Abkühlungsprozesse

Aufgabennummer: 2_032	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AN 1.3, AN 2.1, AN 4.3, FA 1.5, FA 1.6, FA 1.7	

Wird eine Tasse mit heißem Kaffee am Frühstückstisch abgestellt, kühlt der Kaffee anfangs rasch ab, bleibt aber relativ lange warm.

Die Temperatur einer Flüssigkeit während des Abkühlens kann nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz durch eine Funktion der Form $t \mapsto T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t}$ beschrieben werden. Dabei gibt T_0 die Anfangstemperatur der Flüssigkeit (in °C) zum Zeitpunkt $t = 0$ an, T_U ist die konstante Umgebungstemperatur (in °C) und $k \in \mathbb{R}^+$ (in s^{-1}) ist eine von den Eigenschaften der Flüssigkeit und des Gefäßes abhängige Konstante.

Ein zu untersuchender Abkühlungsprozess wird durch eine Funktion T der obigen Form beschrieben. Dabei beträgt die Anfangstemperatur $T_0 = 90$ °C und die Umgebungstemperatur $T_U = 20$ °C. Die Abkühlungskonstante hat den Wert $k = 0{,}002$. Die Zeit t wird in Sekunden gemessen, die Temperatur $T(t)$ in °C.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie den Wert des Differenzenquotienten der Funktion T im Intervall [0 s; 300 s] und interpretieren Sie den berechneten Wert im Hinblick auf den beschriebenen Abkühlungsprozess!

Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von T für große Werte von t und interpretieren Sie den Verlauf im gegebenen Kontext!

b) Der Wert $T'(t)$ kann als „Abkühlungsgeschwindigkeit" der Flüssigkeit zum Zeitpunkt t gedeutet werden.

Geben Sie für den zu untersuchenden Abkühlungsprozess eine Funktionsgleichung für T' an!
Geben Sie weiters denjenigen Zeitpunkt an, zu dem der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit am größten ist!

Der Graph von T' und die t-Achse schließen im Intervall [0 s; 600 s] eine Fläche von ca. 49 Flächeneinheiten ein.
Interpretieren Sie diesen Wert unter Verwendung der entsprechenden Einheit im gegebenen Kontext!

c) Eine zweite Flüssigkeit in einem anderen Gefäß hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Temperatur von 95 °C. Nach einer Minute ist die Temperatur auf 83,4 °C gesunken, die Umgebungstemperatur beträgt $T_U = 20$ °C. Die Funktion T_2 beschreibt den Abkühlungsprozess dieser Flüssigkeit.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Abkühlungskonstante k_2 für diesen Abkühlungsprozess berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Wert!

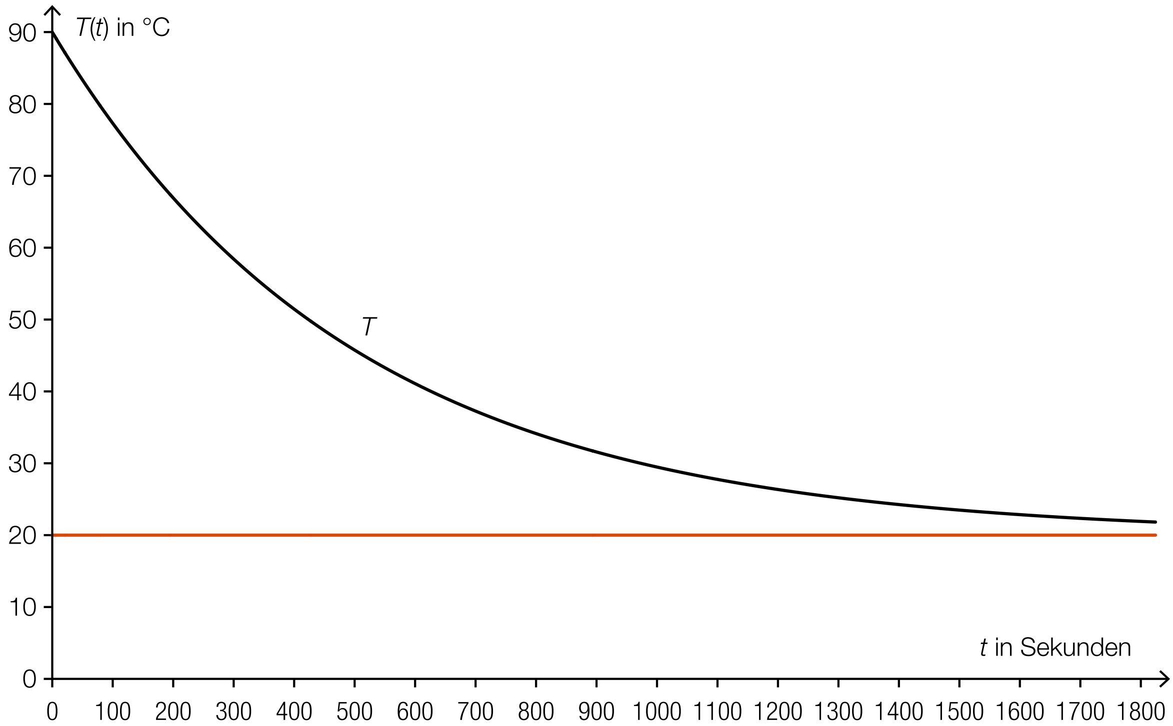
Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Graphen der Funktionen T und T_2 und interpretieren Sie die Koordinaten des Schnittpunkts im gegebenen Kontext!

