Verloop irrationale functies

www.karelappeltans.be

July 8, 2024

Contents

1 Algoritme

Doe de volgende stappen om een goede schets van een functie f te krijgen:

- stap 1
  1. Bepaal het domein
  2. Kijk naar de grenzen van het domein: wat zijn (eventueel) de limieten als $x \to \pm\infty$ of $x \to a$, waar a een singulariteit (pool) is?
  3. Welke asymptoten zijn er?
- Stap 2
  1. Bepaal de nulpunten van f(x) en het snijpunt met de y-as
  2. Kan je een soort symmetrie herkennen?
- Stap 3
  1. Bepaal de afgeleiden f' en f'', zoek hiervan de nulpunten. Maak hiervan een tekentabel.
  2. Stel vervolgens de verlooptabel op
- Stap 4
  1. Schets de grafiek op basis van je bevindingen

2 Domein en nulpunten

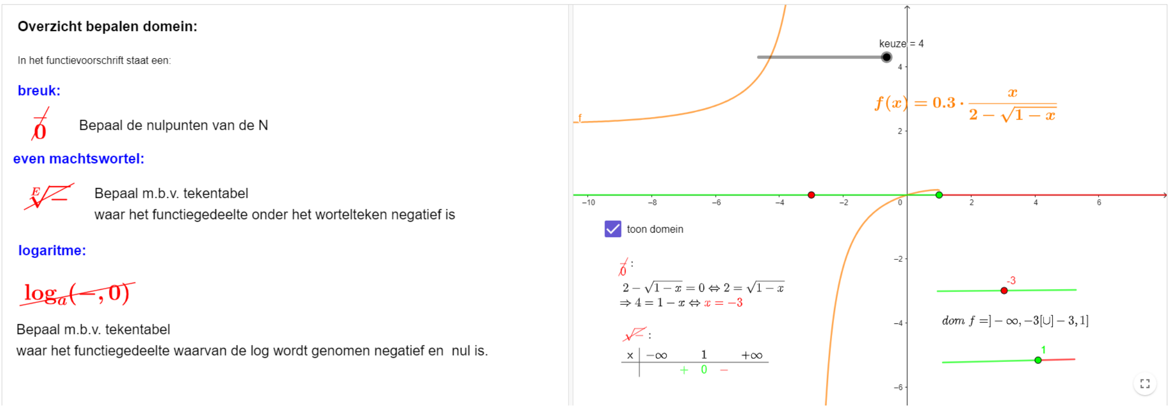


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/Mh4vD9FD

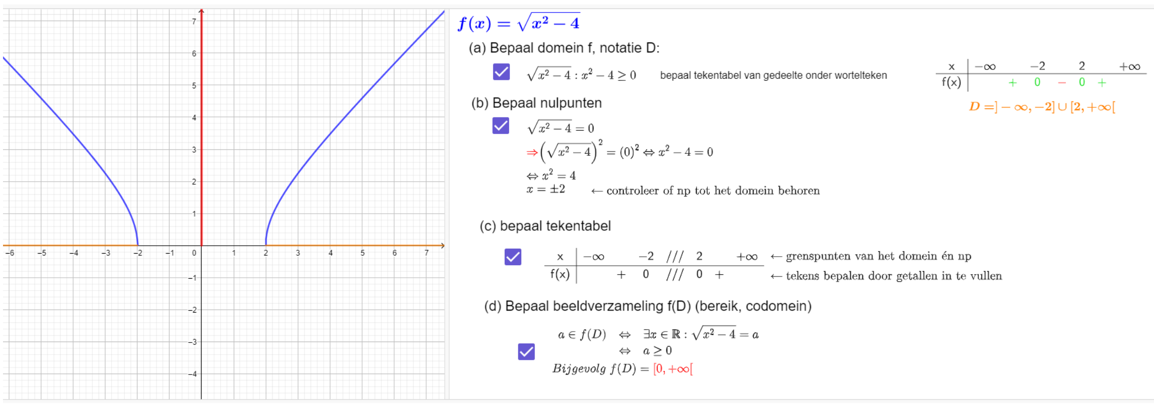


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/yarbCjsw

