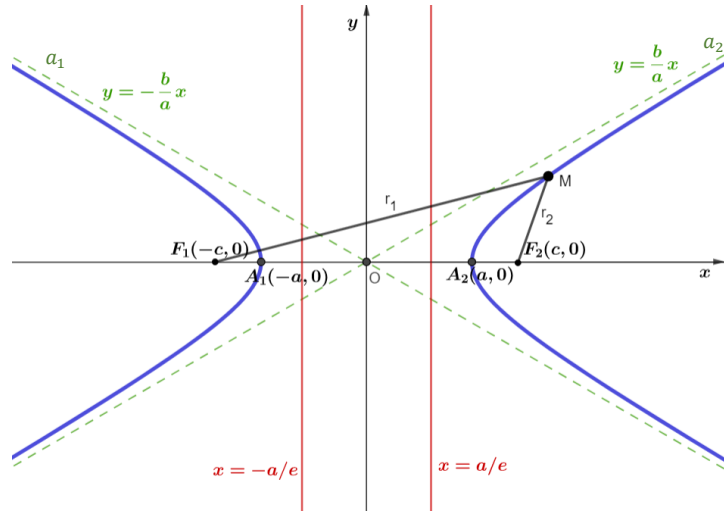


ХИПЕРБОЛА – конструкција, једначина, асимптоте

Дефиниција: Хипербола је геометријско место тачака у равни за које важи да је разлика растојања до две утврђене тачке стална.



- Фиксне тачке су $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (фокуси или жиже хиперболе).
- Стално растојање је једнако $2a$.
- **Реална (велика- главна) оса** хиперболе $2a$, а крајње тачке $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ су **темена** хиперболе
- **Имагинарна (споредна) оса** је права управна на реалну осу у тачки која је средиште дужи са крајевима у пресецима реалне осе хиперболе и саме хиперболе.
- Растојање од F_1 до F_2 назива се **фокусно растојање** и означава се са $2c$, а средиште дужи F_1F_2 назива се центар хиперболе.
- c је **линеарни ексцентрицитет**.
- $e = \frac{c}{a}$ је **нумерички ексцентрицитет**.
- Дужи $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$ су **потези (радијус – вектори)** хиперболе.

Како је у троуглу F_1F_2M на слици разлика двеју страна увек мања од треће, то је $|r_1 - r_2| = 2a < 2c$, па је за хиперболу $e > 1$.

По дефиницији хиперболе је

$$|r_1 - r_2| = 2a \wedge r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \wedge r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} / 2$$

$$\begin{aligned}
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow \\
x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \Leftrightarrow \\
4xc &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad /:4 \Leftrightarrow xc = a^2 \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\
xc - a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad /^2 \Rightarrow \\
c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \Leftrightarrow \\
c^2x^2 + a^4 &= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \Leftrightarrow c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \Leftrightarrow \\
(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2)
\end{aligned}$$

како је $c > a$, то је $c^2 - a^2$ позитивно, па се уводи

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ односно } b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

и горња једначина постаје

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

H: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ – општи облик једначине хиперболе

H: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - *канонски облик* једначине хиперболе или *централна једначина* хиперболе

Параметри **a** и **b** су дужине *реалне* односно *имагинарне полуосе* хиперболе.

Неке особине хиперболе:

1. Хипербола је **осно симетрична** у односу на обе координатне осе и **централно симетрична** у односу на координатни почетак.
2. Из једначине хиперболе следи

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$$

па је

$$x^2 \geq a^2, \text{ тј. } x \geq a \text{ или } x \leq -a.$$

Одакле се види да се **хипербола састоји из две одвојене гране** које су симетричне у односу на ординатну осу.

3. Свака дуж, чије се крајње тачке налазе на хиперболи, назива се тетива хиперболе, а свака тетива која пролази кроз центар хиперболе је њен пречник. Међутим за разлику од кружнице и елипсе, хипербола нема пречник у сваком правцу.

Одредимо у ком правцу хипербола може да има пречник. Одредимо који услов треба да испуњава права $y = kx$ да би секла хиперболу, тј. да систем једначина

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \wedge \quad y = kx$$

има решење. Заменом y из друге једначине у прву добијамо

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - k^2 a^2}$$

Ова једначина има решење ако

$$b^2 - a^2 k^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 k^2 < b^2 \Leftrightarrow k^2 < \frac{b^2}{a^2}$$

тј. када је

$$|k| < \frac{b}{a}$$

Уколико је $|k| \geq \frac{b}{a}$, систем нема решење.

Граничне праве $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$ за које не постоји пречник хиперболе називају се **асимптоте** хиперболе, то су праве a_2 и a_1 на слици.

Још једна права која је значајна за криве линије другог реда је **директриса**.

Директриса је права за коју важи да је количник растојања тачке на хиперболи од фокуса и од дате праве константан и једнак броју e .

