

Lösung: Können Hunde Mathematik

a) Von welcher Größe soll hier welche Extremstelle berechnet werden?

Bei der Aufgabenstellung wird der optimale Weg gesucht der über Land und Wasser führt. Dieser optimale Weg wird genau dann gelaufen, wenn für ihn wenig Zeit gebraucht wird. Da zudem die Geschwindigkeiten auf Land und im Wasser unterschiedlich sind, ist hier nach der kürzesten Laufzeit in Abhängigkeit von der Einlaufstelle gefragt.

b) Stelle den Weg von Elvis am Strand bzw. am Wasser in Anhängigkeit von a, x und y dar.

$$s_{Land}(x, a) = (a - x)$$
$$s_{Wasser}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

c) Berechne mit Hilfe von Tabelle 1 die durchschnittlichen Geschwindigkeiten von Elvis an Land und im Wasser in m/s.

Geschwindigkeit für Laufen (in m/s)	Geschwindigkeit für Schwimmen (in m/s)
6,25	0,82
6,33	0,9
6,35	0,9
6,39	0,93
6,45	0,82

Durchschnittliche Geschwindigkeit beim Laufen an Land:

$$v_{Land} = 6,35 \text{ m/s}$$

Durchschnittliche Geschwindigkeit beim Schwimmen im Wasser:

$$v_{Wasser} = 0,87 \text{ m/s}$$

d) Verwende deine Ergebnisse aus b) und stelle die Zielfunktion auf, unter der Annahme, dass Elvis an Land bzw. im Wasser mit den konstanten durchschnittlichen Geschwindigkeiten aus c) läuft. Du kannst dabei von gegebenen Werten für a und y ausgehen.

$$t(x) = \frac{s_{Land}}{v_{Land}} + \frac{s_{Wasser}}{v_{Wasser}} = \frac{(a - x)}{6,35} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{0,87}$$

e) Berechne die gewünschte Extremstelle der Zielfunktion. Versuche zu erklären, warum der Satz der Dualität in diesem Beispiel nicht angewandt werden kann.

Es wird nach einer Minimumstelle für die Zielfunktion gesucht, welche aus Summanden besteht. Um den Satz der Dualität zu verwenden, müsste das Produkt der Summanden konstant sein, also von der Variablen x unabhängig sein. Die Zielfunktion kann jedoch mit keiner erlaubten Transformation so verändert werden, das dies möglich ist, da die Variable x jeweils im Zähler der Summanden steht und sich somit im Produkt nicht wegekürzen kann.

Also berechnen wir die Minimumstelle mit Hilfe der Differentialrechnung.

Wir legen einen geeigneten Definitionsbereich für x fest. x liegt im Intervall $[0, a]$.

Nullsetzen der ersten Ableitung der Zielfunktion ergibt:

$$t'(x) = \frac{1}{6,35} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,87\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = 0$$

Ein bisschen umgeformt ergibt dies:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{6,35}{0,87} x$$

Wir quadrieren und erhalten:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{6,35}{0,87}\right)^2 x^2$$

Also gilt:

$$x^2 \cdot \left(\left(\frac{6,35}{0,87}\right)^2 - 1\right) = y^2 \text{ bzw. } x^2 = \frac{y^2}{\left(\left(\frac{6,35}{0,87}\right)^2 - 1\right)}$$

Und daher gilt für das optimale x :

$$x = \frac{y}{\sqrt{\left(\left(\frac{6,35}{0,87}\right)^2 - 1\right)}} \approx 0,13831 \cdot y$$

Handelt es sich hier tatsächlich um eine Minimumstelle?

$$t''(x) = \frac{1}{0,87} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{(x^2 + y^2)} = \frac{2\sqrt{x^2 + y^2} - x}{1,74\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} > 0$$

f) Wie hängt das optimale x von a bzw. y ab?

x hängt nur von y , nicht aber von a ab. Zwischen x und y besteht eine direkt proportionale Beziehung $x = k \cdot y$, wobei $k \approx 0,13831$.

