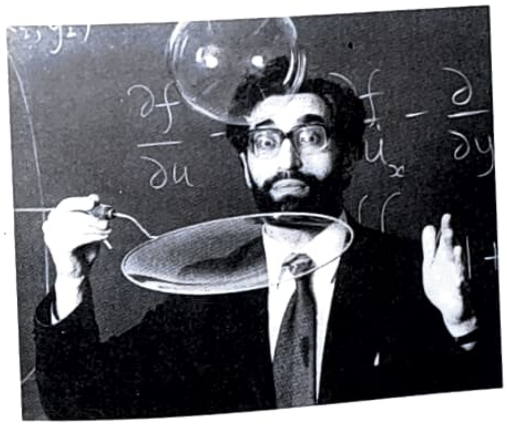
Come essere il più piccoli possibile

Perché non provate questo semplice esperimento?

Prendete un qualsiasi telaietto di fil di ferro, anche tridimensionale, e immergetelo in una bacinella d'acqua saponata (o detersivo per piatti).

Quando lo ritirate fuori, troverete che le varie parti del telaio sono collegate da una sottile pellicola di liquido saponato.

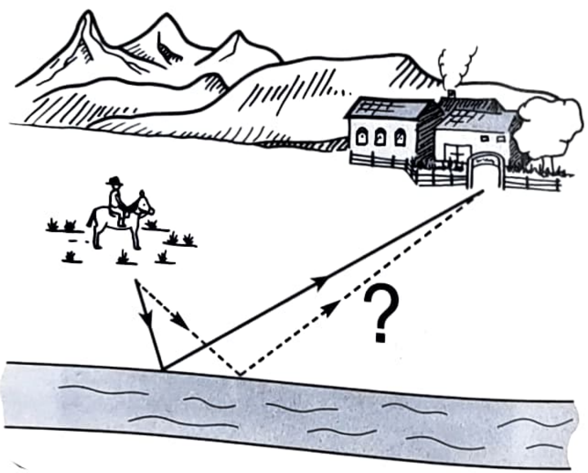
E per quanto possa essere complicata, questa pellicola ha una proprietà molto interessante: cerca sempre di organizzarsi in modo che l'area della propria superficie sia *la più piccola possibile*.



Ora, in matematica i problemi che iniziano con «Determinare il più piccolo...» (o «il più grande..») hanno spesso un'attrattiva speciale, in particolare perché a volte hanno soluzioni molto eleganti, che danno grande soddisfazione.

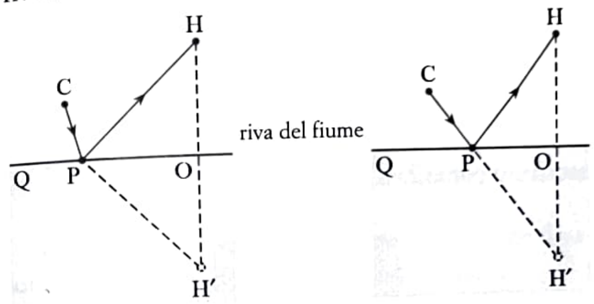
Ecco un esempio semplice. Immaginate che un cowboy stia tornando a casa dopo una lunga giornata nelle praterie, e all'improvviso decida di portare il suo cavallo al fiume per un'ultima bevuta.

Il problema è: quale percorso dovrebbe seguire *affinché la distanza totale fino a casa sia la più piccola possibile*? In altri termini, quale punto della riva dovrebbe scegliere per minimizzare la distanza totale da percorrere?



La risposta è che il cowboy dovrebbe scegliere i percorsi di «andata» e «ritorno» dal fiume in modo tale che essi *formino angoli uguali con il fiume*.

Per rendersene conto, l'astuzia è immaginare che la fattoria H si trovi in una posizione diversa, come mostra il disegno a sinistra: alla stessa distanza dalla riva *ma dal lato opposto*, nel punto H'.



