Trajektorien geladener Körper im konstanten EM-Feld

Walter Dickmann

Sei $\vec{E}$ ein konstantes elektrischen und $\vec{B}$ ein konstantes magnetisches Feld. Diese Felder seien orthogonal zueinander, d.h. $\vec{E} \perp \vec{B}$. O.B.d.A. seien $\vec{E} = E\,\vec{e}_y$ und $\vec{B} = B\,\vec{e}_x$ mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ in x- bzw. in y-Richtung. In dieses gekreuzte elektromagnetische Feld werde ein Körper der Masse m mit der Ladung q geschossen. Die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ sei beliebig orientiert.

Die auf den Körper wirkende Lorentzkraft $\vec{F}_\mathrm{L}$ beträgt

$$\vec{F}_\mathrm{L} = q \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right), \tag{1}$$

wobei $\vec{v}$ die momentane Geschwindigkeit im gewählten Bezugssystem darstellt.

Unter Vernachlässigung weiterer Kräfte lautet die Bewegungsgleichung daher

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right), \tag{2}$$

oder als Spaltenvektoren in kartesischen Koordinaten ausgeschrieben

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = q \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right). \tag{3}$$

Diese Differentialgleichung für das Vektorfeld $\vec{v}(t)$ ist äquivalent zu einem System aus drei Differentialgleichungen für die Skalarfelder $v_x(t)$, $v_y(t)$ und $v_z(t)$. Nach der Berechnung des Vektorproduktes ergibt sich das folgende System:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_x(t) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_y(t) = \frac{q}{m} \cdot E + \frac{q}{m} \cdot B \cdot v_z(t), \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_z(t) = -\frac{q}{m} \cdot B \cdot v_y(t). \tag{6}$$

Die Gleichung der x-Komponente lässt sich direkt integrieren und es folgt eine gleichförmige Bewegung in diese Richtung:

$$v_x(t) = v_{0,x} \quad \text{und} \quad x(t) = v_{0,x} \cdot t. \tag{7}$$

Hierbei wurde o.B.d.A. der Anfangsort $\vec{x}(0) = \vec{0}$ festgelegt.

Die Gleichungen (5) und (6) werden entkoppelt, indem (5) einmal nach der Zeit abgleitet wird:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} v_y(t) = \frac{q}{m} \cdot B \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_z(t). \tag{8}$$

Für die erste Ableitung von $v_z(t)$ wird nun die rechte Seite von Gleichung (6) eingesetzt:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} v_y(t) = -\left(\frac{q}{m} \cdot B\right)^2 \cdot v_y(t). \tag{9}$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist eine harmonische Schwingung in y-Richtung mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_{0,y}$ und mit der Kreisfrequenz $\omega = qB/m$ und der Amplitude $y_0 = m\sqrt{{v_{0,y}}^2 + {v_{0,z}}^2}/(qB)$:

$$v_y(t) = v_{0,y} \cdot \cos\left(\frac{q}{m} \cdot B \cdot t\right) + v_{0,z} \cdot \sin\left(\frac{q}{m} \cdot B \cdot t\right), \tag{10}$$

$$y(t) = \frac{m}{q \cdot B} \cdot \left(v_{0,y} \cdot \sin\left(\frac{q}{m} \cdot B \cdot t\right) - v_{0,z} \cdot \cos\left(\frac{q}{m} \cdot B \cdot t\right)\right). \tag{11}$$

Einsetzen dieser Funktion $v_y(t)$ in Gleichung (5) ergibt die Bewegung in z-Richtung –diese ist eine Überlagerung einer harmonischen Schwingung mit identischer Kreisfrequenz und Amplitude wie die Schwingung in y-Richtung einerseits und einer gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit $-E/B$ andererseits:

$$v_z(t) = -v_{0,y} \cdot \sin\left(\frac{q}{m} \cdot B \cdot t\right) + v_{0,z} \cdot \cos\left(\frac{q}{m} \cdot B \cdot t\right) - \frac{E}{B}. \tag{12}$$

$$z(t) = \frac{m}{q \cdot B} \cdot \left(v_{0,y} \cdot \cos\left(\frac{q}{m} \cdot B \cdot t\right) + v_{0,z} \cdot \sin\left(\frac{q}{m} \cdot B \cdot t\right)\right) - \frac{E}{B} t. \tag{13}$$

Somit ergibt sich die Trajektorie $\vec{x}(t)$ des geladenen Körpers zu

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0,x} \cdot t \\ \frac{m}{q \cdot B} \cdot \left(v_{0,y} \cdot \sin\left(\frac{q}{m} \cdot B \cdot t\right) - v_{0,z} \cdot \cos\left(\frac{q}{m} \cdot B \cdot t\right)\right) \\ \frac{m}{q \cdot B} \cdot \left(v_{0,y} \cdot \cos\left(\frac{q}{m} \cdot B \cdot t\right) + v_{0,z} \cdot \sin\left(\frac{q}{m} \cdot B \cdot t\right)\right) - \frac{E}{B} t \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Der Körper bewegt sich also gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v_{0,x}$ in x-Richtung. Diese gleichförmige Bewegung ist von zwei weiteren Bewegungen überlagert: erstens, einer Kreisbewegung in der yz-Ebene.

