

Übung: Strecken und Spiegeln von Funktionsgraphen - LÖSUNG

Aufgabe 1 (Spiegeln). Gib zu der Funktion f jeweils die Funktionsterme von g an, deren Graphen durch Spiegelung von G_f an der x -Achse, bzw. die Funktionsterme von h an, deren Graphen durch Spiegelung von G_f an der y -Achse entstehen.

a)

$$g(x) = -f(x) = -3^x$$

$$h(x) = f(-x) = 3^{-x}$$

b)

$$g(x) = -f(x) = -\cos(x)$$

$$h(x) = f(-x) = \cos(-x)$$

c)

$$g(x) = -f(x) = -\frac{x}{x-4}$$

$$h(x) = f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)-4} = \frac{-x}{-(x+4)} = \frac{x}{x+4}$$

d)

$$g(x) = -f(x) = -(x^3 + 2x^2 - 4x + 2) = -x^3 - 2x^2 + 4x - 2$$

$$h(x) = f(-x) = (-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2 - 4 \cdot (-x) + 2 = -x^3 + 2x^2 + 4x + 2$$

Aufgabe 2 (Strecken). Gib zu der Funktion f jeweils die Funktionsterme von g an, deren Graphen durch Streckung von G_f um den Faktor 2 an der x -Achse, bzw. die Funktionsterme von h an, deren Graphen durch Streckung von G_f um 2 an der y -Achse entstehen.

a)

$$g(x) = f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = 3^{\frac{x}{2}}$$

$$h(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot 3^x \quad \text{Vorsicht: Das ist nicht gleich } 6^x = 2^x \cdot 3^x$$

b)

$$g(x) = f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$h(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot \cos(x)$$

c)

$$g(x) = f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x - 4} = \frac{\frac{1}{2} \cdot x}{\frac{1}{2}(x-8)} = \frac{x}{x-8}$$

$$h(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{2x}{x-4}$$

d)

$$g(x) = f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{2}\right) + 2$$

$$= \frac{1}{8} \cdot x^3 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + 2$$

$$= \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$

$$h(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot (x^3 + 2x^2 - 4x + 2)$$

$$= 2x^3 + 4x^2 - 8x + 4$$

Aufgabe 3 (Gebrochen-rationale Funktion). Streckung mit dem Faktor $\frac{4}{3}$ in x -Richtung:

$$g_1(x) = f\left(\frac{3}{4} \cdot x\right) = \frac{2}{4 \cdot \left(\frac{3}{4}x\right) - 5} = \frac{2}{3x - 5}$$

Anschließend Verschiebung um -3 in y -Richtung:

$$g(x) = g_1(x) - 3 = \frac{2}{3x - 5} - 3 = \frac{2}{3x - 5} - \frac{3(3x - 5)}{3x - 5} = \frac{2 - 9x + 15}{3x - 5} = \frac{17 - 9x}{3x - 5}$$

Aufgabe 4 (Funktionsgraphen Funktionsterme zuordnen).

- a) Beide Graphen lassen sich aus dem Graphen von $f(x)$ sowohl durch Streckung in x - als auch in y -Richtung erhalten. Der gepunktete Graph geht aus G_f durch Streckung um den Faktor 2 in y -Richtung hervor, also ist $g_1(x) = 2 \cdot x^2$ eine Lösung.

Überlegt man sich nun, welcher Streckungsfaktor in x -Richtung den gleichen Einfluss haben würde, so erhält man eine weitere Lösungsmöglichkeit $g_2(x) = (\sqrt{2} \cdot x)^2$. Die folgende Umrechnung zeigt leicht, dass beide Funktionsterme gleichwertig sind:

$$g_2(x) = (\sqrt{2} \cdot x)^2 = \sqrt{2}^2 \cdot x^2 = 2 \cdot x^2 = g_1(x)$$

Vorsicht: Diese Besonderheit gilt nur für einige wenige Funktionen. Du kannst leicht überprüfen, dass für die Funktion $f_1(x) = x^2 + x$, oder die Funktion $f_2(x) = \sin(x)$ eine Streckung in x - und y -Richtung nie zu den selben Funktionsgraphen führen kann.

Überlege: Was muss für den Funktionsterm einer Funktion f gelten, damit – wie in unserem Fall – die Graphen durch Streckung in x - und y -Richtung überhaupt deckungsgleich werden können?

Analog erhält man zum gestrichelten Graphen die zugehörigen Funktionsterme

$$h_1(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2, \quad \text{bzw.} \quad h_2(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x \right)^2$$

- b) Der gepunktete Graph geht aus dem Graphen von f hervor, wenn man diesen zunächst an der x -Achse spiegelt und anschließend um den Faktor 2 in y -Richtung streckt. Der Funktionsterm ist also

$$g(x) = -2 \cdot f(x) = -2 \sin(x)$$

Um aus G_f den gestrichelten Graphen zu erhalten, muss dieser die x -Werte doppelt so schnell durchlaufen, also um den Faktor $\frac{1}{2}$ in x -Richtung gestreckt werden. Das führt zum Funktionsterm

$$h(x) = \sin(2x)$$