Funktionen

Überblick

Das dritte Semester der Abendrealschule ist ein eng getaktetes, inhaltvolles Semester im Fach Mathematik. Das nachfolgende Skript gibt Ihnen die Möglichkeit, in Ergänzung zum Präsenzunterricht, den Funktionsbegriff mathematisch zu erfassen. Zu den gewählten Beispielen gehören interaktive Dateien, die Sie unter folgendem Link finden können: http://ggbtu.be/bNFdgzEsC
Zum besseren Verständnis von Funktionen im Mathematikunterricht, ist es empfehlenswert, sich mit einer Dynamischen Geometrie Software, wie z.B. GeoGebra vertraut zu machen. GeoGebra ist auch die Software, mit der die o.g. interaktiven Dateien erstellt wurde. Programmdownload unter: www.geogebra.org.

Funktionen

Der Begriff Funktion

Versuchen Sie mal, sich zu erinnern, wann Sie das Verb funktionieren in Ihrem täglichen Leben verwenden. Möglicherweise verwenden Sie es in der Negation ‚nicht funktionieren', aber die Situation ist immer dieselbe:
Sie führen eine Handlung aus und erwarten eine Reaktion. Die alltäglichste Form ist die, dass Sie einen Lichtschalter betätigen und erwarten, dass das Licht angeht. Ist das nicht der Fall, sagen Sie – oder meinen zumindest- das hat nicht funktioniert, das funktioniert nicht etc.
Damit haben Sie schon den wichtigsten Schritt zum Verständnis des Funktionsbegriffs getan, denn es gehören zwei Dinge zusammen:

1. Die Aktion ➔ Betätigen des Lichtschalters
2. Reaktion ➔ das Licht geht an

Wenn Sie diese Abhängigkeit weiterspinnen, dann kommen Sie auf die aktive Teilnahme im Straßenverkehr: Wenn Sie sich mit jemanden telefonisch in Dortmund verabreden und selbst in Bonn wohnen, dann werden Sie nicht sagen, dass sie in 20 Minuten da sein werden, sondern realistischer weise eine Zeit von etwa 90 Minuten angeben. Hier setzen Sie intuitiv eine Strecke und eine Zeit in Beziehung, was mathematisch zweierlei bedeutet:

1. Sie benutzen den Begriff der Durchschnittsgeschwindigkeit
2. Sie benutzen einen dynamischen (beweglichen) Vorgang – sie fahren mit dem Auto- und geben einen statischen Zeitpunkt an, nämlich, wann Sie den Zielpunkt erreichen.

Diese beiden Lebenssituationen lassen sich in mathematischen Modellen abbilden. Dieser Satz beinhaltet zwei fundmentale Begriffe der Mathematik: das Verb *abbilden* und das Nomen *Modell*.
Das Beispiel mit dem Lichtschalter hat zwei Zustände:

1. entweder es fließt kein (elektrischer) Strom ➔ das Licht bleibt aus
2. oder es fließt ein (elektrischer) Strom ➔ das Licht leuchtet

Als Modell dienen zwei Graphen und ein Schieberegler, der als Schalter dient.
Ist der Wert kleiner als Null, fließt kein Strom, der Graph verläuft auf der Nulllinie, liegt also auf der x-Achse.
Ab dem Wert 0, findet der –rasend schnelle- Einschaltprozess statt, und es fließt ein kontinuierlicher Strom von einem Ampère.
Diese beiden Zustände sind als blaue und rote Geraden abgebildet. Die Punkte I_0 und I_1 verdeutlichen die Abbildung des Stromflusses in Abhängigkeit von der Zeit.
Sie finden die Datei im GeoGebra-Book als Datei Heavyside.
Einschaltprozesse, werden mit Hilfe der Heavyside-Funktion dargestellt. Diese Funktion ist mathematisch sehr kompliziert und auch kein Unterrichtsgegentand dieses Kurses, aber sie verdeutlicht, was der Begriff Funktion mit Ihrem täglichen Leben zu tun hat, nämlich die Veränderung von Zuständen. Dieser dynamische Aspekt wird Sie von nun an durch alle Funktionen begleiten.

