S3 : Loi binomiale

I/ Vocabulaire :

Expérience aléatoire :
Expérience dont l'ensemble des résultats possibles est connu à l'avance, mais dont le résultat final est déterminé uniquement par le hasard. Par exemple, lorsque l'on lance une pièce, on sait que l'on peut obtenir face ou pile. Cependant on ne sait pas quel sera le résultat du lancer.

Variable aléatoire : Nombre associé au résultat d'une expérience aléatoire. Elle permet en général de comptabiliser un évènement, ou de recenser les gains possibles dans un jeu. Par exemple si l'on lance une pièce 5 fois en l'air, on peut comptabiliser le nombre de face obtenus, ce nombre sera une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs de 0 à 5, puisqu'en lançant cinq fois la pièce on peut obtenir entre 0 et 5 face.

Probabilité :
Quelque soit le contexte, une probabilité est toujours définie par le rapport suivant :

$$P = \frac{Nombres\ de\ résultats\ favorables}{Nombre\ de\ résultats\ possibles}$$

Univers :
C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience. Sa probabilité est toujours égale à 1, puisque le nombre de résultats favorables est égal au nombre de résultats possibles.

Evènement :
C'est un résultat attendu de l'expérience aléatoire. Par exemple lors du tirage d'une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes, on peut définir l'évènement C : tirer un cœur. On nommera souvent les évènements avec des lettres et nous noterons leur probabilité de la manière suivante $P_{(C)}$.
Dans notre exemple :

$$P_{(C)} = \frac{Nombre\ de\ coeurs\ dans\ le\ jeu}{Nombre\ total\ de\ cartes\ dans\ le\ jeu} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

Evènement contraire :
C'est l'inverse d'un évènement et il se note avec une barre au-dessus de la lettre de l'évènement. Par exemple si C est l'évènement tirer un cœur, alors $\bar{C}$ sera l'évènement ne pas tirer de cœur. Sa probabilité est :

$$P_{(\bar{C})} = 1 - P_{(C)}$$

I/ Les arbres probabilité :

1) L'arbre des probabilités :

Un arbre de probabilité est une façon de lister les différents cas possibles, Chaque branche représente un scénario possible lors de la réalisation de l'expérience aléatoire. Il existe de deux types d'arbres:

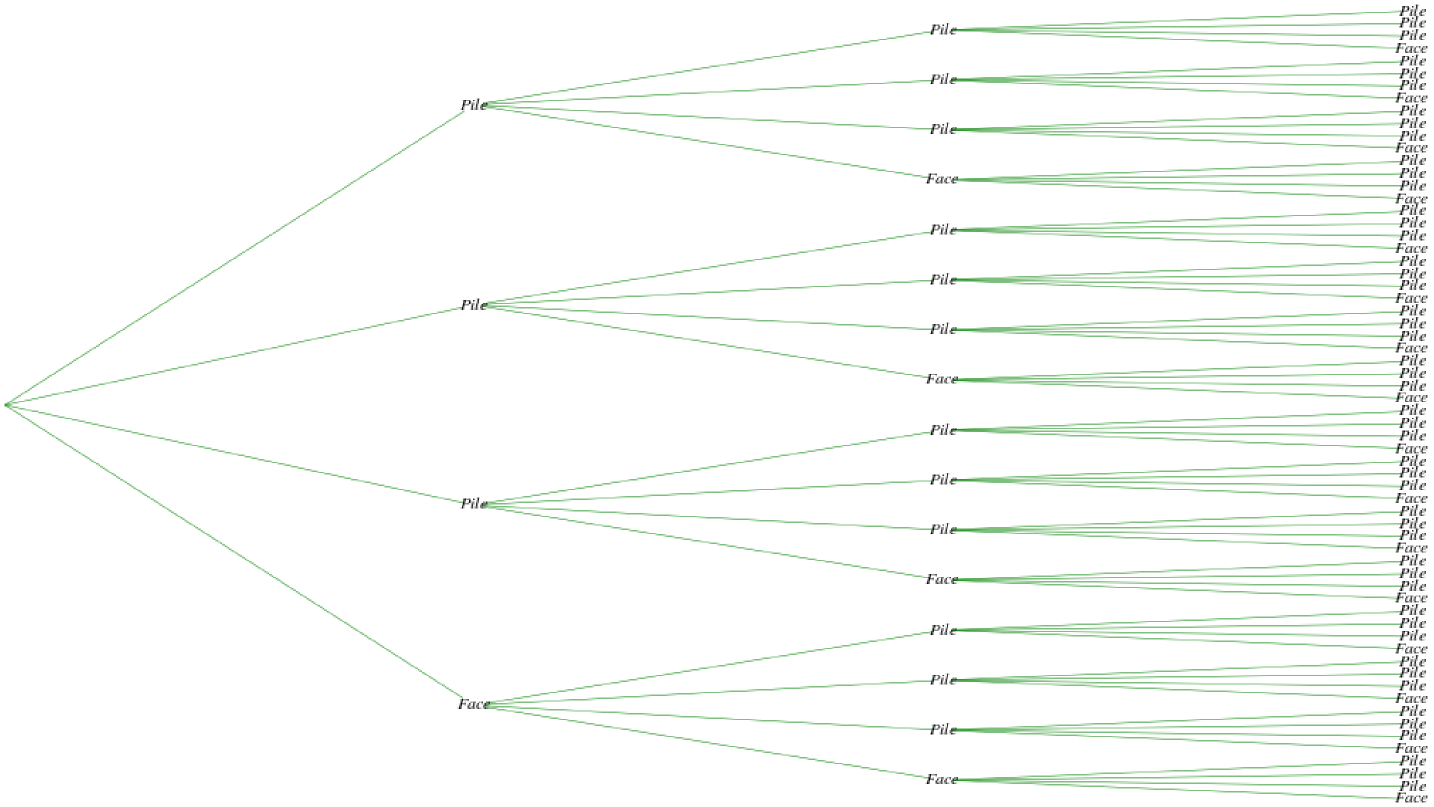
- Les arbres non pondérés : Chaque branche de l'arbre a les mêmes chances de se produire que les autres.
- Les arbres pondérés : Les branches ont des probabilités différentes de se produire, dans ce cas la probabilité sera notée sur la branche correspondante.