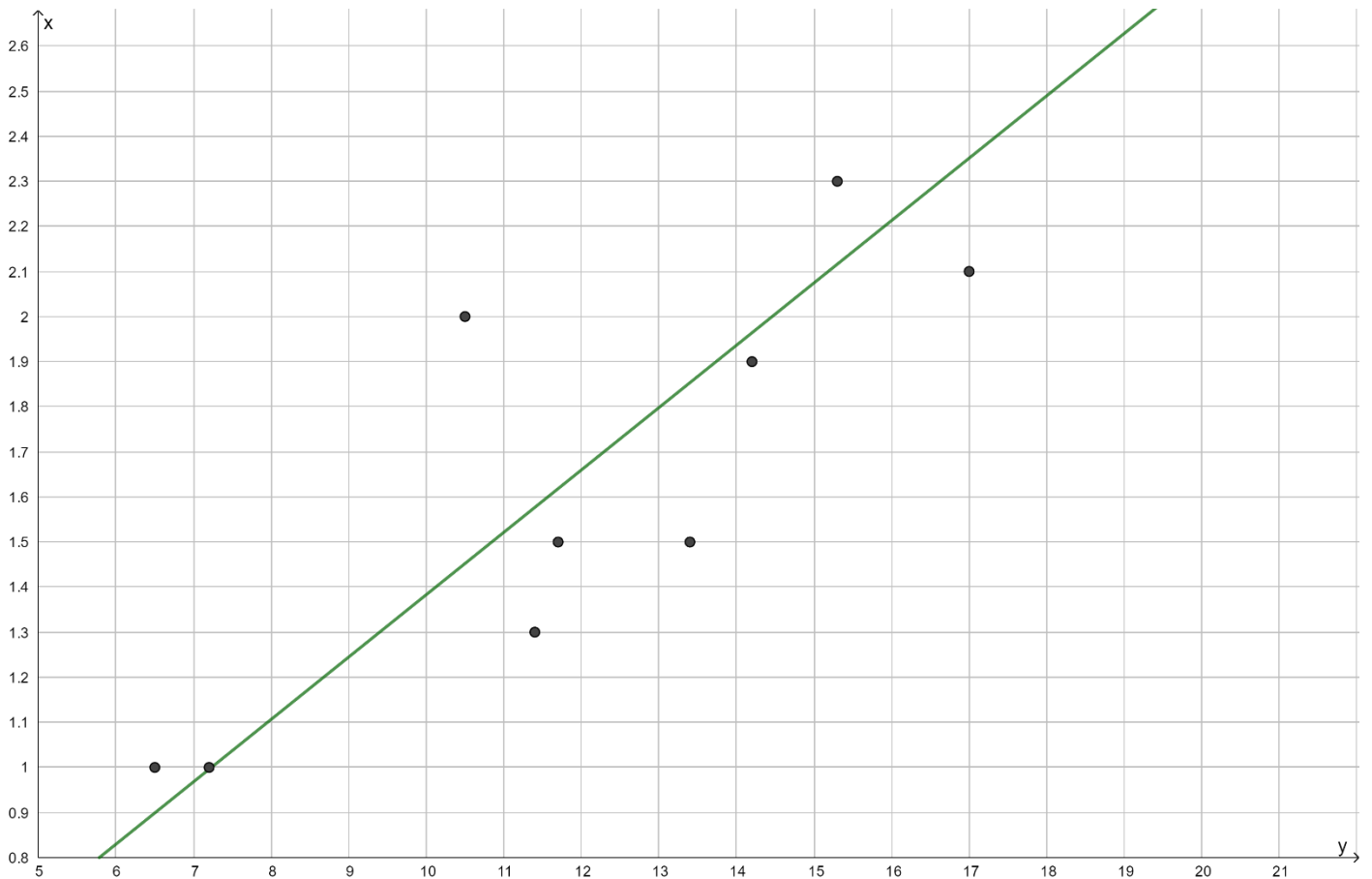
g) Berechne jeweils für die neun gemessenen Werte aus Tabelle 2 die optimale Stelle x.

a	y	x	x_{opt}
10 m	10,5 m	2 m	1,45 m
8,9 m	11,4 m	1,3 m	1,58 m
9 m	6,5 m	1 m	0,9 m
9,4 m	13,4 m	1,5 m	1,85 m
8 m	14,2 m	1,9 m	1,96 m
12,8 m	11,7 m	1,5 m	1,62 m
13 m	15,3 m	2,3 m	2,11 m
5,4 m	17 m	2,1 m	2,35 m
17,5 m	7,2 m	1 m	1 m

h) Vergleiche die optimalen Werte für x mit jenen aus Tabelle 2 und begründe, ob Elvis tatsächlich Mathematik angewandt haben könnte.

a	y	x	x_{opt}	$ x_{opt} - x $
10 m	10,5 m	2 m	1,45 m	0,55 m
8,9 m	11,4 m	1,3 m	1,58 m	0,28 m
9 m	6,5 m	1 m	0,9 m	0,1 m
9,4 m	13,4 m	1,5 m	1,85 m	0,35 m
8 m	14,2 m	1,9 m	1,96 m	0,06 m
12,8 m	11,7 m	1,5 m	1,62 m	0,12 m
13 m	15,3 m	2,3 m	2,11 m	0,19 m
5,4 m	17 m	2,1 m	2,35 m	0,25 m
17,5 m	7,2 m	1 m	1 m	0 m

Elvis hat zwar nicht immer genau den idealen Weg gewählt, liegt aber sehr nahe an der optimalen Route. Im Schnitt lag seine Einlaufstelle nur 20 cm von der optimalen Einlaufstelle entfernt. Mit mehr Daten könnte man noch genauere Aussagen treffen. Jedoch lässt sich anhand dieser Daten feststellen, dass Elvis, ob er Mathematik kann oder nicht, ziemlich gut die optimale Laufroute abschätzen kann.



i) Zusatz: Überlege dir, wie das Modell von Elvis Laufweg noch optimiert werden könnte bzw. welche Einflussfaktoren von dem Modell noch nicht erfasst wurden.

Im Modell wird eine lineare Laufroute von Elvis angenommen, es könnte jedoch auch sein, dass er eine kurvenförmige Laufbewegung zum Ball ansetzt.

Die Geschwindigkeit von Elvis wird zudem nicht konstant sein, sondern hängt von vielen weiteren Faktoren ab und kann sich während der Bewegung ändern.

Außerdem wird Elvis die ersten Meter im Wasser noch laufen, ehe er zu schwimmen beginnt.

Die Position des Balles wird zudem aufgrund des Wellenganges nicht stabil sein, sodass der Ball vom Ufer abdriftet oder sich auch wieder Richtung Strand bewegt.