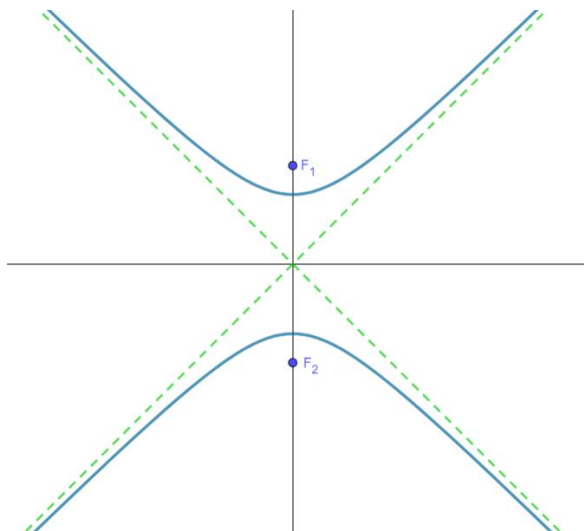
$$d: x = \pm \frac{a}{e}$$

<https://www.geogebra.org/m/ursydz4c>

- Хипербола чије су жиже на y – оси има једначину $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, тада је y – оса реална оса хиперболе, док је x – оса њена имагинарна оса.
- Ако је $a = b$, једначина хиперболе постаје :

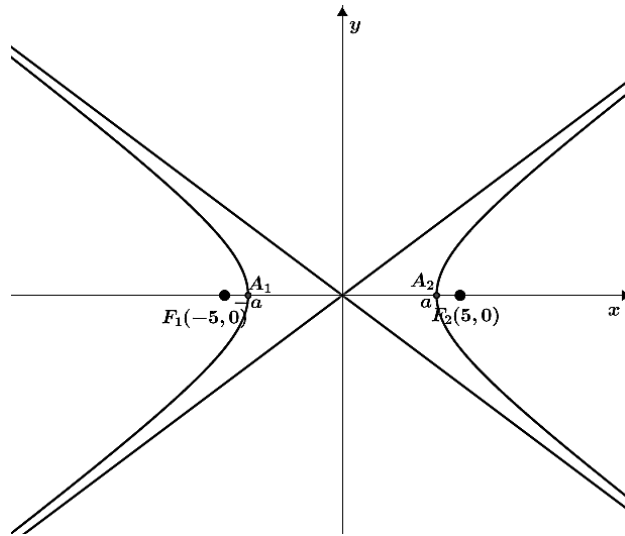
$$x^2 - y^2 = a^2$$

Та хипербола се зове **једнакостранична хипербола**. Њене асимптоте $y = x$ и $y = -x$ се секу под правим углом па се она често назива и **правоугла хипербола**.



- 1) Наћи једначину хиперболе ако су координате жижа $F(\pm 5, 0)$, а растојање између темена једнако 8.

Решење 1:



$$2a = 8 \Leftrightarrow a = 4 \quad F(\pm 5, 0) \Rightarrow c = 5$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$H: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow$$

$$H: 9x^2 - 16y^2 = 144$$

- 2) Одредити једначину хиперболе која садржи тачке $P(-5, 2)$ и $Q(2\sqrt{5}, \sqrt{2})$.

Решење:

$$H: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\left. \begin{array}{l} P \in H \Rightarrow b^2(-5)^2 - a^22^2 = a^2b^2 \\ Q \in H \Rightarrow b^2(2\sqrt{5})^2 - a^2(\sqrt{2})^2 = a^2b^2 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 25b^2 - 4a^2 = a^2b^2 \\ 20b^2 - 2a^2 = a^2b^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 25b^2 - 4a^2 = a^2b^2 \\ 25b^2 - 4a^2 = 20b^2 - 2a^2 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 25b^2 - 4a^2 = a^2b^2 \\ 5b^2 = 2a^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 25b^2 - 4a^2 = a^2b^2 \\ 5b^2 = 2a^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} b^2 = \frac{2a^2}{5} \\ 25 \cdot \frac{2a^2}{5} - 4a^2 = a^2 \cdot \frac{2a^2}{5} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} b^2 = \frac{2a^2}{5} \\ 6a^2 = \frac{2a^4}{5} / \cdot 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} b^2 = \frac{2a^2}{5} \\ 30a^2 = 2a^4 / : 2a^2 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} b^2 = \frac{2a^2}{5} \\ 15 = a^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} b^2 = 6 \\ a^2 = 15 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 15 \\ b^2 = 6 \end{array} \right\}$$

$$H: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \wedge a^2 = 15 \wedge b^2 = 6 \Rightarrow$$

$$H: 6x^2 - 15y^2 = 6 \cdot 15 / : 3 \Leftrightarrow$$

$$H: 2x^2 - 5y^2 = 30$$