Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 5 - proyección ortogonal de un vector sobre otro y producto escalar

1. Dados los vectores $\vec{u}=(3,4)$ **,** $\vec{v}=(-2,5)$ **,** $\vec{w}=(-4,3)$ **.**

a) Normalizarlos.

b) Hallar el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{w}$ **.**

a) $|\vec{u}|=\sqrt{9+16}=5 \rightarrow \hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

$|\vec{v}|=\sqrt{4+25}=\sqrt{29} \rightarrow \hat{v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=(\frac{-2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}})$

$|\vec{w}|=\sqrt{16+9}=5 \rightarrow \hat{w}=\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}=(\frac{-4}{5},\frac{3}{5})$

b) Los vectores $\vec{u}=(3,4)$ y $\vec{w}=(-4,3)$ son perpendiculares, ya que tienen sus componentes intercambiadas de posición y una de ellas con signo opuesto. Y el producto escalar de dos vectores perpendiculares es igual a 0.

$\vec{u}\cdot\vec{w}=0$

2. Calcula la proyección del vector $\vec{u}=(5,-1)$ sobre el vector $\vec{v}=(-2,3)$, sabiendo que el ángulo que forman ambos vectores entre sí esde 135º.

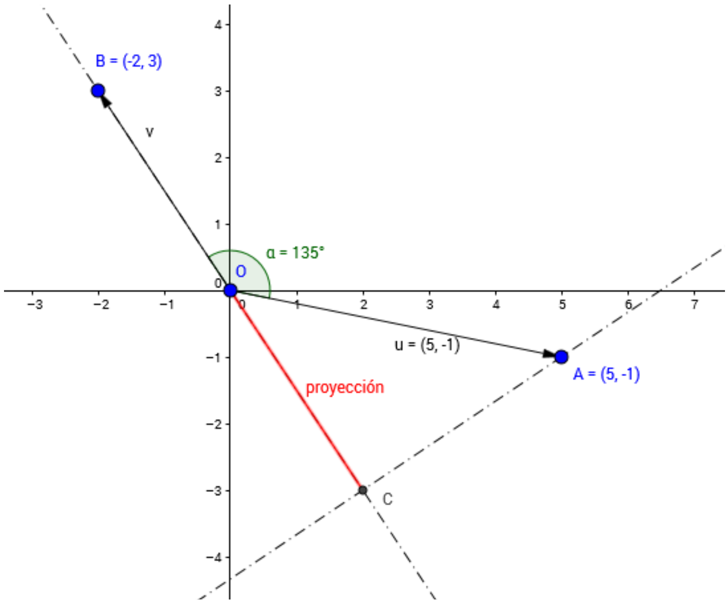
Al proyectar un vector $\vec{u}$ sobre otro vector $\vec{v}$ obtenemos un escalar positivo (número real) igual al módulo del vector $\vec{u}$ por el coseno del ángulo que forman ambos vectores.

$$Proyección=|\vec{u}|\cdot\cos(\vec{u}\hat{,}\vec{v})$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$$

$$(\vec{u}\hat{,}\vec{v})=135º$$

$$Proyección=|\vec{u}|\cdot\cos(\vec{u}\hat{,}\vec{v})=\sqrt{26}\cdot(-0,707)=-3,6$$



¿Cómo comprender el signo negativo de la proyección? Muy sencillo, la "sombra" que genera el primer vector $\vec{u}$ sobre el segundo vector $\vec{v}$ no recae sobre el propio vector $\vec{v}$ sino sobre su prolongación en sentido opuesto.

3. ¿Pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$? Justifica la respuesta.

El producto escalar de dos vectores se define como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman entre sí.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$

Si el producto escalar es igual a $8 \rightarrow |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=8$

Si $|\vec{u}|=2$ y $|\vec{v}|=3 \rightarrow 2\cdot 3\cdot\cos\alpha=8 \rightarrow \cos\alpha=\frac{4}{3}>1$

Este resultado no es posible, ya que el función coseno está acotada superiormente por 1 . Por lo tanto, no pueden existir dos vectores con las condiciones del enunciado.