In questo modo, qualunque sia il punto P della riva in cui il cowboy sceglie di fermarsi, le distanze PH e PH' saranno uguali.

Quindi il problema di scegliere P in modo da minimizzare CP + PH è identico al problema di scegliere P in modo da minimizzare CP + PH'.

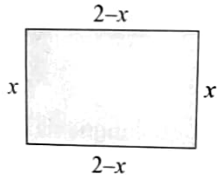
Ma questo «nuovo» problema è facile; lo si risolve scegliendo P in modo tale che $C\hat{P}H'$ sia un segmento rettilineo, come nel disegno a destra. E in questo caso gli angoli $O\hat{P}H'$ e $Q\hat{P}C$ saranno uguali.

Siccome gli angoli $O\hat{P}H'$ e $O\hat{P}H$ sono *sempre* uguali, qualunque sia la posizione di P lungo la riva, ne segue che la traiettoria più breve CP + PH si ottiene quando l'angolo $Q\hat{P}C$ è uguale all'angolo $O\hat{P}H$.

Ragionamenti astuti come questo vanno benissimo, ma i matematici hanno anche bisogno di metodi generali per affrontare i problemi di massimo o minimo. E uno dei più noti sfrutta il calcolo infinitesimale che abbiamo già incontrato.

Per vedere come funziona, immaginate un contadino che ha 4 km di recinzione e vuole usarli per creare un recinto rettangolare che racchiuda l'area più grande possibile. Come dovrà procedere?

Be', se diciamo che due lati del rettangolo sono lunghi x, allora gli altri due lati devono avere lunghezza $2 - x$. Dunque l'area sarà $x\,(2 - x)$, che si può riscrivere come $2x - x^2$.



Il problema del contadino si riduce quindi a determinare il valore di x per cui la quantità:

$$y = 2x - x^2$$

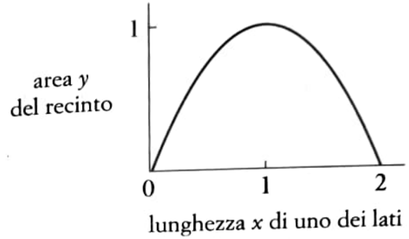
è la più grande possibile.

Ed è qui che entra in gioco il calcolo infinitesimale. Infatti una variazione di x farà variare y, e possiamo usare i metodi visti nel capitolo 6 per dedurre la *rapidità* con cui y varia al variare di x:

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2x.$$

Così, se x è minore di 1, dy/dx è positivo e y aumenta al crescere di x. Ma se x è maggiore di 1, allora dy/dx è negativo e y diminuisce al crescere di x.

Tutto questo ci aiuta a tracciare il grafico di y in funzione di x:



Ma non solo; ci dice anche, ovviamente, che il valore massimo di y deve verificarsi quando:

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

cioè quando $x = 1$, perché quello è il punto in cui y smette di aumentare al crescere di x e inizia a diminuire.

Guardando la questione in modo un po' diverso, si dice che dy/dx è la *pendenza* della curva in ogni punto, cioè misura quanto la curva è ripida.

Ed è in corrispondenza di $x = 1$ che la pendenza cambia: da positiva diventa negativa.

Se ora ricordiamo che il recinto del contadino aveva lati di lunghezza x e $2 - x$, vediamo che $x = 1$ corrisponde a un recinto quadrato.

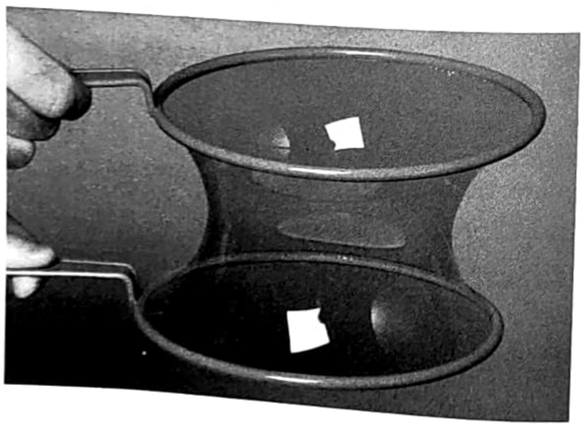
Perciò la forma quadrata è la migliore, quella che massimizza l'area racchiusa dal recinto.