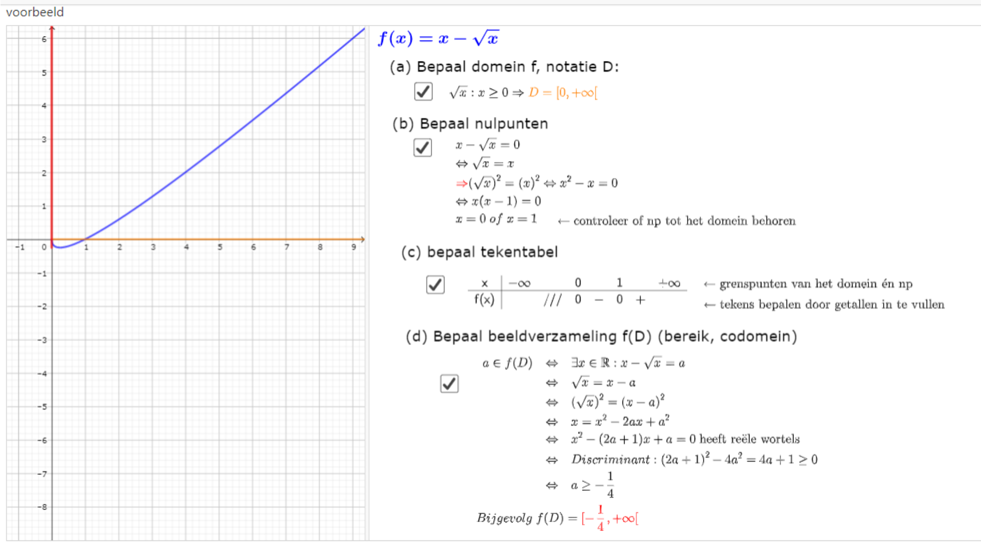


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/yarbCjsw

3 asymptoten

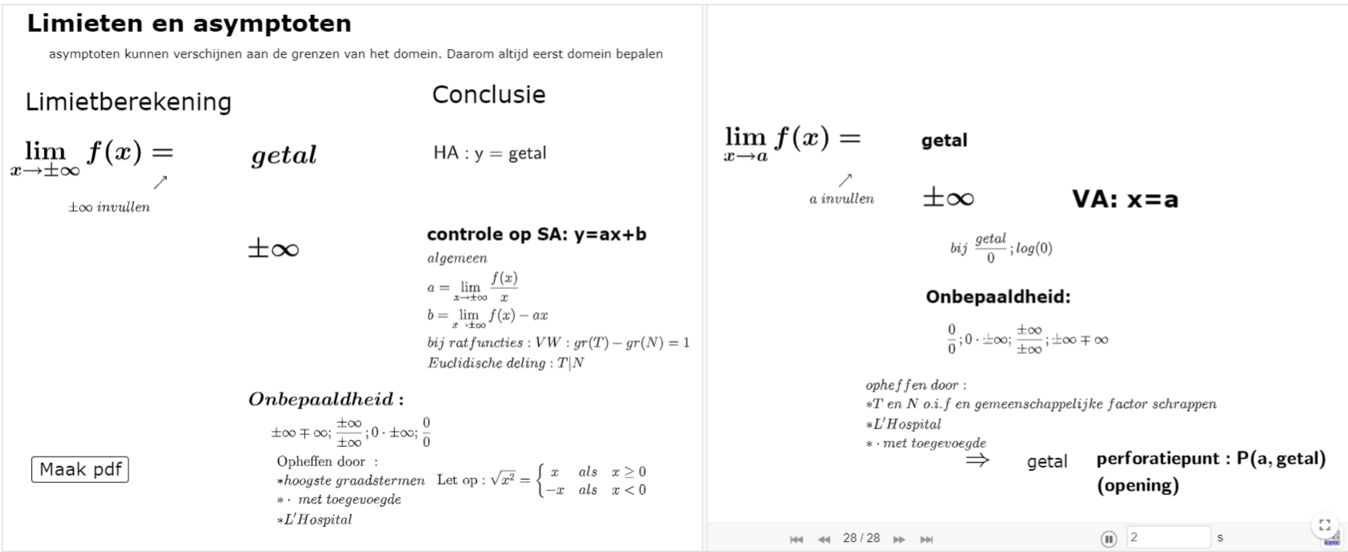


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/gtpubtse

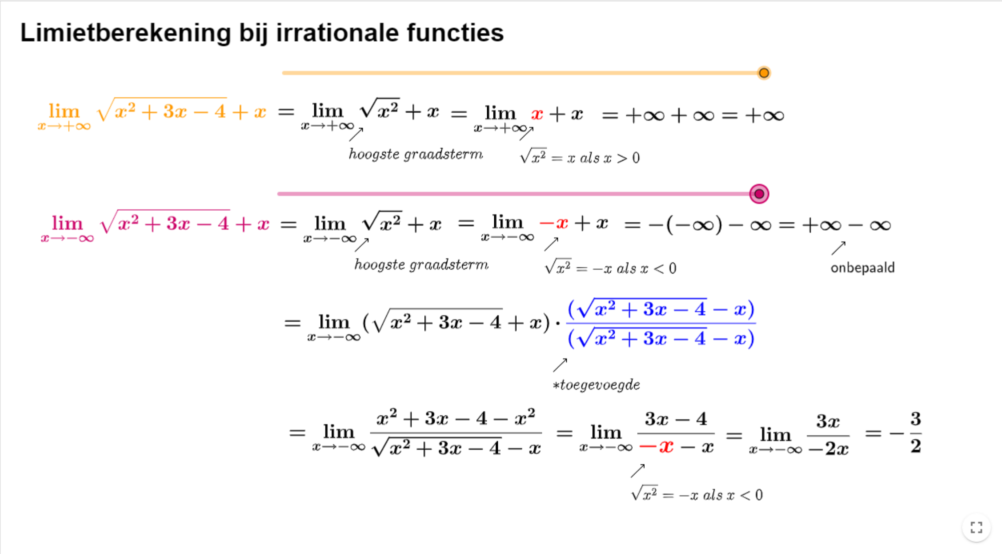


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/rnmp7qws

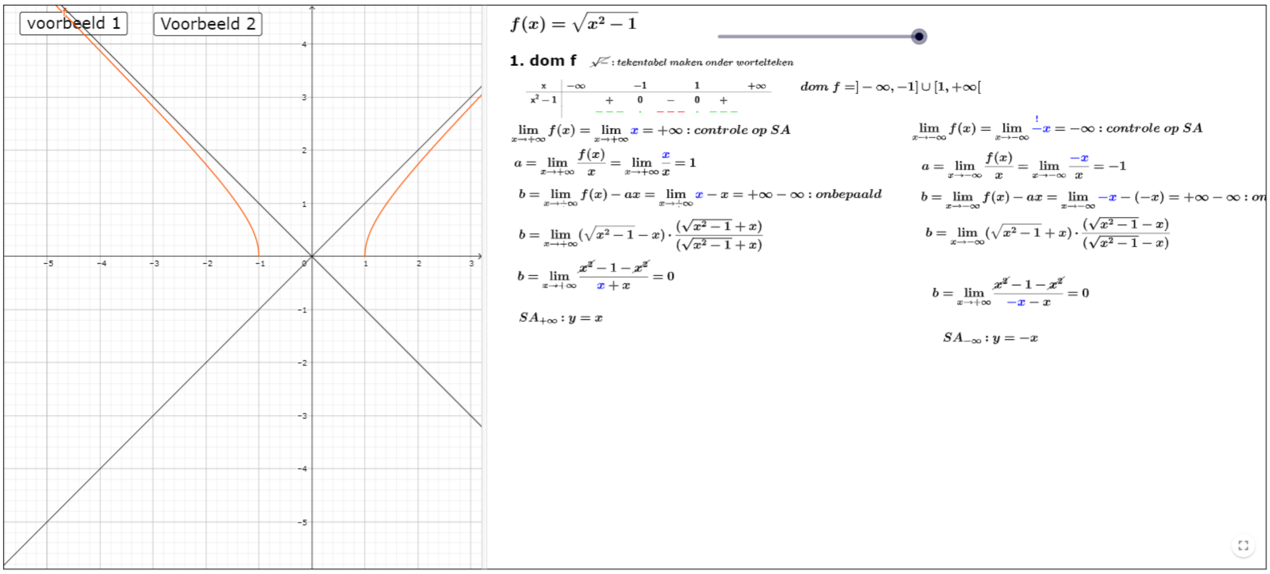


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/zvndwefs

4 Afgeleide

Figure 7: https://www.geogebra.org/m/NGkF3XS6

