REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES.

Dominio, recorrido y regiones gráficas.

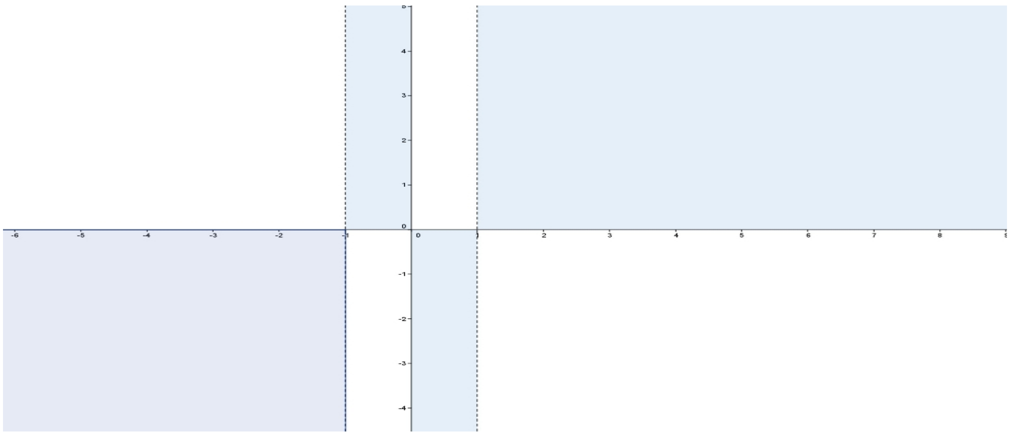
Dado que el Dominio de una función f es el subconjunto $D_f = \{x \in \mathbb{R}: \text{está definido } f(x)\}$, y que el recorrido el subconjunto $\text{Im}_f = \{y \in \mathbb{R}: \exists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = y\}$. El dominio y el recorrido de una función nos permite obtener las regiones del plano que las que existe la función

 # Ejemplo.- Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ *, como* $D_f = \{\mathbb{R} - \{-1,1\}\}$ *e* $\text{Im}_f = \mathbb{R}$

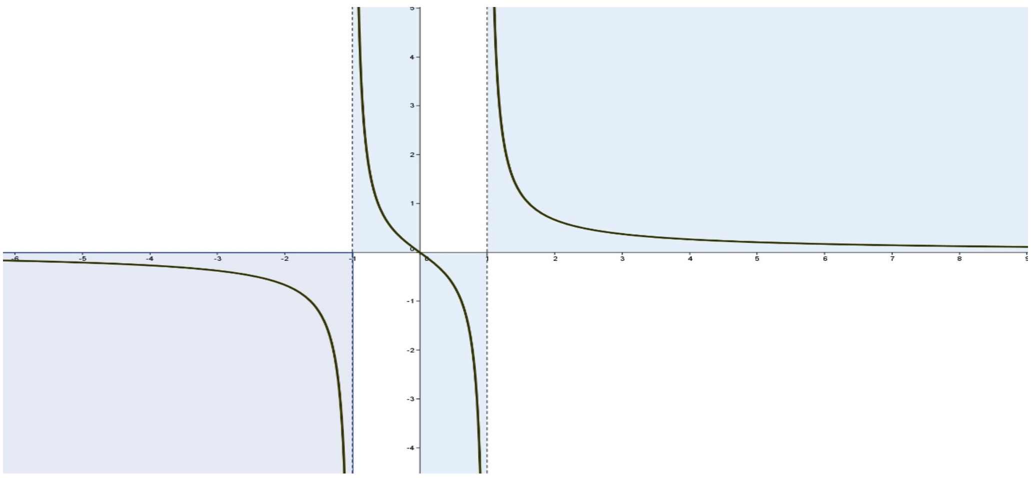
Estudiando el signo de x y de $f(x)$ *en los intervalos* $(-\infty, -1), (-1,0), (0,1), (1,+\infty)$

- *si* $x \in (-\infty, -1) \Rightarrow y \in (0, -\infty)$
- *si* $x \in (-1,0) \Rightarrow y \in (0, +\infty)$
- *si* $x \in (0\,,\,1) \Rightarrow y \in (0, -\infty)$
- *si* $x \in (1, +\infty) \Rightarrow y \in (0, +\infty)$

Luego, si coloreamos de azul las regiones del plano que contienen la gráfica será



Que si representamos la función comprobamos que efectivamente está dentro de esta región



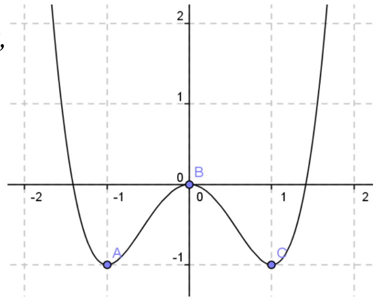
Simetrías

Función par. Eje de simetría x = 0.