Funktionen

Betrachtung des Lichtschalters als funktionales Modell

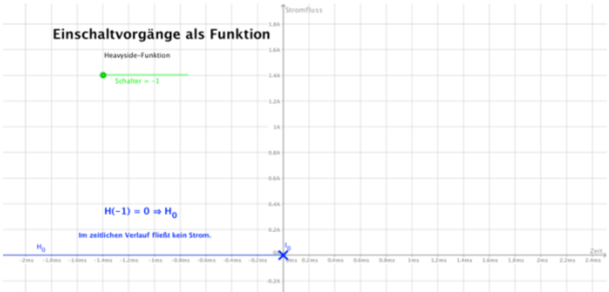

Abbildung 1: Lichtschalter um Zustand aus

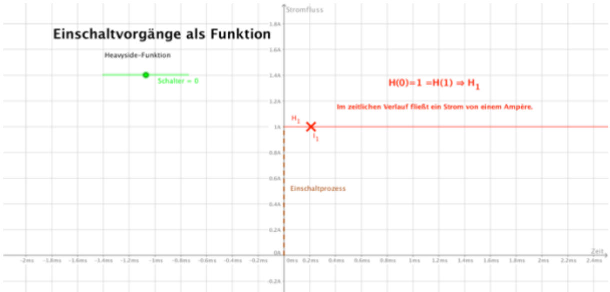

Abbildung 2: Lichtschalter im Zustand ein

Nach diesem kleinen Ausflug haben Sie verstande, das eine Funktion eine dynamische Beschreibung einer Reaktion auf eine Aktion ist. Wenn Sie die Reaktion vorhersagen können, Ihre Erwartung also erfüllt wird, dann bringen Sie das mit dem Satz: „Es funktioniert!“ zum Ausdruck. Betrachten Sie nun den Besuch Ihres Telefonpartners in Dortmund, den Sie, wohnhaft in Bonn nun treffen wollen. Um diese Situation zu modellieren, benötigen Sie einige Angaben:

1. Wie groß ist die Entfernung Bonn – Dortmund? (in etwa 120 km)
2. Wie hoch wird Ihre durchschnittliche Geschwindigkeit sein? (ca. 80 km pro Stunde)

Diese Bedingungen lassen sich so modellieren:

Sie finden diese Datei unter dem Namen Dortmund und können sich die Situation mit dem Schieberegler Zeit verdeutlichen.

Nun müssen Sie sich über folgendes klar werden:

a) Was wollen Sie beeinflussen? b) was können Sie beeinflussen?

Vermutlich wollen Sie so früh wie möglich in Dortmund sein, es sei denn es ist Ihr Scheidungstermin, aber die Zeit fließt ohne Ihr Zutun, die Erde dreht sich weiter, ob Sie im Stau stehen oder nicht. Deshalb können Sie die Zeit selbst nicht beeinflussen, aber –im Rahmen des Verkehrsaufkommens und der Straßenverkehrsordnung- Ihre

Funktionen

Geschwindigkeit, genau genommen Ihre Durchschnittsgeschwindigkeit, aber das hatten Sie im 2. Semester.

Kurz gesagt, je schneller Sie fahren (können), desto eher erreichen Sie Ihr Ziel. Was passiert mit dem Geschwindigkeitsgraphen, wenn Sie Ihre Zeitvorgabe variieren? Probieren Sie es aus und beschreiben Sie für sich, die Veränderungen.

Diese beiden Beispiele aus Ihrem Alltag führen zu zwei wichtigen Begriffen: *abhängig* und *unabhängig*, diese beiden Begriffe bilden das Fundament der Funktionen. Es gibt eine *unabhängige Größe*, die beliebig gewählt werden kann und eine *abhängige Größe*, die genau das tut, was die unabhängige Größe von ihr will. Vergleichen Sie diese beiden Adjektive in Ihrem Sprachgebrauch in Beziehungen, Politik, Sport und Gerichtsverhandlungen.
In der Mathematik ist die *unabhängige Größe* immer auf der *x – Achse* zu finden, das ist die *horizontale Achse*. Die *abhängige Größe* wird immer auf der *y – Achse* abgebildet, dass ist die *vertikale Achse*.
Die Abhängigkeit wird durch eine besondere Schreibweise ausgedrückt: f(x).
Gesprochen wird der Ausdruck f(x) als: ‚*f* (abhängig) *von x*', soll also ausdrücken, dass f funktional von x abhängig ist. Die Datei *Was gehört zu x,* verdeutlicht Ihnen diesen Zusammenhang.

