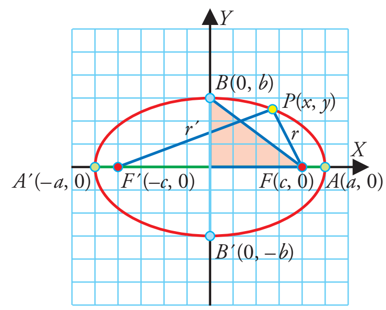
DEMOSTRACIÓN

Deducción de la ecuación reducida de la elipse

Una **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a $2a$. Cuando los focos están en el eje X, la ecuación reducida es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Procedimiento	Demostración
a) La incógnita es un punto variable del plano.	$P(x, y)$
b) Se hace un dibujo lo más fielmente posible con los datos que se tienen del lugar geométrico. Se representa un punto $P(x, y)$ que verifique la propiedad.	
c) Se expresa mediante una igualdad la propiedad que tienen que verificar los puntos del lugar geométrico.	$d(F, P) + d(F', P) = 2a$
d) Se expresan mediante fórmulas los dos miembros de la igualdad.	$d(F, P) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ $d(F', P) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
e) Se sustituyen los valores en la igualdad.	$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$
f) Se opera y simplifica hasta obtener una ecuación lo más reducida posible. • Se pasa un radical al segundo miembro.	$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
• Se elevan al cuadrado ambos miembros.	$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$
• Se desarrollan las potencias.	$\cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$
• Se deja solo el radical en un miembro.	$-4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
• Se simplifica dividiendo entre -4	$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
• Se cambian los miembros.	$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx + a^2$
• Se elevan otra vez al cuadrado ambos miembros.	$\left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = (cx + a^2)^2$
• Se desarrollan las potencias.	$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = c^2x^2 + 2a^2cx + a^4$
• Se aplica la propiedad distributiva.	$a^2x^2 + \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + \cancel{2a^2cx} + a^4$
• Se transponen términos.	$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$
• Se agrupan los términos.	$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$
• Se aplica que $a^2 - c^2 = b^2$	$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
• Se divide toda la ecuación entre a^2b^2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$