2) Dessiner un arbre :

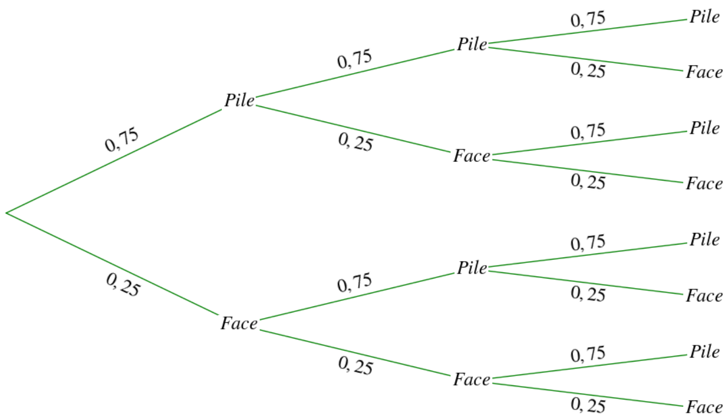
Pour dessiner un arbre de probabilité, il suffit de représenter chaque issue possible de l'expérience par une branche de l'arbre. Ensuite on note sur la branche la probabilité que cette issue se réalise. Si l'expérience aléatoire se déroule en plusieurs étapes, au bout de chacune des branches de précédente, il suffira d'ajouter les issues possibles en fonction du contexte de l'énoncé.

Exemple :
On lance la même pièce trois fois de suite. Cette pièce n'est pas équilibrée, elle a trois fois sur quatre elle tombe sur pile. Représenter cette situation par un arbre.

Il est possible de représenter cette situation de deux manières, par un arbre non pondéré comme celui-ci :



On remarque que cet arbre est très grand et difficilement lisible, chaque branche ayant la même chance. On peut aussi contracter un peu l'arbre pour en faire un arbre pondéré, Pour le premier lancer, il y a 4 branches dont trois donnent pile et une face. Donc on donne le poids ¾ à la branche pile et ¼ à la branche face :



Cet arbre est beaucoup plus synthétique et plus lisible. C'est pour cela que l'on le préférera aux arbres non pondérés.

3) Propriétés de l'arbre :

P1 : Pour chaque lancer symbolisé par un embranchement sur l'arbre, la pièce ne peut tomber que sur pile ou face, donc la somme des deux probabilités sur chaque branche doit être égale à 1.

