Vossen, S. 25)

2.5 Ganzheitliche Betrachtung

Zunächst je eigene Regeln:

- Ellipse: Konstante Abstandssumme eines Punktes P zu den Brennpunkten.
- Hyperbel: Konstante Abstandsdifferenz eines Punktes P zu den Brennpunkten.
- Parabel: Gleicher Abstand von Punkt P zum Brennpunkt und zur Leitlinie.

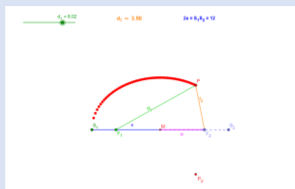
Geleitetes Entdecken in Lernumgebungen.

Dies lässt sich für Parabel, Ellipse und Hyperbel verallgemeinern:

- **Abstandsverhältnis**: Der *Abstand eines Punktes P zum Brennpunkt* geteilt durch den *Abstand zur Leitlinie* ist **konstant** und gleich der ***numerischen Exzentrizität*** $\varepsilon = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} = \frac{d_F}{d_L}$.
  (Hilbert & Cohn-Vossen, S. 25)

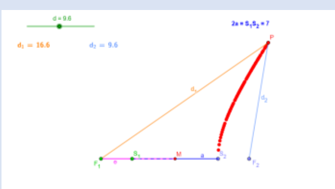
3. Ortslinien

3.1 Ortslinienkonstruktion Ellipse



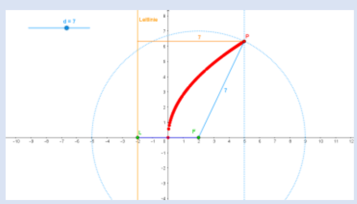
Abstandssumme konstant = 2a. d_1 variabel, d_2 wird passend berechnet.
Gärtner-Konstruktion.

3.2 Ortslinienkonstruktion Hyperbel



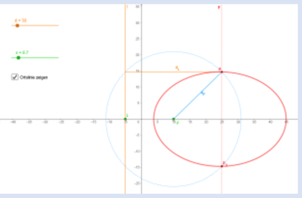
Abstandsdifferenz konstant = 2a. d_1 variabel, d_2 wird passend berechnet.

3.3 Ortslinienkonstruktion Parabel



Abstandsgleichheit Brennpunkt - Leitgerade

3.4 Allgemeine Ortslinienkonstruktion



Abstandsverhältnis d_F/d_L konstant = ε, $d_F = ε\cdot d_L$.

3.5 Ganzheitliche Betrachtung

Am bekanntesten ist wohl die Gärtner-Konstruktion der Ellipse mit zwei Brennpunkten und dann die Parabel-Konstruktion mit einem Brennpunkt und einer Leitlinie.

Parabelzirkel, Ellipsenzirkel als mechanische Geräte.

Ellipse, Parabel, Hyperbel: Auf den ersten Blick unterschiedliche Konstruktionen.

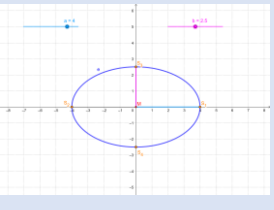
Die Parabel-Konstruktion kann mit Hilfe der numerischen Exzentrizität ε zu einer allgemeinen Ortslinienkonstruktion für alle Kegelschnitte verallgemeinert werden: $d_F = ε\cdot d_L$.

3.6 Ortslinienkonstruktion mittels Leitkreis

Siehe GeoGebra-Book:
https://www.geogebra.org/m/mmpd8yeq#material/pxjux5tq
https://www.geogebra.org/m/mmpd8yeq#material/ufyafsqa

4. Implizite Gleichungen

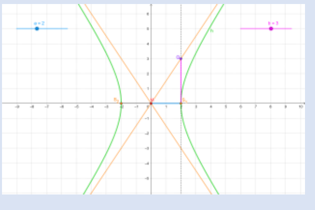
4.1 Mittelpunktgleichung Ellipse



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a: halbe Hauptachse, b: halbe Nebenachse.
a = b = 1: Einheitskreis.