Funktionen

Lineare Funktionen

Eine lineare Funktion beinhaltet durch das Adjektiv linear eine Eigenschaft, die Sie zum Beispiel im Wort Lineal wiederfinden. Eine lineare Funktion können Sie also mit einem Lineal zeichnen, sie verläuft ‚gerade', und wird mathematisch Gerade genannt.
Sie haben schon solche Funktionen kennengelernt, haben diese allerdings als „proportionale Zuordnungen" bezeichnet. In Aufgabenkomplex Zuordnungen haben Sie den „Dreisatz" als Lösungsstrategie erlernt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Die Brezelgeschichte**									
2	**Quelle: Hans- Magnus Enzensberge: Der Zahlenteufel**									
3	Wenn zwei Bäcker in sechs Stunden 444 Brezeln backen, wie lange brauchen dann fünf Bäcker um 88 Brezeln zu backen?									
4										
5		**Zeit (h)**	**Brezeln**			**Bäcker**	**Brezeln**			
6	:6|	6	444	|:6	:2|	2	74	|:2		
7		1	74		*5|	1	37	|*5		
8		Zwei Bäcker backen in 1 Stunde 74 Brezeln.				5	185			
9		**Zeit (min)**	**Brezeln**			Also backt ein Bäcker 37 Brezeln in einer Stunde.				
10	:185|	60	185	|:185		Dann backen 5 Bäcker 185 Brezeln in einer Stunde				
11	*88|	0,32432432	1	|*88						
12		28,5405405	88							
13		Fünf Bäcker benötigen für 88 Brezeln 28,54 Minuten.								
14										

Abbildung 3: Die Brezelaufgabe

Eine humorvolle Aufgabe dazu findet sich bei Hans-Magnus Enzensbergers Zahlenteufel:
„Wenn zwei Bäcker in sechs Stunden 444 Brezeln backen, wie lange brauchen dann fünf Bäcker um 88 Brezeln zu backen?"

Diese Aufgabe ist weder originell, noch hat sie etwas mit Mathematik zu tun, außer, dass man sie lösen kann. Der Abbildung zeigt eine Lösungsmöglichkeit, die Sie vermutlich kennengelernt haben.
Es wurden Zuordnungen gefunden: Zeit ➔ Brezeln bzw. Bäcker ➔ Brezeln und diese wurden in Tabellen dargestellt. Jede Tabelle lässt sich in ein einem Koordinatensystem darstellen. Sie finden dazu die Datei Brezelgeschichte in Ihrem GeoGebra Book.

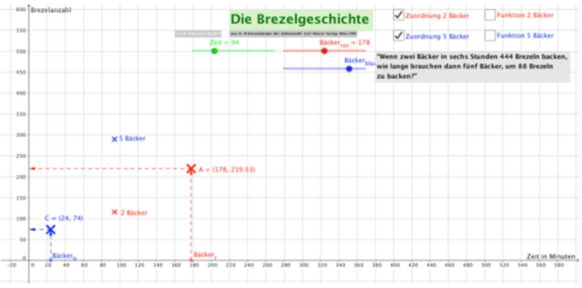

Abbildung 4: Brezelaufgabe mit GeoGebra

In Abbildung 4 könne Sie erkennen, dass einmal ein blauer und roter Punkt übereinander liegen. Beide Punkte gehören zu demselben Zeitpunkt. Die Zeit ist auf der x-Achse abgetragen, denn die Anzahl der Brezeln ist ja von der (Arbeits-)Zeit der Bäcker abhängig. Völlig einleuchtend ist, dass 5 Bäcker in der gleichen Zeit mehr Brezeln backen, deshalb liegt dieser Punkt auch höher.

Abbildung 5: funktionale Betrachtung der Brezelaufgabe

Im Zuordnungsaspekt liegen die Punkte nicht übereinander, denn die Bäcker arbeiten ja vermutlich in unterschiedlichen Backstuben mit unterschiedlichen Arbeitszeiten. Nun kann man zwei Punkte, die man mit einem Lineal verbinden kann. Dann ergibt sich das Bild in Abbildung 5. Da die Bäcker vor Beginn der Arbeitszeit keine Brezeln erstellen, ist verständlich, dass die Geraden, durch den Nullpunkt verlaufen. Dass fünf Bäcker mehr Brezeln erzeugen, kann man an der „Steilheit" der beiden Geraden erkennen. Auch wenn weiterhin die Sinnhaftigkeit dieser Aufgabe in Frage gestellt werden muss, eignet sie sich jedoch hervorragend, um in die mathematische Betrachtung der Funktionen einzusteigen.