P2 : Lorsque l'on se déplace le long d'une branche il faudra multiplier entre elles les probabilités rencontrées en chemin.

P3 : Si l'on désire la probabilité d'un évènement correspondant à plusieurs branches de l'arbre on additionne ces probabilités.

Exemple :

A l'aide de l'arbre précédent, calculons la probabilité d'obtenir deux fois pile et une fois face.

La probabilité de pile est 0,75, celle de face est de 0,25. On rencontrera en chemin deux fois la probabilité de pile et une fois celle de face donc on les multiplie entre elles (P2) : 0,75 x 0,75 x 0,25 = 0,14. On compte maintenant dans l'arbre le nombre de chemins donnant la combinaison de deux pile et d'un face. On en dénombre 3. Donc la probabilité recherchée est : 3 x 0,14 = 0,42 (P3). La probabilité d'obtenir deux pile et un face est donc de 0,42 ou 42%.

III/ Epreuve de Bernoulli :

Définition :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire avec uniquement deux issues possibles : Le succès ou l'échec. Si **le succès a une probabilité p** d'arriver, alors l'échec a une probabilité de 1 – **p**.

On peut souvent créer une épreuve de Bernoulli en considérant un évènement et son contraire dans une expérience aléatoire. Par exemple, lorsque l'on tire une carte dans un jeu de 32 carte et que l'on cherche à obtenir un cœur. On peut considérer comme succès l'évènement piocher un cœur et comme échec l'évènement ne pas piocher de cœur. Ainsi nous avons une épreuve de Bernoulli dans la probabilité de succès est ¼, comme vu précédemment.

IV/ Répétition indépendantes d'une épreuve de Bernoulli : La loi Binomiale.

1) Précision sur le vocabulaire :

On est dans le cas de répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli lorsque l'on répète plusieurs fois la même expérience aléatoire correspondant aux critères précédents, sans que les résultats d'une épreuve dépendent de la précédente.

2) Loi Binomiale :

Si l'on désire compter le nombre de succès de **n** répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli, on peut créer une variable aléatoire, souvent notée X. et établir sa loi de probabilité. La variable aléatoire X suivra alors une loi de probabilité dite binomiale de paramètres **n** et **p**, **n étant le nombre de répétitions de l'épreuve** et **p la probabilité de succès**. On notera B(n,p) cette loi de probabilité. Si dans des cas simple il est possible de calculer la probabilité à l'aide d'un arbre, lorsque le nombre de répétitions grandi, l'arbre deviens impossible à dessiner. Cependant il existe un formule pour calculer ces probabilités facilement. Nous admettrons que la probabilité d'obtenir **k** succès parmis n répétitions se calcul de la manière suivante :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Cette formule parait complexe au premier abord, cependant elle peut se comprendre et se retrouver facilement. Etudions là morceaux par morceaux.

- p^k : **p est la probabilité de réussites**, et l'on **désire k réussites**, dans l'arbre nous croiserons donc k fois la probabilité de réussite, et les probabilités se multiplient entre elles (P2) donc nous aurons dans l'arbre p x p x p… x p k fois, autrement dit p^k.
- $(1-p)^{n-k}$: 1 – p est la probabilité d'échec, si l'on a k succès sur n répétitions, il nous reste donc n – k échecs que nous croiserons sur l'arbre. donc (1 – p) x (1 – p) … x (1 – p) et cela n – k fois. Autrement dit : $(1-p)^{n-k}$.
- $\binom{n}{k}$: Se lit k parmi n, il correspond au nombre de chemins possibles donnant k succès parmi n réussite. Et multiplie donc logiquement les probabilités précédentes.

Trouver $\binom{n}{k}$ à l'aide de la calculatrice :

Sur TI :

taper la valeur de **n**
[math] aller dans le menu PRB (pour probabilité)
Choisir Combinaison
taper la valeur de **k**

Voici ce qui devrait apparaitre à l'écran si vous calculez $\binom{4}{3}$:
4 Combinaison 3
Et cela donnerait le résultat 4.

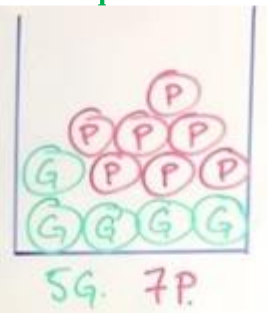
Sur Casio :

[OPTN]
Aller dans le menu PROB (pour probabilité)
Taper la valeur de n
Sélectionner nCr dans la liste au bas de l'écran
tapez la valeur de k.