Un función $f(x)$ es **par**, si para cualquier x se cumple $f(x)=f(-x)$.

Es decir, la gráfica de f es simétrica con respecto a eje OY (*recta x = 0*).

 # Ejemplo.- La función $f(x)=x^4-2x^2$ *es una función par, y por tanto simétrica, respecto de eje OY, ya que para cualquier x se cumple*



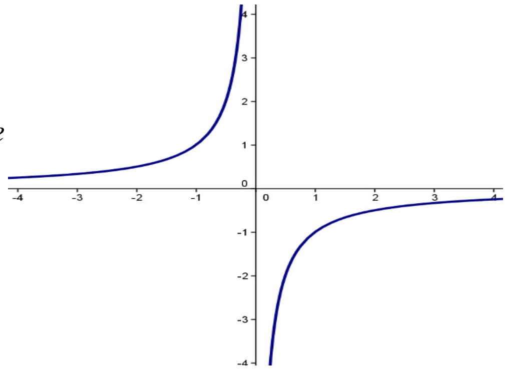
$$x^4-2x^2=f(x)=f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2$$

Función impar. Centro de simetría C(0,0).

Un función $f(x)$ es **impar**, si para cualquier x se cumple $f(x)=-f(-x)$.

Es decir, la gráfica de la función f es simétrica con respecto al origen de coordenadas $C(0,0)$.

 # Ejemplo.- La función $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ *es impar, y por tanto simétrica respecto del origen de coordenadas, ya que*

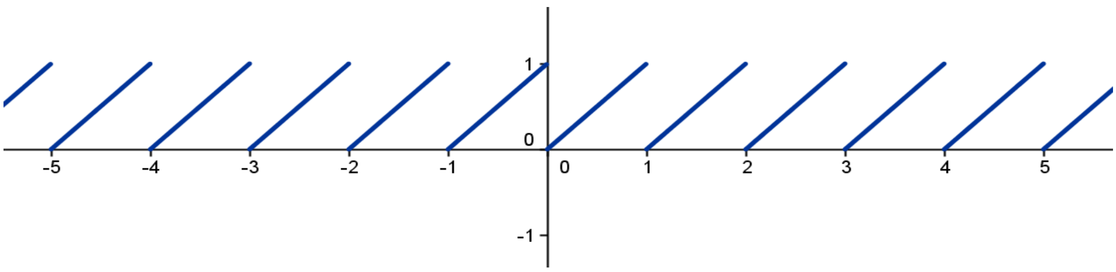


$$-\frac{1}{(-x)}=f(-x)=-f(x)=-\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Periodicidad.

Un función $f(x)$ es **periódica**, si existe un número T, tal que para cualquier x se cumple $f(x+T)=f(x)$. Al número T se le denomina periodo de la función.

 # Ejemplo.- La función f(x) = parte decimal (x) = x – parte entera (x) es una función periódica de periodo T = 1

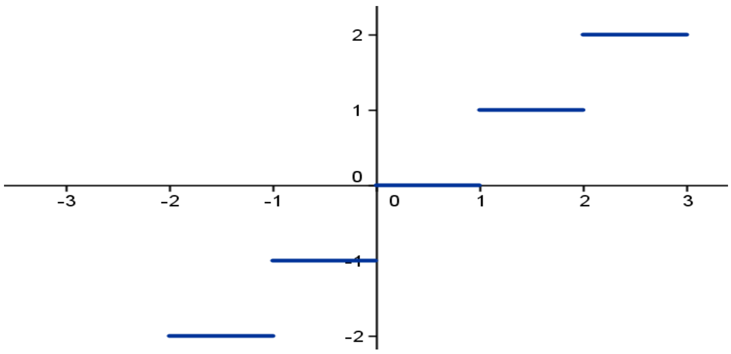


Puntos de discontinuidad.