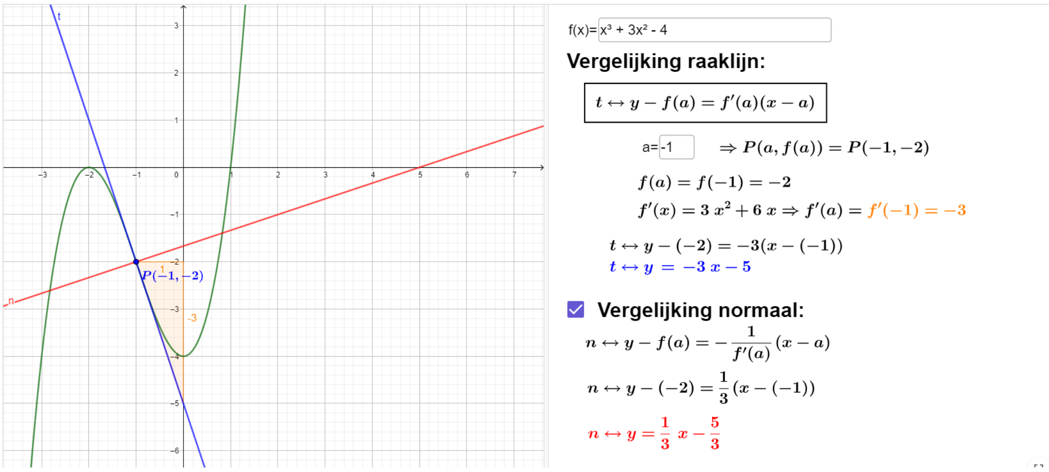


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/EscjM2Rh

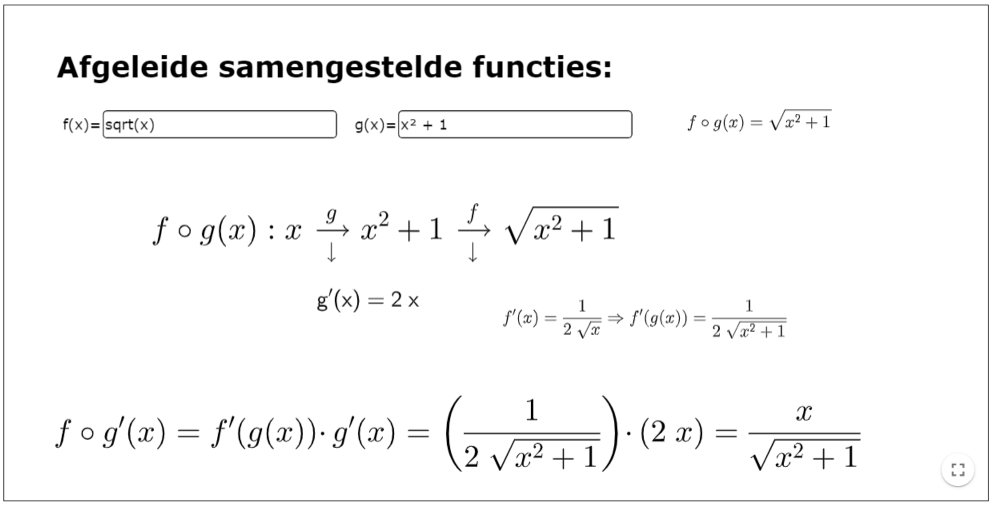


Figure 9: https://www.geogebra.org/m/YN8wHwSh

5 verloop

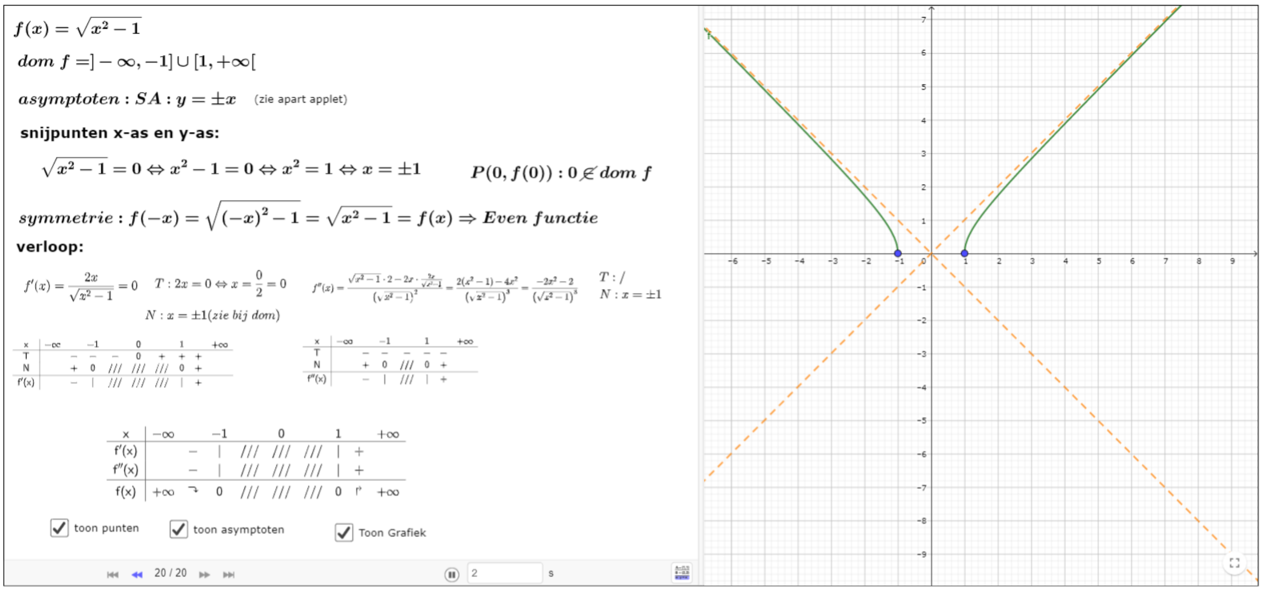


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/zvndwefs

6 niet altijd afleidbaar

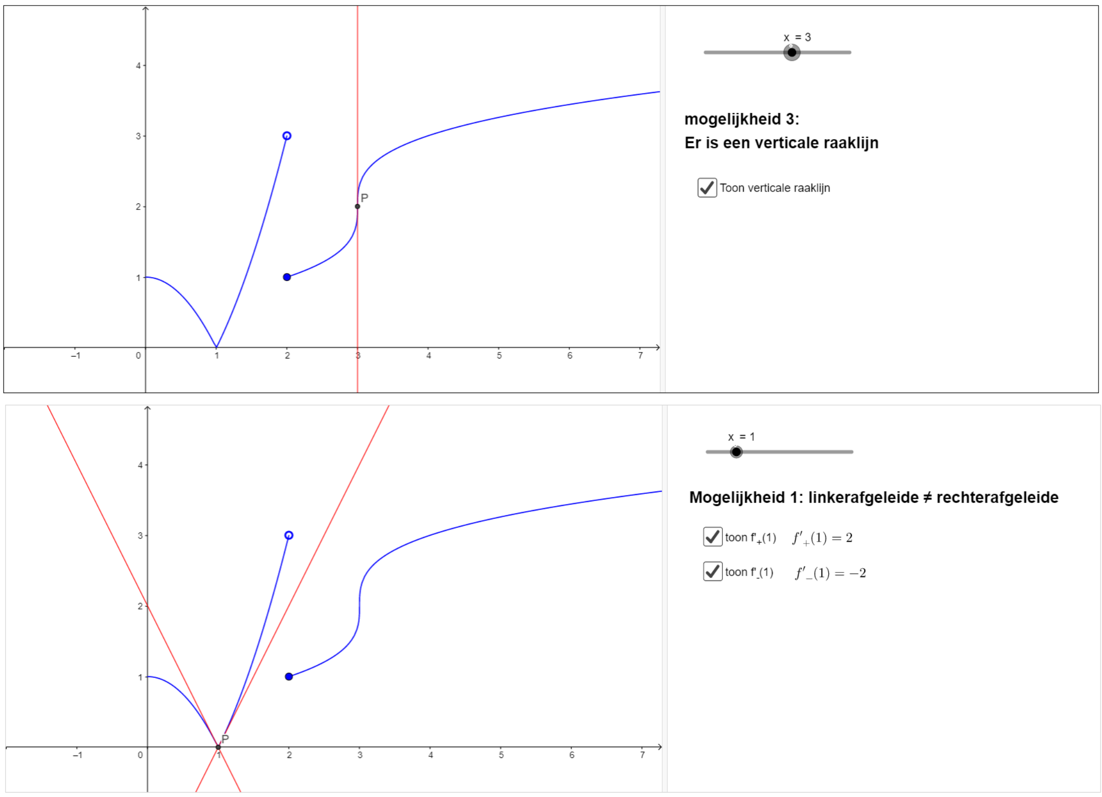


Figure 11: https://www.geogebra.org/m/qfSuH6rn|https://www.geogebra.org/m/qfSuH6rn