Da die harmonischen Schwingungen in y- und in z-Richtung relativ zueinander um $\frac{\pi}{2}$ rad phasenverschoben sind, ist die Überlagerung dieser Schwingungen die für Bewegungen im konstanten Magnetfeld typische *Kreisbewegung* in der yz-Ebene. Der Radius dieser Kreisbahn („**Larmor-Radius**“) ist

$$r = y_0 = \frac{m \cdot \sqrt{{v_{0,y}}^2 + {v_{0,z}}^2}}{q \cdot B}, \tag{15}$$

die Kreisfrequenz („**Larmor-Frequenz**“) beträgt

$$\omega = \frac{q \cdot B}{m}. \tag{16}$$

Die Überlagerung dieser Kreisbewegung und der gleichförmigen Bewegung in x-Richtung ergibt eine *helixförmige* Bahn mit Radius r und Hub

$$h = \frac{2\pi \cdot v_{0,x}}{\omega} = \frac{2\pi \cdot m \cdot v_{0,x}}{q \cdot B}. \tag{17}$$

Diese helixförmige Bewegung wird, zweitens, von einer gleichförmigen Bewegung in z-Richtung mit der Geschwindigkeit $-E/B$ überlagert. Die Richtung dieses „Plasmadrifts" scheint zunächst kontra-intuitiv: man würde naiv erwarten, dass der Drift entlang des elektrischen Feldes (also in y-Richtung) geschieht. Die Antwort auf diesen scheinbaren Widerspruch liegt in der Wechselwirkung mit dem Magnetfeld. Die elektrische Kraft führt zunächst tatsächlich zu einer Beschleunigung parallel zu $\vec{E}$, aber das Magnetfeld lenkt die resultierende Bewegung sofort in die Driftrichtung ab, also senkrecht zu $\vec{E}$ und zu $\vec{B}$. Sobald sich das Teilchen in die Driftrichtung bewegt, lenkt das Magnetfeld es gegen die elektrische Kraft zurück, so dass die durchschnittliche Beschleunigung in Richtung der elektrischen Kraft gleich Null ist.

Die insgesamt resultierende Bahnkurve ist daher eine **in z-Richtung (senkrecht zu $\vec{E}$ und zu $\vec{B}$) verkippte Helix** mit dem Verkippungswinkel