Un función $f(x)$ es **discontinua** en un punto x = a, cuando se cumple alguna de las dos condiciones siguientes

$$\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a) \qquad\qquad \lim_{x\to a^-} f(x)\neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

 # Ejemplo.- La función f(x) = parte entera (x) es discontinua en cada número entero a, ya que si a es un número entero, se cumple $\lim_{a^-} f(x) = a-1 \neq a = f(a) = \lim_{a^+} f(x)$



<u>Ramas infinitas y asíntotas</u>.

<u>Asíntotas verticales</u>

Un función $f(x)$ tiene una **asíntota vertical** en x = a, cuando existe alguno de los siguientes límites

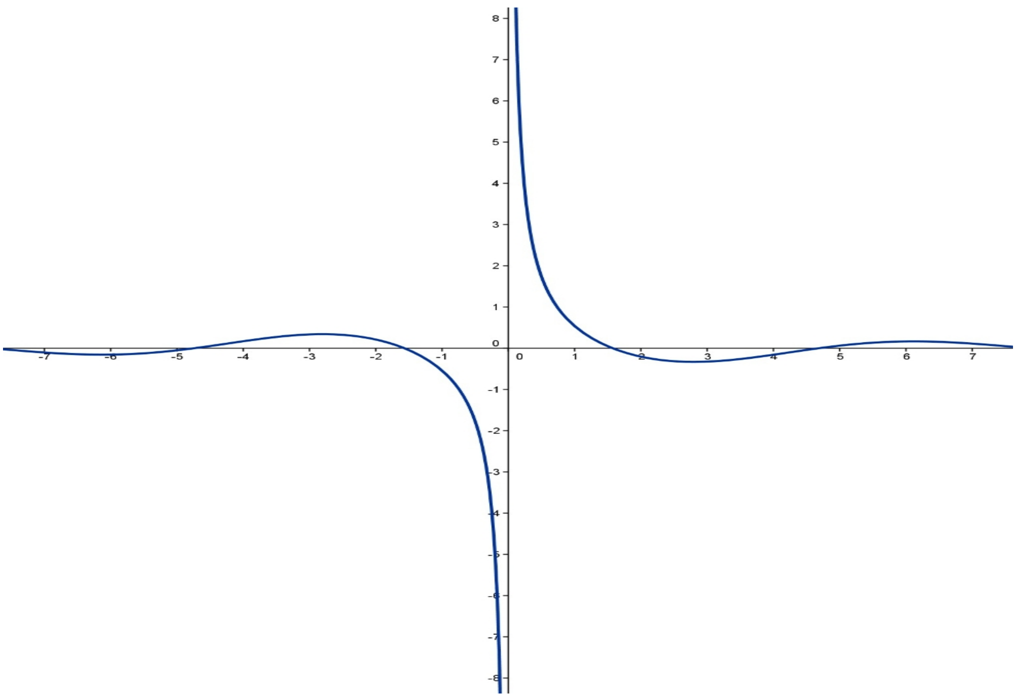
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty(-\infty)$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty(-\infty)$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty(-\infty)$$

 # Ejemplo.- La función $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ *tiene una asíntota vertical en x = 0, ya que*

$$\lim_{0^-} f(x) = -\infty \qquad y \qquad \lim_{0^+} f(x) = +\infty$$

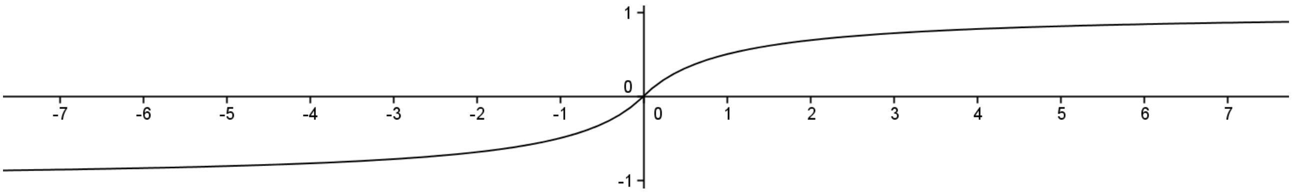


Asíntotas horizontales

Un función $f(x)$ tiene una **asíntota vertical** $y=k$, cuando existe alguno de los siguientes límites

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=k \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)=k$$

 # Ejemplo.- la función $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ *tiene por asíntotas las rectas* $y=-1$ *e* $y=+1$.

