6. Die Summenregel der Ableitung

Ganzrationale Funktionen bestehen aus aufsummierten Potenzfunktionen mit einem Koeffizienten:

$$f: x \longmapsto a_n \cdot x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Um für diesen Funktionstyp eine Ableitungsregel zu finden, müssen wir in einem ersten Schritt herausfinden, was die Ableitung einer Summe von Potenzfunktionen ist.

Dazu betrachten wir die Funktion $f: x \longmapsto g(x) + h(x)$, wobei g und h differenzierbare Funktionen sind. Es folgt nach der Definition:

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) + h(x) - [g(x_0) + h(x_0)]}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) + h(x) - g(x_0) - h(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \\
&\overset{DEF}{=} g'(x_0) + h'(x_0)
\end{aligned}
$$

MERKE

Die Ableitung einer Summe von Funktionen ist die Summe der Ableitungsfunktionen:

$$f(x) = g(x) + h(x) \longrightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = x^3 - x \longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$f(x) = x^4 + \frac{1}{x^3} \longrightarrow f'(x) = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$$