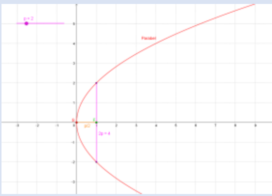
4.2 Mittelpunktgleichung Hyperbel



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a: halbe Hauptachse, b: Ordinate der Asymptote zum Scheitelpunkt

4.3 Scheitelgleichung Parabel



$y^2 = 2px$

p bestimmt die **Öffnung** der Parabel,
2p ist die **Sperrung** (Sehne durch den Brennpunkt)

4.4 Allgemeine Scheitelgleichung

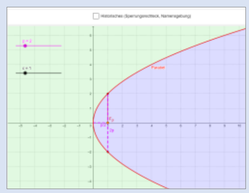
Mit der Gleichung $\mathbf{y^2 = 2p\,x + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2}$ wird ein Kegelschnitt gezeichnet.
Hier liegt der/ ein Scheitelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems.
(Kroll & Vaupel, S. 184).
Entscheidend ist der Wert der numerischen Exzentrizität **ε**.

- Für $0 \leq \varepsilon < 1$ erhält man eine Ellipse,
- für $\varepsilon = 1$ eine Parabel und
- für $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel.

4.5 Ganzheitliche Betrachtung

- Für Ellipse und Hyperbel: Mittelpunkt-Gleichung.
  M liegt im Ursprung des Koordinatensystems.
  Parameter a und b: a ist die halbe Hauptachse.
- Parabel: Scheitelgleichung. S liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Parameter p, 2p ist die Sperrung.
- Mit Hilfe der numerischen Exzentrizität ε können wir diese zu einer **allgemeinen Scheitelgleichung für alle Kegelschnitte** weiter entwickeln: $\mathbf{y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2}$ (Korrektursummand).
- **Parabel als Grenzlinie zwischen Ellipsen und Hyperbeln** verstehen**.**

4.6 ‚Metamorphose der Kegelschnitte‘



Die Parabel $y^2 = 2px$ trennt die xy-Ebene in einen Bereich der Ellipsen und in einen Bereich der Hyperbeln. ***Metamorphose*** der Kegelschnitte.

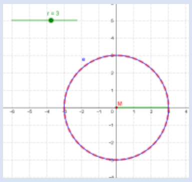
4.7 Historisch: Sperrungsrechteck (Apollonius)

Namensgebung:

- Bei der Parabel ist das Ordinatenquadrat genauso groß wie das Sperrungsrechteck (*paraballein* , gleichkommen).
- Bei der Ellipse ist das Ordinatenquadrat kleiner als das Sperrungsrechteck (*elleipein*, ermangeln).
- Bei der Hyperbel ist das Ordinatenquadrat größer als das Sperrungsrechteck (*hyperballein*, übertreffen).

5. Parametrische Kurven

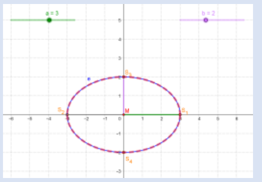
5.1 Parametrisierung Kreis



(r cos(t), r sin(t))

r: Radius des Kreises

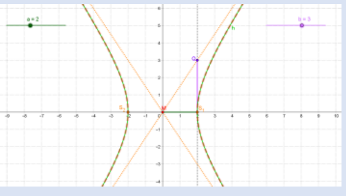
5.2 Parametrisierung Ellipse



(a cos(t), b sin(t))

a: halbe Hauptachse, b: halbe Nebenachse.

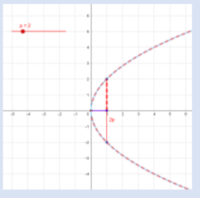
5.3 Parametrisierung Hyperbel



(a cosh(t), b sinh(t))

a: halbe Hauptachse, b: Ordinate der Asymptote im Scheitelpunkt

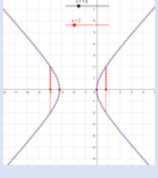
5.4 Parametrisierung Parabel



($2p/t^2$, $2p/t$)

2p ist die Sperrung.