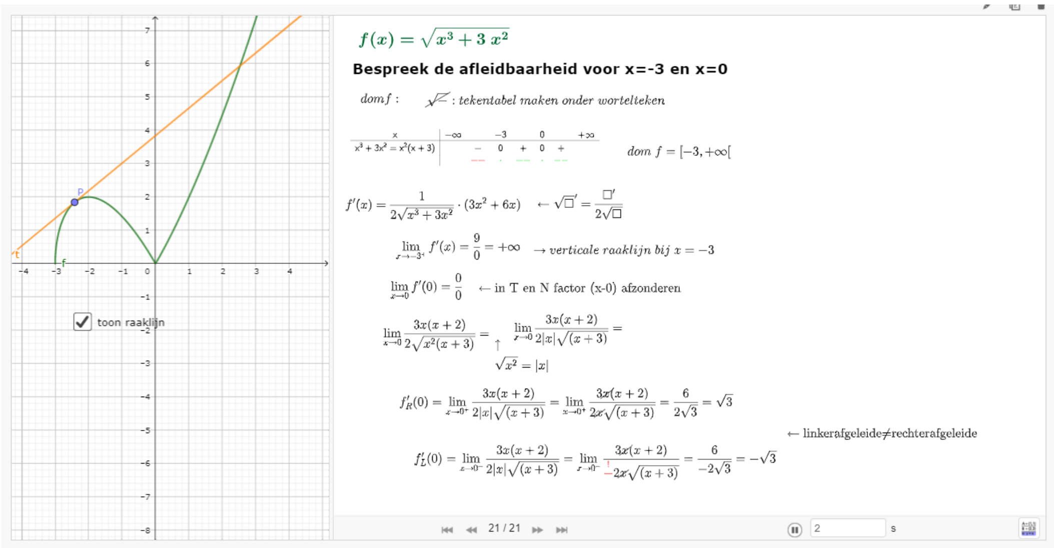


Figure 12: https://www.geogebra.org/m/zvndwefs

7 toepassingen

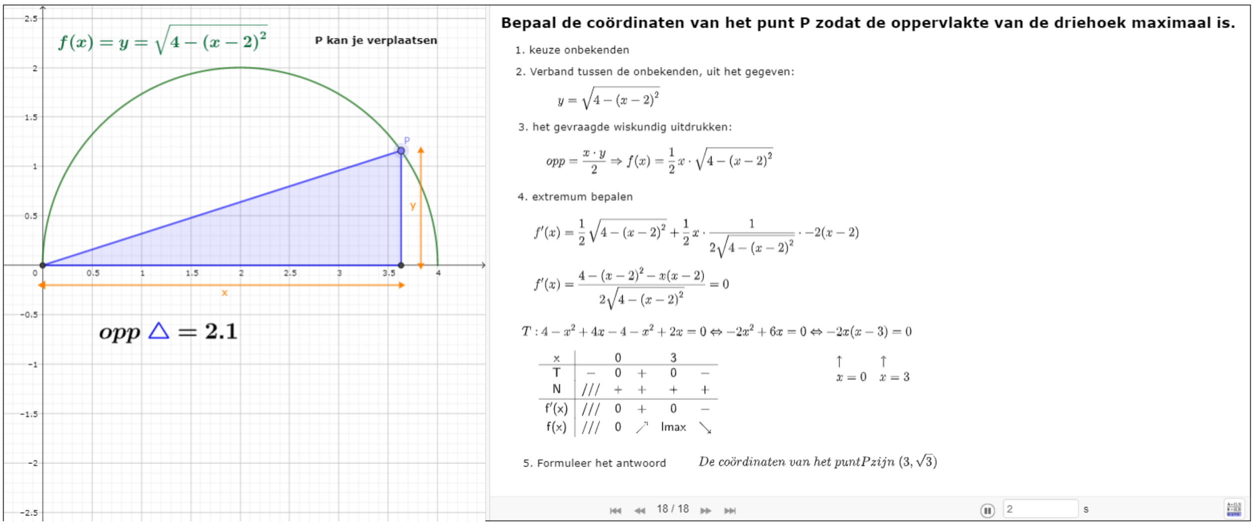


Figure 13: https://www.geogebra.org/m/gceq8KGM

8 continuïteit

9 oefeningen

9.1 Herhaling

1. Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. In welk(e) punt(en) van de grafiek is de raaklijn evenwijdig met de rechte met vergelijking $y = -3x + 1$? (A.$\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$)

2. Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{2 - x}$. In welk(e) punt(en) is er een horizontale raaklijn? (A. $(0, 0)$ en $\left(\frac{8}{5}, \frac{64}{25}\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$)

9.2 Asymptoten

1. Bepaal de eventuele asymptoten van de grafiek van $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4x^2}$
2. Bepaal domein en eventuele asymptoten van de grafiek van
   (a) $f(x) = \sqrt{9x^2 + 12x}$
   (b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1} + 2x$
   (c) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 6x + 2} - 2x$
   (d) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}$
   (e) $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+3}}{4x-1}$
   (f) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2-1}+x}{4x-1}$
3. Toon aan dat de grafiek van $f(x) = 4^{\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}}$ een perforatiepunt heeft.

9.3 Verloop

1. Welke bewering is juist voor $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x^2}}{2+x}$?
   (a) f heeft minstens drie asymptoten
   (b) de grafiek van f heeft een buigpunt voor $x = 1$