Voici ce qui devrait apparaitre à l'écran si vous calculez $\binom{4}{3}$:
4C2
Et le résultat serait 4

Explication de la formule avec un exemple :

On tire **quatre fois de suite** avec remise un jeton dans l'urne suivante :



L'urne contient 12 jetons répartis de la manière suivante :

- 5 verts avec la lettre G pour gagnant.
- 7 rouges avec la lettre P pour perdant.

Quelle est la probabilité d'obtenir **3 boules gagnantes** ?

On reconnait une répétition d'une même épreuve de Bernoulli puisque le jeton est remis dans l'urne à chaque fois. Le succès étant de piocher un jeton P, calculons sa probabilité :

$$p = \frac{\text{Nombre de jetons G}}{\text{Nombre total de jetons}} = \frac{5}{12}$$

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de succès, donc au nombre de jetons G piochés. On désire X = **3** et donc calculer P(X = **3**). X suit une loi binomiale de paramètres **n = 4** et **p = 5/12**.

Application de la formule :

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \times \left(\frac{5}{12}\right)^{3} \times \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{4-3} \approx 0{,}17$$

Il y a donc une probabilité de 0,17 de tirer trois boules gagnantes.

Pour une explication en vidéo vous pouvez consulter la vidéo suivante : Calculer une probabilité sur une loi binomiale - Première ES-L sur la chaine de Yvan Monka.

V/ Espérance d'une loi binomiale :

Nous admettrons que l'espérance d'une loi binomiale est :
E(X) = **n** × **p**

Exemple :

Si vous répondez au hasard a un QCM de 10 questions, possédant 4 réponses possibles, une juste et trois fausse. Si l'on pose X la variable aléatoire comptant le nombre de bonne réponses :
X suit une loi binomiale de paramètre **n = 10** et **p = ¼ = 0,25**
L'espérance de X est ici le nombre de bonnes réponses que l'on peut espérer obtenir à l'issue du questionnaire. Or la probabilité de bonne réponse a chaque question est ¼ ce qui peut se lire 1 sur 4, autrement dit c'est comme si l'on répondait bon à une question sur 4. Et comme le nombre de questions est de 10, on comprend que l'espérance se calcule bien de la manière suivante :
E(X) = **10** × **0,25** = 2,5
Ce qui s'interprète en disant que en répondant au hasard à ce questionnaire on peut espérer 2,5 bonnes réponses.

VI/ Utilisations de la calculatrice :

La calculatrice permet de calculer deux Probabilités différentes avec la loi de probabilité :

- P(X = **k**) : Donc la même chose qu'avec la formule précédente.
- P(X ≤ **k**) : La probabilité d'obtenir un nombre de succès inférieur ou égal à une valeur k. Elle est la somme de P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + …. + P(X = k).

1) Calcul de P(X = **k**)

Sur TI :
[2nd][var]
Sélectionner la fonction BinomFdp
Un éditeur s'ouvre et vous demande :
Le nombre d'essais (ou Trials) : Entrez ici la valeur de **n**
p : entrez la valeur de **p**
valeur de X : Entrez **k**
appuyez sur coller
Il est possible qu'à l'écran apparaisse directement
BinomFdP(
Rentrez alors dans l'ordre, séparés d'une virgule : n,p,k
A l'écran apparait :
BinomFdP(n,p,k)

Sur Casio :
[OPTN]
Aller dans le menu STAT puis DIST puis BINM.
Choisissez Bpd
Tapez dans l'ordre, séparés d'une virgule :
k,**n**,**p**

2) Calcul de P(X≤ k)

Sur TI :
Procédure identique mais au lieu de choisir BinomFdP on choisit : BinomFRép

Sur Casio :
Procédure identique mais au lieu de choisir Bpd on choisit : Bcd

3) Limitations de la calculatrice :

Comme nous l'avons vu la calculatrice ne calcule que P(X = **k**) ou P(X≤ **k**). Cela peut donc être problématique si l'on cherche à obtenir P(X <**k**) , P(X >**k**) ou P(X ≥ **k**). Cependant, il faut se rappeler de deux choses :

- Tout d'abord, la somme des probabilités est 1 donc : P(X ≥ **k**) = 1 - P(X <**k**)
- k est un entier donc : P(X <**k**) = P(X≤ **k - 1**).