5.5 Allgemeine Parametrisierung



($2p / (t^2 - \varepsilon^2 + 1)$, $2p\, t / (t^2 - \varepsilon^2 + 1)$)

Herleitung der Parametrisierung mit CAS *(Dank an L. Profke und M. Rüsing)*:

$$\text{Löse}(\{y^2 = \varepsilon^2 x^2 - x^2 + 2\,p\,x, y = t\,x\}, \{x, y\})$$

$$\rightarrow \left\{\{x = 0, y = 0\}, \left\{x = 2 \cdot \frac{p}{t^2 - \varepsilon^2 + 1}, y = 2\,p\,\frac{t}{t^2 - \varepsilon^2 + 1}\right\}\right\}$$

5.6 Ganzheitliche Betrachtung

- Ellipse und Hyperbel haben zwei Brennpunkte F_1 und F_2 und einen Punkt M in der Mitte. Für beide finden wir zur Mittelpunktform eine spezielle parametrische Form mit trigonometrischen Funktionen.
- Für die Parabel gibt es keine Mittelpunktform, sondern eine Scheitelform. Der Scheitelpunkt M liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Mit ($2p/t^2$, $2p/t$) haben wir eine parametrische Form dieser Parabel.
- Mit Hilfe der numerischen Exzentrizität ε finden wir **eine einheitliche parametrische Form ($2p / (t^2 - \varepsilon^2 + 1)$, $2p\, t / (t^2 - \varepsilon^2 + 1)$)** für alle Kegelschnitte. Ein Scheitelpunkt liegt dabei immer im Ursprung des Koordinatensystems.

6. Anwendungen? Kegelschnitte sind wichtig!

6.1 Paraboloid

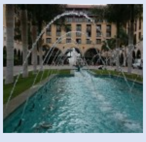
- Parabol-Antenne, Radioteleskope, Solarkocher

Radioteleskop Effelsberg

Entzündung des olympischen Feuers

6.2 Parabelbögen

- Schiefer Wurf, Springbrunnen, Parabel-Brücken



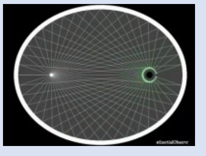
Springbrunnen Anlage

Müngstener Brücke

6.3 Ellipsoid

- Nierensteinzertrümmerer, Flüstergewölbe

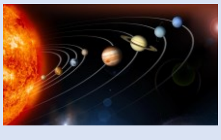
Historischer Nierensteinzertrümmerer
in einer elliptischen Wanne



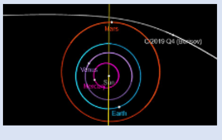
Reflektionen im ebenen Ellipsenspiegel

6.4 Ellipsen, Hyperbeln

- Planeten- & Kometenbahnen berechnen und prognostizieren



Planeten auf (leicht) elliptischen Bahnen



Komet Borisov auf einer hyperbolischen Bahn

6.5 Hyperbelbögen, Hyperboloide

- Architektur und Technik

Kathedrale von Brasilia

Kühltürme von Kraftwerken

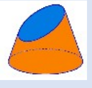
7. Zum Einsatz digitaler Werkzeuge

7.1 Didaktik der Raumgeometrie

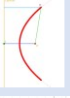
- Darstellende Geometrie: Räumliches Objekt – ebene Darstellung. Aufwändige Konstruktionsverfahren.
- Parzysz (1988): Zeichnung vs Modell.
- GeoGebra 3D: verbindet jetzt diese Aspekte. Virtuelles 3D **Objekt** – neue mächtige Operationen – ebene Ansichten 3D Schrägbild und 2D wahre Größe (**Zeichnung**, Bildschirm) – **Modell** (3D Druck).

7.2 Ganzheitliche Aspekte – einheitliche Darstellung

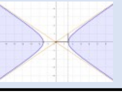
1. **Stereometrisch**: KEGEL-Schnitte
   einheitliche Konstruktion, erzeugender Winkel und Neigungswinkel, numerische Exzentrizität.



2. **Planimetrisch**: Abstände & Ortslinien
   einheitliche Abstandsformeln, numerische Exzentrizität.