   (c) bld f$=]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]0, +\infty[$
2. Gegeven $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x + 5)$
   (a) Ga na dat $f'(x) = \frac{5(x+2)}{3\sqrt[3]{x}}$ en $f''(x) = \frac{10(x-1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$
   (b) Bepaal de eventuele lokale extrema (A. lM $x = -2$, lm $x = 0$)
   (c) Bepaal de intervallen waar de functie stijgend en dalend is. (A. stijgend $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$; dalend $]-2, 0[$)
   (d) Bepaal de eventuele buigpunten (A. $x = 1$)
   (e) Bepaal de intervallen waar de functie hol of bol is. (A. hol $]1, +\infty[$; bol $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$)
3. Toon aan dat $\forall x \in [0, 1] : x\sqrt{x - x^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$
4. Bepaal de eventuele buigpunten van $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-4}}$
5. Bepaal het verloop van $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 16}$
6. Beschouw de functie $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{9+x^2}}$
   (a) Bepaal het domein van f
   (b) Bepaal de afgeleide van f
   (c) Bepaal het bereik van f
   (d) Beredeneer dat f inverteerbaar is en dit zonder de inverse te berekenen
   (e) Bepaal het domein van f^{-1}
   (f) Bereken $\left(f^{-1}\right)'(0)$
7. Gegeven is de grafiek van f'(x)

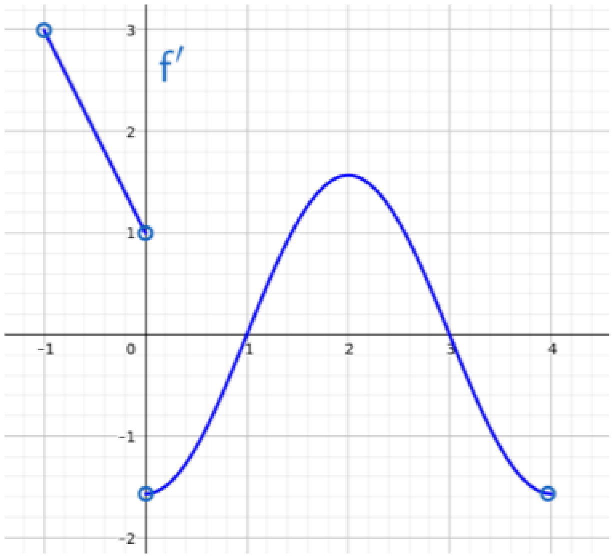


Figure 14: Grafiek van f'(x)

Bepaal de verlooptabel van f(x) en schets een mogelijke grafiek als je ook nog weet dat $f(0) = 0$.