$$\tan(\alpha) = -\frac{E}{B \cdot v_{0,x}}. \tag{18}$$

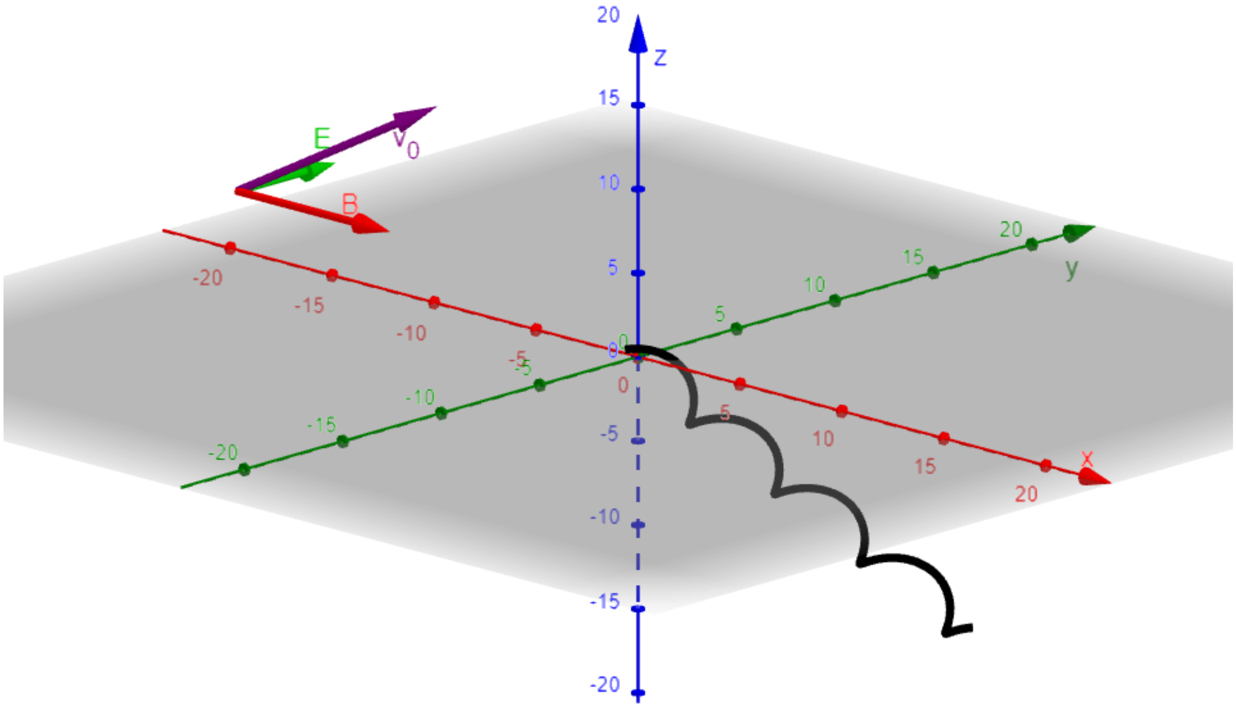

Abb. 1:

Trajektorie eines Körpers der Masse $m = 1$ kg und mit der Ladung $q = 1$ C. Die Beträge von elektrischer Feldstärke und magnetischer Flussdichte sind $E = 1\,\mathrm{N/C}$ bzw. $B = 1.5$ T. Als Anfangsgeschwindigkeit wurde $v_{0,x} = v_{0,y} = v_{0,z} = 1\,\mathrm{m/s}$ gewählt. Die Längen sind in Metern angegeben.

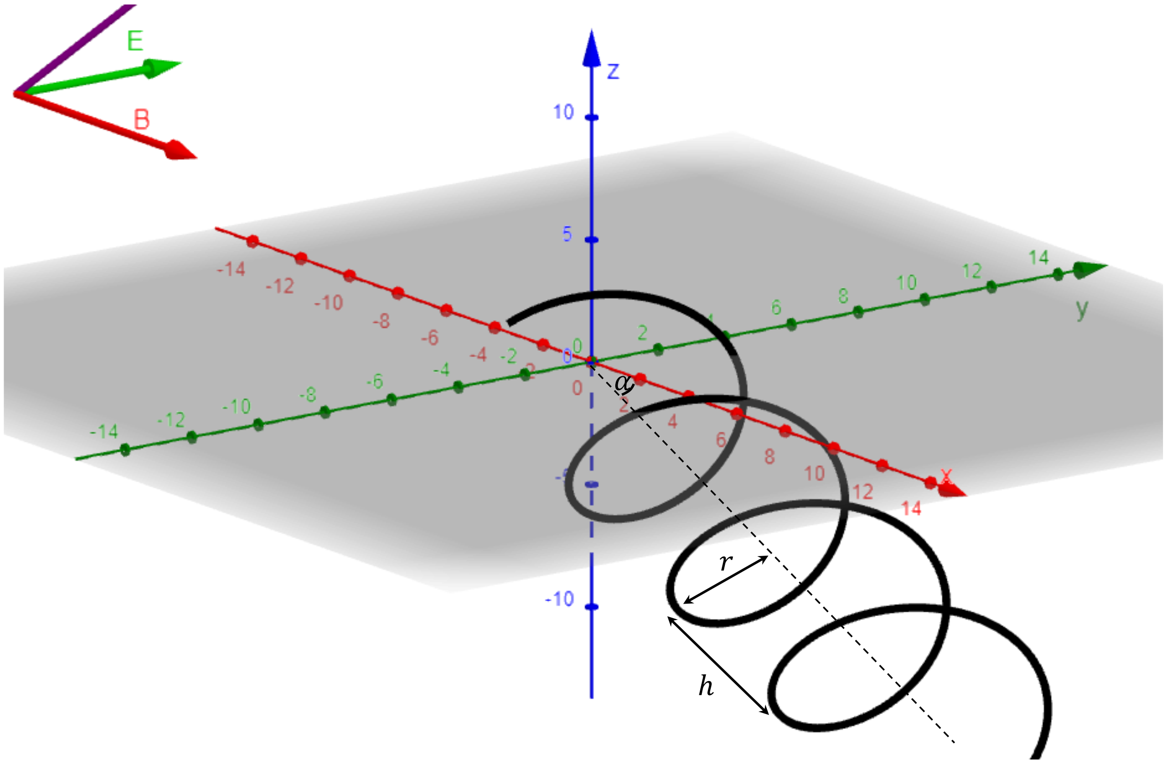

Abb. 2:

Veranschaulichung des Larmor-Radius r, des Helixhub h und des Verkippungswinkels α.

Ein zugehöriges Applet ist unter

https://www.geogebra.org/m/k5cgxwg3

zu finden.