Problemas sobre condiciones de contorno

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach CCSS	Derivadas	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Determina los valores a, b y c de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ para que tenga un mínimo relativo en $x = 2$, pase por el punto $P(0,5)$ y se cumpla que $f'(1) = 2$.

Si tengo un mínimo relativo en un punto, la derivada de la función en la abscisa de ese punto se anula.

$f'(x) = 2ax + b \rightarrow f'(2) = 0 \rightarrow 4a + b = 0$

Si la función pasa por un punto, las coordenadas del punto satisfacen la ecuación de la función.

$f(0) = 5 \rightarrow c = 5$

Y al tercera condición la aplicamos de forma directa sobre la primera derivada.

$f'(1) = 2 \rightarrow 2a + b = 2$

Resolvemos el sistema 2x2 que nos queda.

$2a + b = 2 \rightarrow b = 2 - 2a$

Lo llevo a la primera ecuación.

$4a + b = 0 \rightarrow 4a + 2 - 2a = 0 \rightarrow a = -1$

Y por lo tanto:

$b = 4$

PROBLEMA 2

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ una función polinómica que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$. Determinar a, b, c y d. ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

Aplicamos las condiciones del enunciado.

$f(1) = 0 \rightarrow a + b + c + d = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,\ f'(0) = 2 \rightarrow c = 2$

La condición necesaria para extremos relativo es $f'(x) = 0$. El enunciado afirma que existen extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$. Por lo tanto:

$f'(1) = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0$

$f'(2) = 0 \rightarrow 12a + 4b + c = 0$

Por lo que llegamos a un sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} a + b + c + d = 0 \\ c = 2 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{Bmatrix}$$

De la segunda ecuación tenemos el valor $c = 2$. Sustituyendo este valoren las ecuaciones 3ª y 4ª, obtenemos:

$$\begin{Bmatrix} 3a + 2b = -2 \\ 12a + 4b = -2 \end{Bmatrix}$$

Si la primera fila la multiplicamos por cuatro y le restamos la segunda:

$$4b = -6 \rightarrow b = \frac{-3}{2} \rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Y sustituyendo los valores de $a, b\ y\ c$ en la primera ecuación del sistema4×4:

$d = \frac{-5}{6}$

La función solución resulta $\rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{6}$

Para determinar si los extremos son máximo o mínimos, derivamos dos veces la función obtenida y evaluamos en los extremos.

$$f''(x) = 2x - 3$$
$$f''(1) = -1 < 0 \rightarrow máximo\ en\ (1,0)$$
$$f''(2) = 1 > 0 \rightarrow mínimo\ en\ (2, \frac{-1}{6})$$

PROBLEMA 3

Obtener a, b y c para que $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$ tenga en $x = 1$ un punto crítico que no es extremo relativo y que la gráfica pase por el punto (1, 1).

Necesitamos calcular tres parámetros, por lo que debemos buscar tres condiciones.

La primera: la función tiene derivada nula en $x = 1 \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow 3 + 2a + b = 0$

La segunda: si en $x = 1$ no hay extremo relativo, significa que la segunda derivada en ese punto no es ni positiva (mínimo) ni negativa (máximo). Por lo tanto, la segunda derivada es nula (condición necesaria de punto de inflexión) $\rightarrow f''(1) = 0 \rightarrow$
$f''(x) = 6x + 2a \rightarrow 6 + 2a = 0 \rightarrow a = -3$

La tercera: si la función pasa por el punto $(1,1) \rightarrow f(1) = 1 \rightarrow 1 + a + b + c = 1 \rightarrow b + c = 3$
Si $a = -3$ de la primera condición podemos deducir $\rightarrow 3 - 6 + b = 0 \rightarrow b = 3$
Y si $b = 3$ de la tercera condición resulta $\rightarrow 3 + c = 3 \rightarrow c = 0$
La función solución resulta: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$