3. **Analytisch**: Gleichungen
   einheitliche Gleichungen, numerische Exzentrizität & Sperrung.



7.3a Einheitliche Darstellung

Bei der einheitlichen Darstellung geht es nicht nur um Systematik und formale Aspekte.

Insbesondere ermöglicht die einheitliche Darstellung eine einheitliche Behandlung in jeweils einer Konstruktion, z. B. mit Schiebereglern (α, β, ε, d_L).

Dafür brauchen wir geeignete dynamische Raumgeometrie-Software (z. B. GeoGebra 3D).

7.3b Einheitliche Darstellung mit der Exzentrizität ε

Stereometrisch:
Kegel mit α und β und Dandelischen Kugeln und $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$.

Planimetrisch:
- Abstandsverhältnis $\frac{d_F}{d_L}$ konstant gleich $\boldsymbol{\varepsilon}$.
- Ortslinienkonstruktion mit $d_F = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d_L$.

Analytisch:
- allgemeine Scheitelgleichung $y^2 = 2px + (\boldsymbol{\varepsilon}^2 - 1)x^2$.
- einheitliche Parametrisierung $(2p / (t^2 - \boldsymbol{\varepsilon}^2 + 1), 2p\,t / (t^2 - \boldsymbol{\varepsilon}^2 + 1))$.

7.4 GeoGebra als Werkzeug

- Schon gewohnte erweiterte Basisoperationen von DGS: Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte, Mittelpunkt, Kreis aus drei Punkten, ebener Kegelschnitt aus fünf Punkten.
- Dazu kommen jetzt Befehle für Brennpunkt, Scheitelpunkt, Leitlinie, numerische Exzentrizität, lineare Exzentrizität, Hauptachse, Nebenachse, Mittelpunktgleichung und Scheitelgleichung mit der Nutzung als Kurvenplotter.
- Entweder wird GeoGebra als Black Box genutzt und es werden zu gegebenen Konstruktionen Parameter berechnet.
- Oder es wird umgekehrt herangegangen, indem mit den **Parametern als Schieberegler** gestartet wird und damit konstruiert oder gezeichnet wird.

7.3 Prinzipien des Einsatzes digitaler Werkzeuge

Hier wird besonderer Wert auf dynamische Visualisierung und systematische Variation gelegt (Heintz, Elschenbroich et al, 2017).

- **Dynamische Visualisierung** durch den vorbereiteten Einsatz aufwändiger Konstruktionen (z. B. Dandelinsche Kugeln) in dynamischen Lernumgebungen, Transformation aus dem Raum in die Ebene, Erzeugen von Ortslinien und Kurven (Graphen von Bilinearformen), Entlastung von Rechnungen.
- **Systematische Variation** von Parametern, insbesondere mittels Schiebereglern.

Dadurch wird das Experimentieren, Explorieren und Entdecken gestärkt und ein Einsatz schon ab der Sekundarstufe I möglich. Insbesondere durch den Einsatz dynamischer Lernumgebungen.

7.5 „Soll denn eigentlich nur noch ...“

Dynamische Visualisierung ist mehr als ‚nur Kino‘ !

Veranschaulichung und Reduktion der Komplexität.

(Virtuelle) Schüleraktivitäten stärken.

Das soll keine vertiefte mathematische Behandlung ersetzen (wo sie möglich ist), sondern ergänzen.

Kegelschnitte sind derzeit bestenfalls ein Nischenthema. Dann sollte man das auch so aufbereiten, dass man es auch in Nischen unterrichten kann!

7.6 Wieso, weshalb, warum?

- ***Warum*** **noch Kegelschnitte unterrichten?**
  - geistesgeschichtlich bedeutsam
  - mathematisch enorm vielfältig
  - sehr anwendungsreich
- ***Wie*** **heutzutage Kegelschnitte unterrichten?**
  - Nischen finden, auch schon in der Sekundarstufe I
  - mit digitalen Werkzeugen entdecken (und auch handlungsorientiert)!