In entrambi i problemi che abbiamo considerato finora, il compito in pratica era quello di determinare un numero: la posizione del punto P lungo la riva nel primo problema, la lunghezza del lato x nel secondo.

Ma a volte in matematica il compito è quello di determinare un'intera *curva*, o addirittura una *superficie*, tale che una certa quantità sia massima o minima.

Immaginate per esempio di prendere due anelli circolari, immergerli nell'acqua saponata e poi ritirarli fuori. Una sottile pellicola saponata si estenderà fra i due e, come accennato prima, cercherà di disporsi in modo che l'area della propria superficie sia la più piccola possibile.

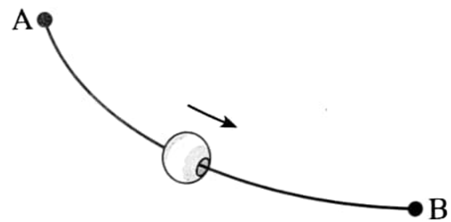
Allora, dato il raggio degli anelli e la distanza che li separa, come possiamo usare la matematica per determinare la forma della pellicola saponata che minimizza l'area della superficie?



Questo è un problema veramente difficile; per affrontarlo bisogna usare una branca della matematica piuttosto sofisticata, chiamata *calcolo delle variazioni.*

E lo stesso vale per un altro problema famoso, formulato nel 1696 dal matematico svizzero Johann Bernoulli.

In questo caso una perlina scivola lungo un filo che unisce due punti dati, A e B:



La perlina non viene «spinta» in alcun modo; all'inizio è ferma, e non fa che scivolare giù sotto l'azione del suo stesso peso. Supponiamo inoltre che non ci sia attrito.

La domanda è questa: qual è la curva che permette alla perlina di scivolare da A a B *nel minore tempo possibile*?

(Si potrebbe supporre che la risposta sia il segmento rettilineo che congiunge A a B; questa traiettoria corrisponde senz'altro alla *distanza* minore, ma in realtà *non* al tempo più breve.)

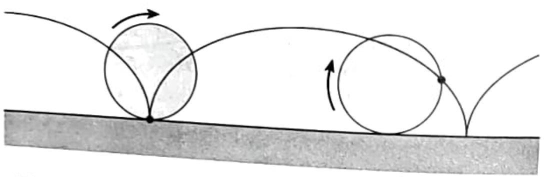
Bernoulli conosceva la soluzione, e sfidò i matematici del suo tempo a risolvere il problema.

L'idea fu assai ben accolta dal marchese de l'Hôpital, per esempio, che rispose subito:

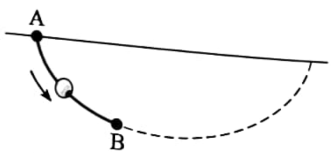
> Questo problema mi sembra fra i più curiosi e graziosi mai proposti, e mi piacerebbe assai applicarmici, ma per questo sarebbe necessario che voi me lo mandaste ridotto alla matematica pura, perché la fisica mi mette a disagio...

Isaac Newton invece non accettò la sfida con altrettanto buonumore; a quanto pare borbottò che non amava essere «importunato da stranieri su cose matematiche».