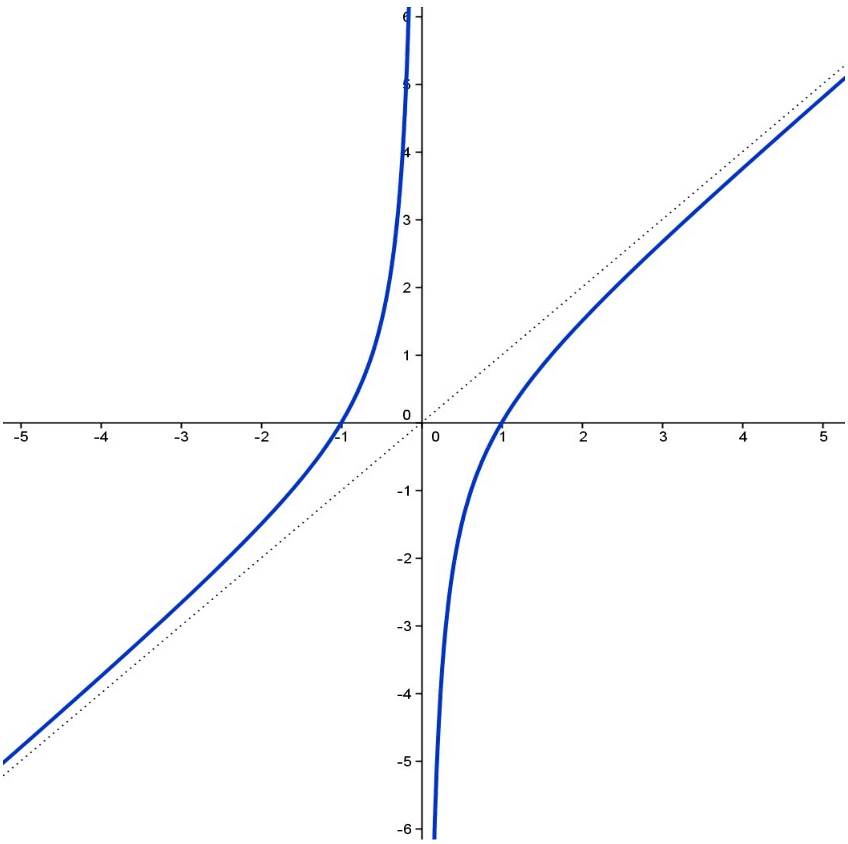


Asíntotas oblicuas

Un función $f(x)$ tiene una **asíntota oblicua** $y=m\,x+n$; con $m\neq 0$, cuando existe alguno de los siguientes límites

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)-m\,x-n=0 \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)-m\,x-n=0$$

 # Ejemplo.- La función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ *tiene como asíntota oblicua la recta* $y=x$



Cálculo de asíntotas oblicuas

Si una función $f(x)$ tiene una **asíntota oblicua** $y=m\,x+n$; con $m\neq 0$, podemos hallar los valores m y n.

Cálculo de la pendiente m

Para el cálculo de la pendiente m de la recta $y = m\,x + n$; con $m \neq 0$, asíntota oblicua a la función $f(x)$, si tomamos, la ecuación $y - m\,x - n = 0$. Despejando m de la ecuación,

$m = \frac{y}{x} - \frac{n}{x}$, y teniendo en cuenta que cuando $x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$, se cumplirá

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{o} \qquad m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Hay que tener en cuenta:

1.- Si m *es un número real no nulo, y n es real, la recta* $y = m\,x + n$ *es una asíntota oblicua de la función* $f(x)$.

2.- Si $m = \pm\infty$ *, la función* $f(x)$ *no tiene asíntota oblicua en* $+\infty$ *(respectivamente* $-\infty$ *).*

3.- Si $m = 0$ *, la función* $f(x)$ *no tiene asíntota oblicua en* $+\infty$ *(respectivamente* $-\infty$ *).*

Cálculo de la ordenada en el origen n

Conocida la pendiente m de la recta $y = m\,x + n$; con $m \neq 0$, asíntota oblicua a la función $f(x)$, como se cumple

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - m\,x - n = 0 \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) - m\,x - n = 0$$

Se cumplirá

$$n = \lim_{x \to -\infty} f(x) - m\,x$$

 # Ejemplo.- Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ *, como*

$$1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad \left(\text{respec.; } 1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}\right)$$

$$0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} - 1\,.\,x = \lim_{x \to +\infty} f(x) - m.x = n \qquad \left(\text{respec.; } 0 = \lim_{x \to -\infty} f(x) - 1\,.\,x\right)$$

La recta $y = x$ *es una asíntota oblicua de* $f(x)$

Monotonía y curvatura.