8. Geef een lineaire benadering voor $\sqrt{9 + \ln(1,6)}$

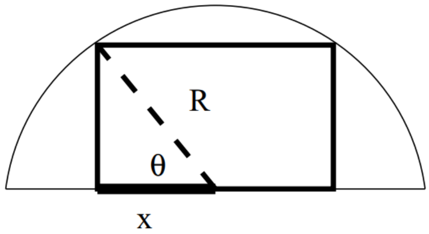
9.4 altijd afleidbaar?

1. Onderzoek de afleidbaarheid van $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$
2. Bepaal de afleidbaarheid van $f(x) = x \cdot \sqrt{4x - x^2}$ in de randpunten van haar domein
3. Onderzoek de afleidbaarheid van $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$
4. Onderzoek de afleidbaarheid van $f(x) = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2}$
5. Onderzoek de afleidbaarheid van $f(x) = x \cdot (x - 3)^{\frac{2}{3}}$
6. Bepaal de relatieve extrema van $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} \cdot x^2$

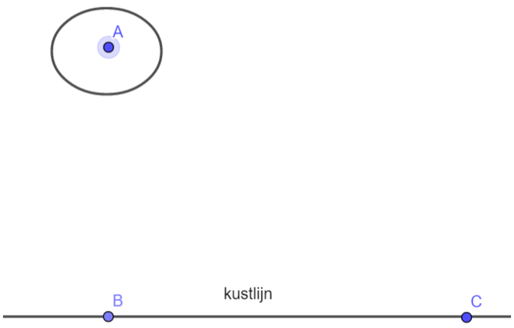
9.5 extremumproblemen

1. In Egypte is in het graf van de farao Retneip V een serie gouden, kleine, rechte piramides met vierkant grondvlak gevonden. Elke piramide is eigenlijk een draadfiguur gemaakt van dunne gouden staafjes die samen een vaste lengte hebben van 12 dm. Er is iets bijzonders aan de hand met de inhoud van de piramides. Van alle piramides die we kunnen maken met 12 dm goudstaafjes, zijn de gevonden piramides degene met de grootste inhoud. Bereken algebraïsch de lengte van de zijde van het grondvlak van die piramide waarvoor de inhoud maximaal is.

2. In een halve cirkel (met straal R) wordt een rechthoek getekend zoals aangegeven op de figuur: terwijl een van de zijden op de diagonaallijn van de halve cirkel valt worden de twee overige hoekpunten op de cirkelboog genomen. Bepaal de rechthoek die dusdanig ingeschreven, een maximale omtrek heeft (geef dus de afmetingen van de zijden). Geef voor die rechthoek dan ook zijn omtrek, en bereken het deeloppervlak van de halve cirkel wat niet bedekt is door die rechthoek. (A: omtrek=$\frac{10R}{\sqrt{5}}$, deelopp=$R^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{5}\right)$)