7.7 Wie denn, wo denn, was denn?

- ***Was*** **kann man in der Schule punktuell unterrichten und spiralig entwickeln?**
  - Kegel mit Ebenen schneiden.
  - Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$, Ellipsengleichung als Verallgemeinerung. Funktion?
    GeoGebra: Kein Objekt Kreis, sondern Objekttyp Kegelschnitt.
  - Parametrisierte Kreisgleichung $(r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t))$, Ellipse als Verallgemeinerung.
  - Abstandseigenschaft und Ortslinien-Konstruktion (Gärtner) für die Ellipse.
  - Abstandseigenschaft und Brennpunkt bei der Parabel.
  - Schnitte von Kegel und Ebene systematisch betrachten.
    Parabel als besonderen Fall, als Grenzfall verstehen.
    Auch mit realen Objekten/ Modellen aus dem 3D Drucker arbeiten (Technik, Informatik).
- ***Was*** **in der Hochschule lehren?**
  - ...

Literatur

- Elschenbroich, Hans-Jürgen (2023): Kegelschnitte mit GeoGebra 3D dynamisch erkunden – genetisch, ganzheitlich, dynamisch, anschaulich. Erscheint in: Filler, A. & Lambert, A. (Hrsg.): Freude an Geometrie - Zum Gedenken an Hans Schupp. Springer
- Elschenbroich, Hans-Jürgen (2021): Kegelschnitte dynamisch erkunden. GeoGebra Book. www.geogebra.org/m/mmpd8yeq
- Haftendorn, Dörte (2010): Mathematik sehen und verstehen. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg
- Haftendorn, Dörte (2017): Kurven erkunden und verstehen. Springer Spektrum, Heidelberg
- von Hanxleben, Eberhard & Hentze, Rudolf (1952): Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. Oberstufe: Geometrie. Vierte Auflage. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Berlin
- Heintz, G., Elschenbroich, H.-J, Laakmann, H., Langlotz, H. Rüsing, M., Schacht, R., Schmidt, R. & Tietz, C. (2017): Werkzeugkompetenzen. Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben. MNU & T3. Verlag Medienstatt, Menden
- Hilbert, David & Cohn-Vossen, Stephan (1996): Anschauliche Geometrie. Zweite Auflage. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg
- Kroll, Wolfgang & Vaupel, Jürgen (1986): Grund- und Leistungskurs Analysis. Lehr- und Arbeitsbuch. Dümmler Verlag, Bonn
- Lehrerinnenfortbildung Baden-Württemberg. Bildungsplan 2016. www.lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/imp/gym/bp2016/fb3/m03_geo/4_loesungen/
- Lietzmann, Walter (1949): Elementare Kegelschnittlehre. Ferd. Dümmler’s Verlag, Bonn
- Parzysz, Bernard (1988): ‚Knowing‘ vs ‚Seeing‘. Problems of the plane representation of space geometry figures. In: Educational Studies in Mathematics 19, S. 79-92
- Schumann, Heinz (2004): Behandlung der Kegelschnitte im virtuellen Raum mit Cabri 3D. http://www.mathe-schumann.de/veroeffentlichungen/dynamische_raumgeometrie_1/005.pdf
- Schupp, Hans (2000): Kegelschnitte. Überarbeitete Fassung der 1988 im B. I. Wissenschaftsverlag erschienenen ‚Kegelschnitte‘. Franzbecker, Berlin, Hildesheim

Links

- Elschenbroich, Hans-Jürgen (2021): Kegelschnitte dynamisch erkunden. GeoGebra Book. www.geogebra.org/m/mmpd8yeq
- Dutkowski, Wilfried: Kegelschnitte in der Sekundarstufe I. https://www.geogebra.org/m/czwbuphh
- Grund. Olaf: Kegelschnitte. https://www.geogebra.org/m/cnehwm7f
- Haftendorn, Dörte: Kegelschnitte 3D. https://www.geogebra.org/m/ve7aJJpK
- Lindner, Andreas: Kegelschnitte. https://www.geogebra.org/m/pzmutDdQ

Kontakt

- elschenbroich@t-online.de