Teniendo en cuenta los resultado expuestos en el tema de Monotonía y curvatura, Si una función $f(x)$ está definida en un intervalo I, podemos obtener los siguientes resultados:

Monotonía y convexidad.

- $f(x)$ es creciente y convexa en I si $f'(x) > 0, f''(x) > 0 \quad \forall\ x \in I$
- $f(x)$ es creciente y cóncava en I si $f'(x) > 0, f''(x) < 0 \quad \forall\ x \in I$

- $f(x)$ es decreciente y convexa en I si $f'(x)<0, f''(x)>0 \quad \forall\ x \in I$
- $f(x)$ es decreciente y cóncava en I si $f'(x)<0, f''(x)<0 \quad \forall\ x \in I$

Puntos críticos o extremos

- $(a, f(a))$ es mínimo relativo de $f(x)$ en $[p, q]$ si
  $f'(a)=0, f''(a)>0$ o bien
  $f'(a)=0, f'(a-h)<0\ y\ f'(a-h)>0\ \forall\ h \in [p-a, q-a]$
- $(a, f(a))$ es máximo relativo de $f(x)$ en $[p, q]$ si
  $f'(a)=0, f''(a)<0$ o bien
  $f'(a)=0, f'(a-h)>0\ y\ f'(a-h)<0\ \forall\ h \in [p-a, q-a]$

Puntos de inflexión

- $(a, f(a))$ es punto de inflexión convexo - cóncavo de $f(x)$ en $[p, q]$ si
  $f'(a)=0, f''(a-h)>0\ y\ f''(a-h)<0\ \forall\ h \in [p-a, q-a]$
- $(a, f(a))$ es punto de inflexión cóncavo - convexo de $f(x)$ en $[p, q]$ si
  $f'(a)=0, f''(a-h)<0\ y\ f''(a-h)>0\ \forall\ h \in [p-a, q-a]$.