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{T(300) - T(0)}{300} \approx -0{,}1053$

In den ersten fünf Minuten kühlt die Flüssigkeit durchschnittlich um ca. 0,1 °C pro Sekunde ab.

Der Graph von T nähert sich im Laufe der Zeit der Umgebungstemperatur (20 °C) an.



b) $T'(t) = -0{,}14 \cdot e^{-0{,}002 \cdot t}$

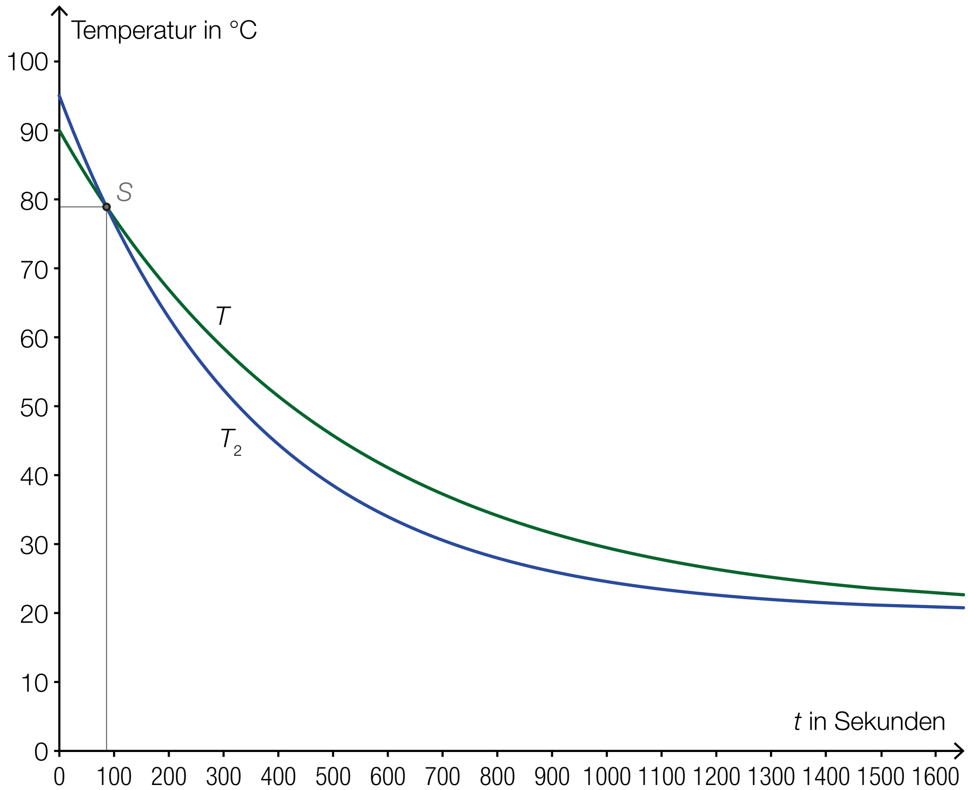
Der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit ist zum Zeitpunkt $t = 0$ am größten.

Die Flüssigkeit kühlt in den ersten zehn Minuten insgesamt um ca. 49 °C ab.

c) $T_2(t) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot t} \Rightarrow$

$T_2(60) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot 60} = 83{,}4$

$k_2 \approx 0{,}0028\ \text{s}^{-1}$



Schnittpunkt: $S \approx (86{,}2\,|\,78{,}9)$
Nach ca. 86,2 Sekunden haben beide Flüssigkeiten eine Temperatur von ca. 78,9 °C.