Funktionen

Vom Beispiel zur Mathematik

Wie das amüsante Beispiel der Brezelaufgabe gezeigt hat, finden Mathematiker auch in den einfachsten Sachverhalten tieferliegende Mathematik. Bevor jedoch hier in die zunächst reine mathematische Betrachtung eingestiegen wird, noch ein kleines Gedankenexperiment: Wenn Sie eine eigene Wohnung bewohnen –als Mietobjekt oder Eigentum- müssen Sie sich bei einem Energieversorgungsunternehmen (EVU) anmelden, damit Sie elektrische Energie nutzen können. Die Abrechnung erfolgt einmal im Jahr, und Sie zahlen einen monatlichen Abschlag. Stellen Sie sich vor, Sie würden einen Monat lang verreisen, und keine elektrische Energie nutzen. Würden Ihnen in diesem Monat keine Kosten für elektrische Nutzung entstehen?

Doch, denn Sie bezahlen einen sogenannten Grundpreis. Alle weiteren Kosten – außer des Grundpreises- steigen linear mit der Nutzung der elektrischen Energie an. Als Beispiel soll ein jährlicher Grundpreis von 60 € angenommen werden, sowie ein Preis von 0,22 € pro genutzter Kilowattstunde.

Dafür lässt sich eine EXCEL-Tabelle erstellen:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1	**Fiktives Beispiel zur Energienutzung eines Haushalts**																								
2																									
3	**Grundpreis:**	**60 €**	**p.a.**																						
4	**Arbeitspreis:**	**0,22 €**	**pro kWh**																						
5																									
6	**Nutzung**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
7	**Preis**	**60,00 €**	**60,22 €**	**60,44 €**	**60,66 €**	**60,88 €**	**61,10 €**	**61,32 €**	**61,54 €**	**61,76 €**	**61,98 €**	**62,20 €**	**62,42 €**	**62,64 €**	**62,86 €**	**63,08 €**	**63,30 €**	**63,52 €**	**63,74 €**	**63,96 €**	**64,18 €**	**64,40 €**	**64,62 €**	**64,84 €**	**65,06 €**
8																									

Diese Tabelle zeigt, dass beim Wert 0 (entspricht 0 genutzte Kilowattstunden) der Preis nicht 0 wird.

Lässt man sich diese Tabelle in einem Koordinatensystem plotten (anzeigen), ergibt sich folgendes das Bild in Abbildung 6.

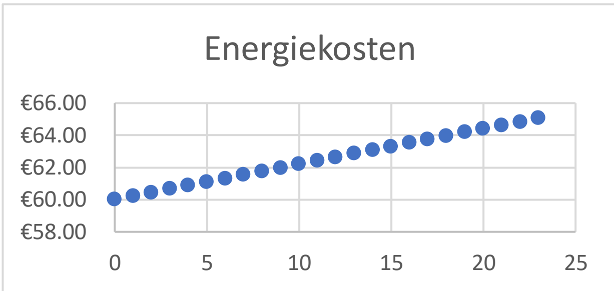

Abbildung 6: Plot der fiktiven Energienutzung für 0,22 €/kWh

Die Gerade schneidet die y-Achse nicht im Nullpunkt, sondern bei 60 €.

Wenn nun der der Preis steigt, dann wird die Gerade auch steiler, das funktioniert genau wie bei den Brezeln, aber die Gerade verläuft nicht durch den Nullpunkt. In Ihrer Zuordnungsvorstellung, haben Sie gelernt, dass proportionale Zuordnungen durch den Nullpunkt gehen und alle Punkte auf einer Geraden liegen. Jetzt liegen alle Punkte zwar auf einer Geraden, die Gerade geht aber nicht durch den Nullpunkt. Hier versagt der Zuordnungsbegriff, denn wenn Sie jetzt sagen, diese Zuordnung sei nicht proportional dann haben Sie recht, aber wenn Sie daraus schließen, dass sie „antiproportional“ ist, dann irren Sie, denn Ihre Vorstellung von „antiproportional“ heißt richtigerweise „umgekehrt proportional“, und ist hier nicht anwendbar. Die Rettung liegt im Begriff „Lineare Funktion“, und eine lineare Funktion lässt sich beschreiben als: $f(x) := mx + n$. Wenn man das auf die obigen Beispiele erweitert dann erhält man folgende Funktionen:

2 Bäcker: $B_2(x) := 74x$ 5 Bäcker: $B5(x) := 185x$ Strom: $P(x) := 0{,}22x + 60$

Die Darstellung $f(x) := mx + n$ wird Parameterdarstellung einer linearen Funktion genannt. Die Parameter geben an, wie die Gerade verläuft. Das wird im nächsten Abschnitt genauer erklärt.