 # Ejemplo.- Como la función $f(x)=x^4-2x^2$ *, cumple*

$$f'(x)=4.x(x-1).(x+1)$$

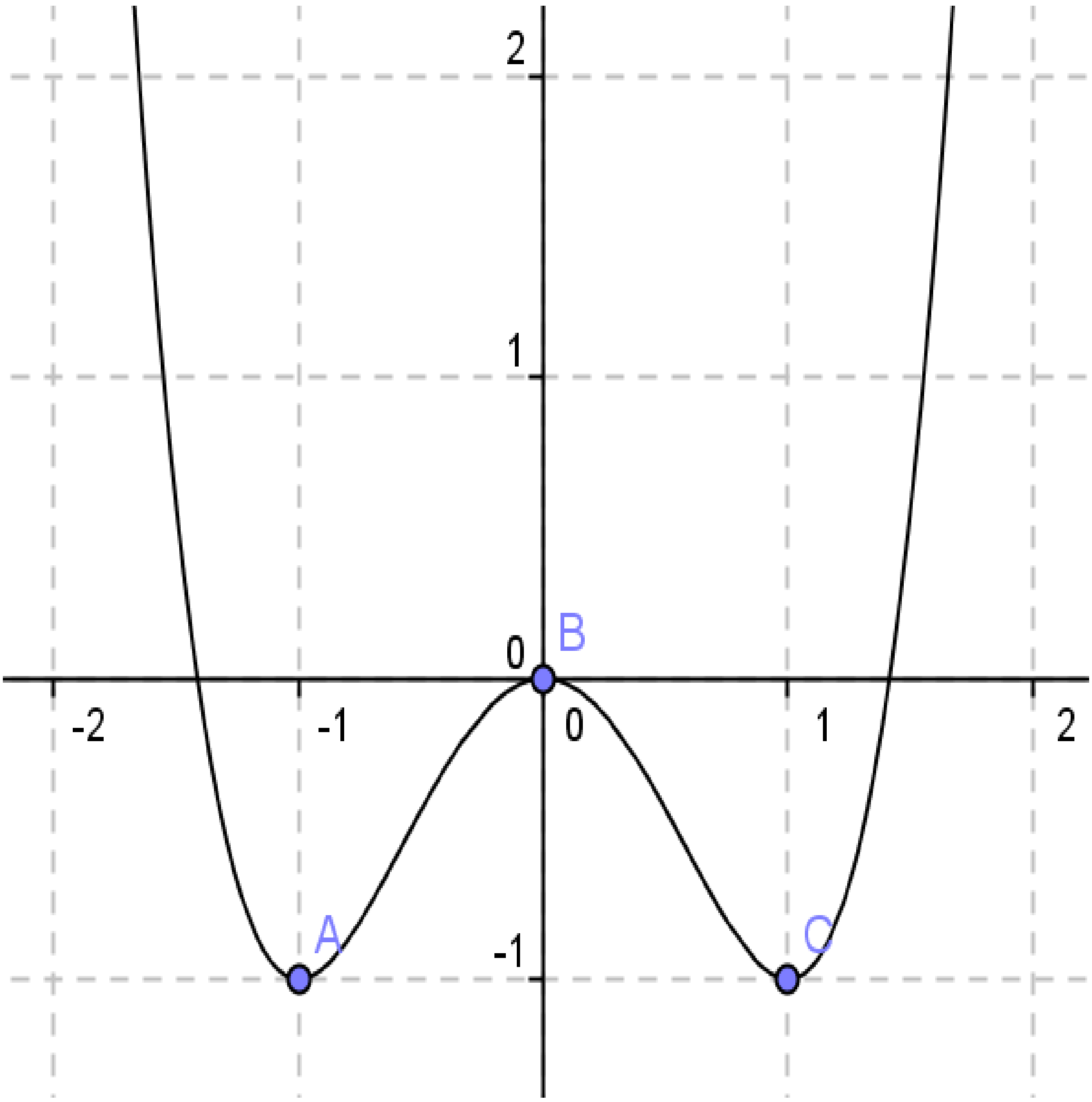
$$f''(x)=4(3x^2-1)$$

Estudiando lo signos de estas derivadas obtenemos

- $-\infty<x<-1 \Rightarrow f'(x)<0\ ; f''(x)>0 \quad \Rightarrow \quad f$ *es decreciente y convexa en* $(-\infty, -1)$
- $x=-1 \Rightarrow f'(x)=0\ y\ f''(x)>0 \quad \Rightarrow \quad (-1, f(-1))=(-1,-1)$ *es mínimo relativo*
- $-1<x<-\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f'(x)>0\ y\ f''(x)>0 \quad \Rightarrow \quad f$ *es creciente y convexa en* $\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- $x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f'(x)>0\ y\ f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$ *es un punto de inflexión convexo - cóncavo*
- $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<0 \Rightarrow f'(x)<0\ y\ f''(x)<0 \quad \Rightarrow \quad f$ *es creciente y cóncava*
- $x=0 \Rightarrow f'(x)=0\ y\ f''(x)<0 \quad \Rightarrow \quad (0, f(0))=(0,0)$ *es máximo relativo*

- $0 < x < +\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f'(x) < 0 \; y \; f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ *es decreciente y cóncava*
- *Si* $x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f'(x) < 0 \; y \; f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$ *es un punto de inflexión cóncavo - convexo*
- *Si* $+\frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \; y \; f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ *es decreciente y convexa*
- *Si* $x = +1 \Rightarrow f'(x) = 0 \; y \; f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad (1, f(1)) = (1, -1)$ *es mínimo relativo*
- *Si* $+1 < x < +\infty \Rightarrow f'(x) > 0 \; y \; f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ *es creciente y cóncava*

Luego la función será



teniendo en cuenta que la función es par (o simétrica respecto del eje OY), podíamos haber estudiado los valores de $x \in (-\infty, 0) ó (0, +\infty)$ *y haber deducido el resto*

Esquema para la representación de una función.

