Teoría – Tema 5

Teoria - 5 - cociente de polinomios con raíces simples

Grado del numerador P(x) menor que Grado del denominador Q(x) y raíces simples en el denominador

Consideremos la integral de un cociente de polinomios.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Donde el grado del numerador $P(x)$ es inferior al grado del denominador $Q(x)$.

Al afrontar estas integrales vamos a **obtener tanto las raíces del numerador como del denominador**, por si fuese posible simplificar algún factor común.

Si no podemos simplificar, o tras hacerlo seguimos teniendo un cociente de polinomios de integral no inmediata, **expresaremos el denominador factorizado en sus raíces** (que pueden ser reales y/o complejas).

En este primer apartado, vamos a estudiar inicialmente los casos en que todas las raíces del denominador son simples:

$$Q(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

Y el cociente de polinomios podemos expresarlo como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\ldots+\frac{N}{x-x_n}$$

Donde los coeficientes $A, B, \ldots, N$ son coeficientes reales que llamaremos coeficientes indeterminados.

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}=\frac{A\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)+B\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)+\ldots+N\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}$$

Igualamos los denominadores:

$$P(x)=A\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)+B\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)+\ldots+N\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

De tal forma que los factores indeterminados $A, B, \ldots, N$ podemos conocerlos **dando valores a la variable** x **.** Lo más cómodo es emplear los valores de las propias raíces del denominador.

Si $x=x_1$ → obtenemos A

Si $x=x_2$ → obtenemos B

…

…

Si $x=x_n$ → obtenemos N

Ejemplo 1 resuelto

$$\int \frac{4x^2+8x+6}{x^3+2x^2-x-2}\,dx=\int \frac{4x^2+8x+6}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,dx$$

$$\frac{4x^2+8x+6}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$$

$$4x^2+8x+6=A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+1)$$

Si $x=1 \;\rightarrow\; 18=6A \;\rightarrow\; A=3$

Si $x=-1 \;\rightarrow\; 2=-2B \;\rightarrow\; B=-1$

Si $x=-2 \;\rightarrow\; 6=3C \;\rightarrow\; C=2$

Sustituyendo estos coeficientes en la integral:

$$\int \frac{4x^2+8x+6}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,dx=\int\left[\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}\right]dx=\int\left[\frac{3}{x-1}+\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right]dx$$

$$\int\left[\frac{3}{x-1}+\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right]dx=3\ln|x-1|-\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$$