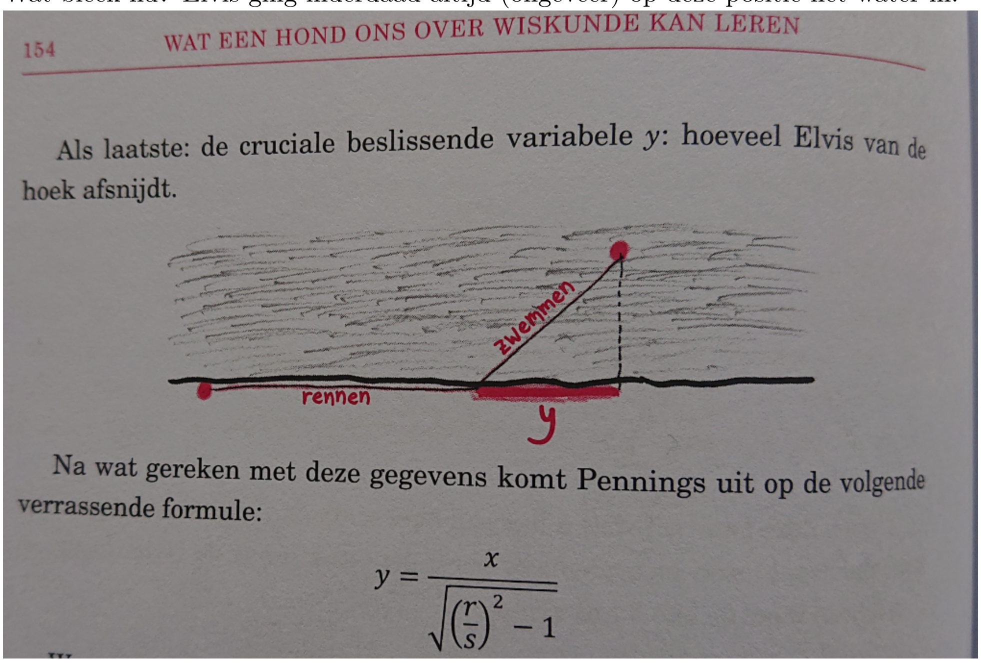


3. Liesbet zit gezellig te babbelen met haar vrienden op een eilandje (punt A) op een afstand van 1 km van de rechte kustlijn (punt B). Plots merkt ze dat ze binnen de 42 minuten moet gaan volleyballen op een terrein (punt C) dat 5 km verder ligt langs de kustlijn. Om zo snel mogelijk op het terrein te zijn zal ze naar een punt P op de kustlijn [BC] zwemmen en dan verder lopen naar het terrein. Lopen kan ze tegen 12km/h en zwemmen tegen 3 km/h. Naar welk punt P op de kustlijn moet ze zwemmen opdat ze in de kortst mogelijke tijd op haar afspraak komt? Is dat mogelijk binnen de 42 minuten?



4. Bepaal de grootst mogelijke oppervlakte van een trapezium dat ingeschreven wordt in een halve cirkel met straal r

5. In het boek 'Wat een hond ons over wiskunde kan leren' moet Elvis, de hond van de schrijver zo snel mogelijk een bal oppikken in (stilstaand) water. Hiervoor loopt hij eerst een gedeelte langs de waterlijn en zwemt vervolgens naar de bal toe.
   Toon aan dat $y = \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{r}{s}\right)^2-1}}$ met r zijn loopsnelheid en s zijn zwemsnelheid.
   Wat bleek nu? Elvis ging inderdaad altijd (ongeveer) op deze positie het water in.


154 WAT EEN HOND ONS OVER WISKUNDE KAN LEREN

Als laatste: de cruciale beslissende variabele y: hoeveel Elvis van de hoek afsnijdt.

Na wat gereken met deze gegevens komt Pennings uit op de volgende verrassende formule:

$$y = \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{r}{s}\right)^2 - 1}}$$

9.6 continuïteit

1. Bepaal de waarde(n) van reële parameter m zodat onderstaande functie continu is

$$f(x) = \begin{cases} \frac{mx-1}{x^2+2} & x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{x^2-5x+10}-2}{2-x} & x > 2 \end{cases}$$

10 taken

1. irrationale functies: verloop en toepassingen

Rekenregels afgeleide

$$(af+bg)'(x) = af'(x) + bg'(x) \quad (a,b \in \mathbb{R}) \qquad (\Box + \triangle)' = \Box' + \triangle'$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \qquad (\Box \cdot \triangle)' = \Box' \cdot \triangle + \Box \cdot \triangle'$$

$$(f^r)'(x) = r f^{r-1}(x) \cdot f'(x) \quad (r \in \mathbb{R}) \qquad (\Box^r)' = r\Box^{r-1} \cdot \Box'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'(x)}{f(x)^2} \qquad \left(\frac{1}{\Box}\right)' = \frac{-\Box'}{\Box^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2} \qquad \left(\frac{\Box}{\triangle}\right)' = \frac{\Box' \cdot \triangle - \Box \cdot \triangle'}{\triangle^2}$$

$f(x) = c \ (c \in \mathbb{R})$	$f'(x) = 0$	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	
$f(x) = x^r \ (r \in \mathbb{R})$	$f'(x) = rx^{r-1}$	$(\Box^r)' = r \cdot \Box^{r-1} \cdot \Box'$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{\Box}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\Box}} \cdot \Box'$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\left(e^{\Box}\right)' = e^{\Box} \cdot \Box'$
$f(x) = a^x \ \left(a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}\right)$	$f'(x) = a^x lna$	$\left(a^{\Box}\right)' = a^{\Box} lna \cdot \Box'$
$f(x) = lnx$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$(ln\Box)' = \frac{1}{\Box} \cdot \Box'$
$f(x) =^a \log x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$(^a \log \Box)' = \frac{1}{\Box \ln a} \cdot \Box'$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$(sin\Box)' = \cos \Box \cdot \Box'$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$(\cos \Box)' = -\sin \Box \cdot \Box'$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan \Box)' = \frac{1}{cos^2\Box} \cdot \Box'$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$(\cot \Box)' = \frac{-1}{sin^2\Box} \cdot \Box'$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin \Box)' = \frac{1}{\sqrt{1-\Box^2}} \cdot \Box'$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos \Box)' = \frac{-1}{\sqrt{1-\Box^2}} \cdot \Box'$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$(\arctan \Box)' = \frac{1}{1+\Box^2} \cdot \Box'$
$f(x) = \text{arc}\cot x$	$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$	$(\text{arc}\cot \Box)' = \frac{-1}{1+\Box^2} \cdot \Box'$

Figure 15: https://www.geogebra.org/m/rkbXbnRv