Para representar una función debemos de seguir al menos el siguiente esquema

	Propiedades de $f(x)$ obtenidas directamente	**Caracterización**
1	**Dominio de $f(x)$** **Recorrido de $f(x)$** **Regiones gráfica** a) Región positiva b) Cortes con el eje OX y OY c) Región negativa	Valores que puede tomar x Valores que puede tomar la y $f(x)>0$. Por encima del eje OX $f(x)=0$. Raíces de la función. Y (0,f(0)) $f(x)<0$. Por debajo del eje OX
2	**Simetrías** a) Función par b) Función impar	 $f(x)=f(-x)$. Eje de simetría el eje OY $f(x)=-f(-x)$. Centro de simetría el origen
3	**Periodicidad**	$f(x+T)=f(x)$. T periodo mínimo
4	**Puntos de discontinuidad**	$\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$ o $\lim_{x\to a^-} f(x)\neq \lim_{x\to a^+} f(x)$
5	**Ramas infinitas y asíntotas** a) Ramas verticales Asíntotas verticales x = a b) Ramas horizontales Asíntotas horizontales y = k c) Ramas oblicuas Asíntotas oblicuas $y=mx+n$; $m, n\in\mathbb{R}$, $m\neq 0$ d) Ramas parabólicas e) Ramas hiperbólicas	 $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ o $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ o $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ $\lim_{x\to\pm\infty}=k$ $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=f'(x)$ $n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-m.x)$ $m=\pm\infty$. Rama similar a la de $y=x^2$ $m=0$.Rama similar a la de $y=\sqrt{(x)}$
	Propiedades de f(x) obtenidas por las derivadas sucesivas	**Características**
6	**Monotonía** a) Crecimiento b) puntos críticos y extremos c) Decrecimiento	 $f'(x)>0$. Intervalos de crecimiento $f'(a)=0$ y $f''(a)>0$. Mínimo $f'(a)=0$ y $f''(a)<0$. Máximo $f'(x)<0$. Intervalos de decrecimiento
7	**Curvatura** a) Convexidad b) Puntos de inflexión c) Concavidad	 $f''(x)>0$. Intervalos de convexidad $f''(a)=0$ y $f'''(a)>0$. Cóncavo-convexo $f''(a)=0$ y $f'''(a)<0$. Convexo-cóncavo $f''(x)<0$. Intervalos de concavidad

Construcción de funciones a partir de otra

Funciones opuestas. Ejes de simetrías

Dos funciones $f(x)\, y\, g(x)$ son opuestas $\Leftrightarrow$ $g(x)=-f(x)\ \forall\in D_f\cap D_g$

 # Ejemplo.- la función $g(x)=x^3$ *es opuesta a* $f(x)=-x^3$, ya que $g(x)=-f(x)$

Funciones pares entre sí. Eje de simetría OY

Dos funciones $f(x)\, y\, g(x)$ son pares entre si $\Leftrightarrow$ $g(x)=f(-x)\ \forall\in D_f\cap D_g$

 # Ejemplo.- Las funciones $f(x)=x^3+1$ *y* $g(x)=-x^3+1$ *son pares, ya que se cumple* $g(x)=f(-x)$

Funciones y valor absoluto

Valor absoluto de una función |f(x)| y simetría horizontal (OX)

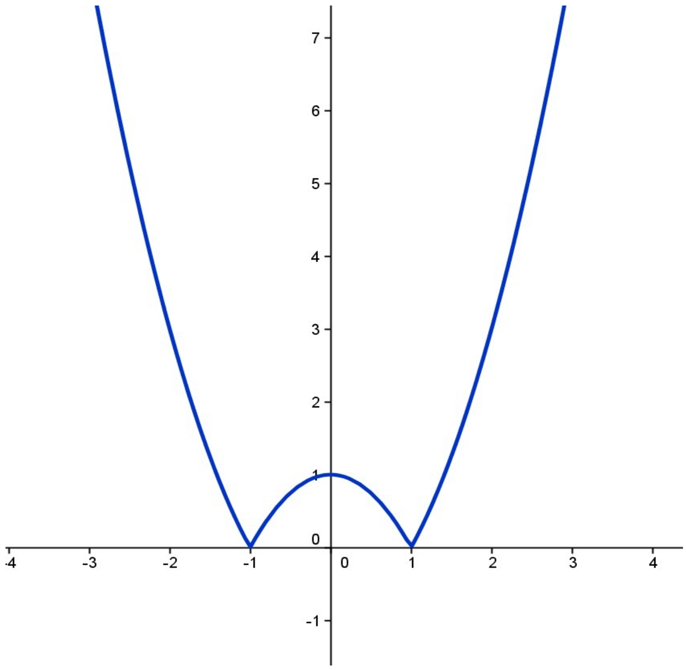
Para representar una función valor absoluto

a) Dibujamos primero la función f(x), sin el valor absoluto.

b) Los trozos de curva positiva se dejan como están.

c) Los trozos de curva negativos se sustituyen por los trozos de curva simétricos de aquellos respecto del eje OX.

