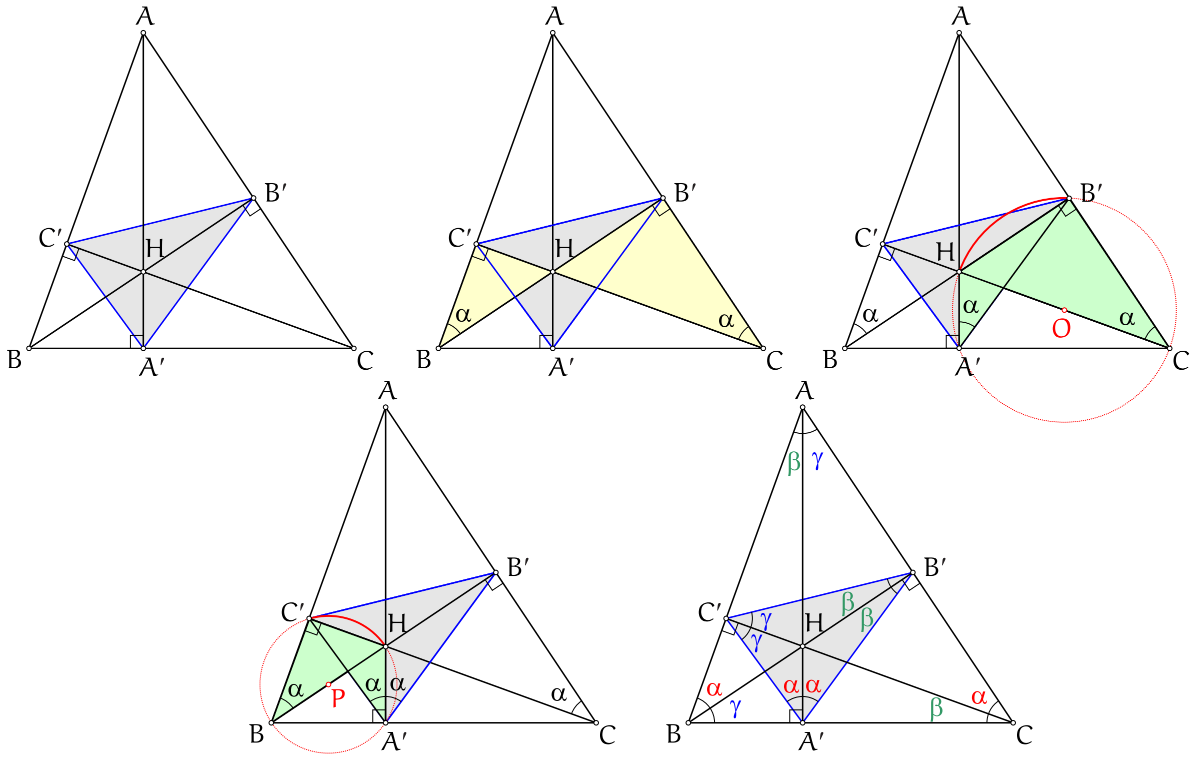
TEOREMA. As alturas de um triângulo acutângulo são bissetrizes de seu triângulo órtico.

ou, equivalentemente:

TEOREMA. O ortocentro de um triângulo acutângulo é o incentro de seu triângulo órtico.

Demonstração:

Ao longo desta demonstração, que é "*quase visual*", vamos considerar a nomenclatura exposta nas figuras abaixo:



Considere um triângulo acutângulo ABC, com alturas AA', BB' e CC' e ortocentro H. Assim, o triângulo $A'B'C'$ é o triângulo órtico de ABC (veja a primeira figura).

Observemos que os triângulos retângulos $HC'B$ e $HB'C$ são semelhantes, pois os ângulos do vértice H são opostos pelo vértice e, portanto congruentes. Logo, os ângulos em B e C são congruentes (veja os triângulos amarelos da segunda figura). Chamemos as medidas desses ângulos de α.

Sendo $HB'C$ um triângulo retângulo em B', então ele está inscrito em um círculo de diâmetro HC, que é sua hipotenusa. Mas $HA'C$ também é um triângulo retângulo em A', então ele também está inscrito em um círculo de diâmetro HC, que é sua hipotenusa. Conclusão: o quadrilátero $HB'CA'$ está inscrito em um círculo de centro O e diâmetro HC. Como os ângulos $H\widehat{C}B'$ e $H\widehat{A'}B'$ enxergam o mesmo arco $\widehat{HB'}$ no círculo de centro O e diâmetro HC, então tais ângulos são congruentes e, portanto, medem α (veja os triângulos verdes na terceira figura).

De modo análogo, o quadrilátero $HC'BA'$ está inscrito em um círculo de centro P e diâmetro HB e podemos concluir que os ângulos $H\widehat{B}C'$ e $H\widehat{A'}C'$ são congruentes e, portanto, medem α (veja os triângulos verdes da quarta figura).

Com isso, concluímos que a altura AA' do triângulo ABC (relativa ao vértice A) é, também, bissetriz do triângulo $A'B'C'$ (relativa ao vértice A').

Naturamente, o mesmo raciocínio que aplicamos para concluir a bissetriz no vértice A' pode ser replicado para o vértice B' e para o vértice C'. Na última figura temos todos os ângulos representados e, com isso, concluímos a demonstração.