Nous en déduisons les méthodes suivantes :

Calcul de P(X <k) :
P(X <**k**) = P(X≤ **k - 1**).

Calcul de P(X >k) :
P(X >**k**) = 1 - P(X≤ **k**)

Calcul de P(X ≥ k) :
P(X ≥ **k**) = 1 - P(X <**k**) = 1 - P(X≤ **k - 1**)

Grâce à ces trois méthodes nous pouvons calculer à l'aide de la calculatrice les réponses à toute question posée par l'énoncé, il suffira simplement d'identifier n, p et k dans l'énoncé.

Pour plus de détails dans l'utilisation de la calculatrice, vous pouvez conseiller l'excellent site internet : 36 élèves 36 calculatrices sur lequel vous trouverez de nombreuses fiches et vidéos de méthode.

VII/ Exercice résolu :

Mathéo et Elora visitent une usine de chocolat en Suisse. A la sortie de la visite, ils peuvent manger des truffes. Les trois quarts des truffes offertes sont au chocolat noir, à forte teneur en cacao, les autres sont au praliné. Il y en a suffisamment pour que la probabilité de prendre une truffe au chocolat noir reste toujours égale à 0,75.

1) Un visiteur choisi cinq truffes et les mange une à une. On note X la variable aléatoire égale au nombre de truffes au chocolat noir choisies.

   a) Reconnaître la loi suivie par X et donner ses paramètres. Préciser l'ensemble des valeurs prises par X.

Réponse :
On reconnait cinq répétitions d'une même épreuve de Bernoulli ou le succès est piocher une truffe au chocolat noir et dont la probabilité est de 0,75. Donc la variable aléatoire X suis une loi binomiale de paramètre n = 5 et p = 0,75.

   b) Dresser le tableau de loi de probabilité de X à l'aide de la calculatrice (Arrondir à 10^{-4}).

Réponse :

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,0010	0,0146	0,0879	0,2637	0,3955	0,2373

On utilise la fonction BinomFdp de la calculatrice ou Bpd selon la marque avec n = 5 p = 0,75 et k = 0 puis 1 puis 2…

   c) Calculer $P(X \geq 3)$ et en donner une signification.

Réponse :
On se souvient que $P(X \geq \mathbf{k}) = 1 - P(X < \mathbf{k}) = 1 - P(X \leq \mathbf{k - 1})$. Donc à la calculatrice nous calculerons :
$1 - P(X \leq \mathbf{3 - 1}) = 1 - P(X \leq \mathbf{2})$. Donc nous utiliserons la fonction BinomFRép ou Bcd avec les paramètres n = 5 p = 0,75 et k =2 et nous ferons 1- le résultat obtenu. Nous obtenons 0,8965. Donc la probabilité de piocher un nombre de truffes au chocolat supérieur ou égal à 3 est de 0,8965.

2) a) Mathéo préfére les truffes au praliné. Il prend 10 truffes et se plaint : « Toutes les truffes sont au chocolat noir ! » Quelle est la probabilité de cet évènement ?

Réponse :
Ici nous avons 10 répétitions d'une épreuve de Bernoulli dont le succès est obtenir une truffe qui n'est pas au chocolat noir et dont la probabilité est 1 – 0,75 = 0,25. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètre n = 10, p = 0,25. Et on cherche la probabilité de n'obtenir aucun succès, soit P(X = 0). A la calculatrice avec la fonction BinomFdp ou Bpd et comme paramètre n = 10 , p = 0,25 et k = 0 on trouve : P(X = 0) = 0,0563

b) Sa petite sœur Elora choisit 6 truffes, mais elle est malade le lendemain si elle mange au moins 4 truffes au praliné. Quelle est la probabilité qu'Elora tomba malade.

Réponse : C'est à nouveau une loi binomiale de paramètres n = 6 et p = 0,25 si on compte le nombre de truffes praliné. On cherche la probabilité qu'Elora mange au moins 4 truffes pralinés donc k = 4. Et on calcule $P(X \geq 4)$ce qui reviens à calculer $1 - P(X \leq 3)$. A la calculatrice on utilise la fonction BinomFRép ou Bcd avec comme paramètres n = 6, p= 0,25 et k = 3 et on fera 1 – le résultat. On obtient 0,0376. Donc la probabilité qu'Elora soit malade est de 0,0376.