 # Ejemplo.- La gráfica de la función $f(x)=|x^2-1|$ *es*



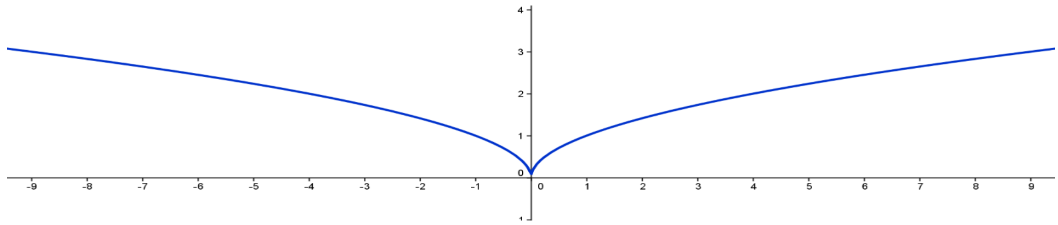
Valor absoluto de la variable f(|x|) y simetría vertical (OY)

Para representar una función valor absoluto de la variable

a) Dibujamos primero la función f(x), sin el valor absoluto para valores de x positivos.

b) Para valores negativos de x, la gráfica es simétrica respecto del eje OY de la parte anterior dibujada.

 # Ejemplo.- La representación gráfica de la función $f(x)=\sqrt{|x|}$ *será*



<u>Funciones recíprocas.</u>

Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ (*con* $Ima_f \subset D_f$) son recíprocas si $g(f(x))=x \, ; f(g(y))=y$.

La función recíproca de f(x) se de designa por $f^{-1}(x)$.

Dos funciones recíprocas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Ejemplo.- Las funciones $f(x)=2^x$ y $\log_2 x$ son recíprocas, puesto se cumple

$\log_2 2^x = x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$

$2^{\log_2 y} = y$ para cualquier $y \in \mathbb{R}^+$

<u>Funciones trasladadas</u>

Traslación vertical

$g(x)$ es la función $f(x)$ trasladada verticalmente si $\exists b \in \mathbb{R} : g(x)=f(x)+b$

 # Ejemplo la función $g(x)=x^2+1$ *es la función* $f(x)=x^2$ *trasladada verticalmente, según el vector* $\vec{u}(0,1)$

Traslación horizontal

$g(x)$ es la función $f(x)$ trasladada horizontalmente si $\exists a \in \mathbb{R} : g(x)=f(x-a)$

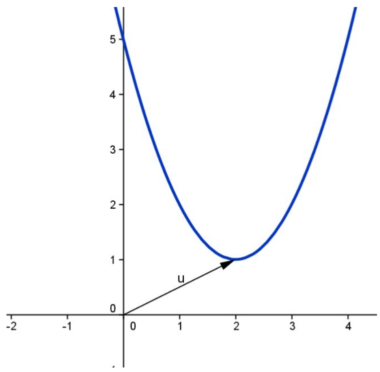
 # Ejemplo la función $g(x)=(x-2)^2$ *es la función* $f(x)=x^2$ *trasladada horizontalmente, según el vector* $\vec{u}(2,0)$

Traslación oblicua

$g(x)$ es la función $f(x)$ trasladada oblicuamente si

$\exists a, b \in \mathbb{R}: g(x)=f(x-a)+b$

 # Ejemplo la función $g(x)=(x-2)^2+1$ *es la función* $f(x)=x^2$ *trasladada oblicuamente, según el vector* $\vec{u}(2,1)$



-

Dilatación de funciones según los ejes

Dilatación o contracción vertical

Dilatar o contraer verticalmente una función $f(x)$ k veces equivale a multiplicar todas las ordenadas de la función dada por k.

- Si $k>1$ la función se dilatación.
- Si $k<1$ la función se contrae.

 # Ejemplo.- La función $g(x)=2\sqrt{x}$ *es una dilatación vertical de la función* $f(x)=\sqrt{x}$

Dilatación o contracción horizontal

Dilatar o contraer horizontalmente una función $f(x)$ k veces equivale a sustituir la variable x de la función dada por $\frac{x}{k}$.

- Si $k>1$ la función se dilatación.
- Si $k<1$ la función se contrae.

 # Ejemplo.- La función $g(x)=sen\left(\frac{x}{3}\right)$ *es una dilatación horizontal de la función* $f(x)=$ *sen (x)*