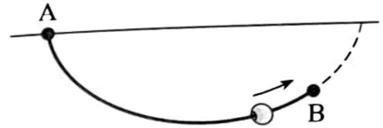
In realtà la soluzione al problema è una *cicloide*. È la curva tracciata da un punto fisso sul bordo di una ruota che rotola su una superficie piatta:



L'idea è perciò di costruire una cicloide delle dimensioni giuste, capovolgerla e farla passare attraverso i punti A e B dati:



E il fatto più curioso di tutti è che, a seconda della posizione relativa di A e B, la curva che corrisponde alla discesa più rapida può anche passare *sotto* B prima di risalire:

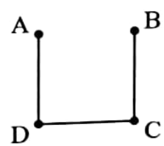


Concludiamo però il capitolo con un problema che a prima vista sembra semplice ma in realtà è così insidioso che, nella sua forma più generale, può mettere in difficoltà anche i più veloci fra i computer moderni.

Il problema è questo: come si collega un certo numero di città con una rete stradale che sia la più corta possibile?

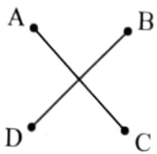
Per avere un'idea di dove sta la difficoltà, considerate il caso «semplice» in cui ci sono quattro sole città – A, B, C e D – che per comodità disporremo ai vertici di un quadrato di lato 1.

Ora, l'unico requisito per le nostre strade è che gli abitanti di ciascuna città siano in grado di raggiungere tutte le altre città. Quindi potremmo limitarci a costruire una rete stradale formata da tre segmenti rettilinei:



Ma di certo questa rete, di lunghezza pari a 3 unità, non è la più corta che connetta le quattro città.

Se si fanno un po' di tentativi, si scopre in fretta che si può far di meglio introducendo un'intersezione al centro e usando le diagonali:



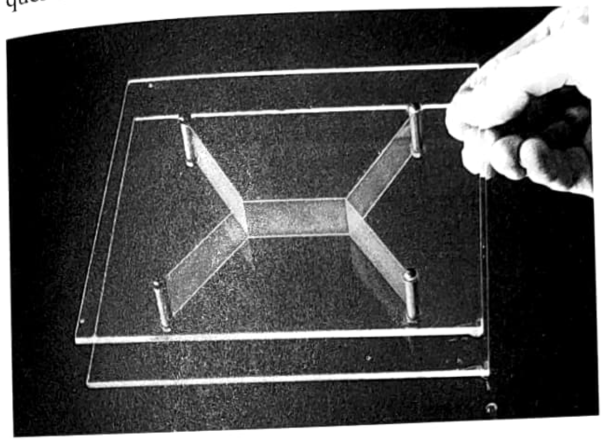
Infatti AC e BD saranno lunghi entrambi $\sqrt{2}$, secondo il teorema di Pitagora, quindi la lunghezza totale di questa nuova rete di strade sarà $2\sqrt{2} = 2{,}83$.

E ovviamente a questo punto ci si chiede subito se non sia possibile migliorare ancora il risultato, introducendo più di una intersezione. Ma se anche fosse così, quante ne servono esattamente e dove bisogna metterle?

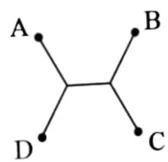
Questi sono problemi veramente difficili, e un modo di affrontarli è *barare* e ricorrere all'uso di pellicole saponate.

Immaginate perciò di prendere due lastre di perspex parallele e collegarle con quattro barrette disposte agli angoli di un quadrato. Ogni volta che immergiamo questa struttura in una bacinella d'acqua saponata e poi la ritiriamo fuori, otterremo una pellicola saponata tale da avere un'area superficiale minore che in qualsiasi disposizione appena diversa. In altre parole, ogni volta otterremo un buon candidato alla soluzione del nostro problema della rete stradale.

E prima o poi la pellicola saponata si disporrà in una configurazione davvero particolare, come in questa foto:



Sebbene la dimostrazione puramente matematica non sia facile, questa è proprio la soluzione al nostro problema della rete stradale. Servono cioè cinque segmenti rettilinei, con due intersezioni triple in cui essi formano angoli di 120°:



La lunghezza totale della rete è allora di $1 + \sqrt{3} = 2{,}73$ unità, e non esiste una rete di collegamento più corta di questa.