Función objetivo. Teorema fundamental de la programación lineal

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach	progLINEAL 03	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

INFORMACIÓN GENERAL

Región factible y conjunto convexo. Maximizar y minimizar la función objetivo mediante el Teorema fundamental de la programación lineal. Ejemplo resuelto.

Vídeo asociado:

https://youtu.be/CwIBYJpZ_Fw

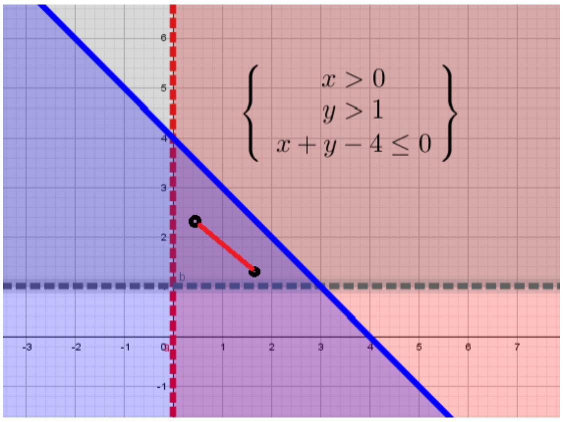
Geogebra asociado:

https://www.geogebra.org/m/ydxufpgf

REGIÓN FACTIBLE, SOLUCIÓN ACOTADA Y CONJUNTO CONVEXO

La región del plano delimitada por la solución general de un sistema de inecuaciones lineales de dos incógnitas se llama **región factible**. Todos los puntos (x, y) de la región factible cumplen todos los requisitos de las inecuaciones del sistema.

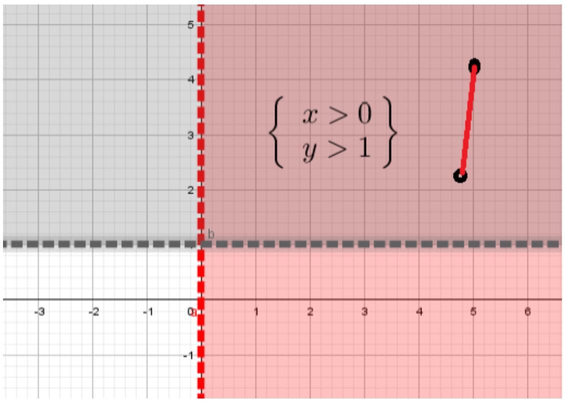
Cada punto de la región factible es una solución particular. Mientras que **toda la región factible se llama solución general**.



Si ningún punto del plano satisface todas las inecuaciones, diremos que el sistema de inecuaciones no tiene solución. Si la región factible está encerrada por un polígono, diremos que la solución está **acotada**.

El triángulo de la figura de la derecha forma la región factible solución de un sistema de tres inecuaciones lineales. Los lados rojos y negros van discontinuos porque las inecuaciones asociadas a esos lados son estrictas. El lado azul es continuo porque la desigualdad asociada a ese lado lleva el signo igual.

Como toda la región factible está acotada por el triángulo, diremos que la solución general está acotada. El segmento que une dos puntos cualesquiera de la región queda dentro de la región factible, por lo que el triángulo genera un **conjunto convexo**.



Si la región factible no está encerrada por un polígono, diremos que la solución **no está acotada**. En este caso, la región solución se extiende hasta el infinito.

La solución del sistema de dos inecuaciones lineales de la derecha no está totalmente delimitada por los lados de un polígono. Diremos que la solución no está acotada. Las rectas roja y negra van en trazo discontinuo porque no pertenecen a la solución, ya que sus inecuaciones asociadas son estrictas.

Nuevamente, el segmento que une dos puntos cualesquiera de la región factible queda dentro de dicha región, por lo que la región factible es un conjunto convexo.

La recta que forma un lado que delimita la solución es continua si la inecuación asociada a ese lado contiene el signo igual. En ese caso, el lado pertenece a la solución.

Si la desigualdad es estricta, la recta se dibuja con trazo discontinuo y ese lado no pertenece a la solución.

Los puntos solución de la región factible forman un **conjunto convexo** si, al unir dos puntos cualesquiera de dicha región, el segmento que los une siempre queda dentro del propio conjunto

FUNCIÓN OBJETIVO. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Cada inecuación de un sistema de inecuaciones lineales es una restricción que deben cumplir los puntos del plano.

Todas las inecuaciones forman el conjunto completo de restricciones.

Una **función objetivo de dos variables** es una función lineal del tipo:

$$f(x,y) = a\,x + b\,y + c$$

Donde a, b, c son números reales y donde las variables x, y están delimitadas por las restricciones de un sistema de inecuaciones lineales. Las variables solo pueden tomar los valores permitidos por la región factible solución del sistema de inecuaciones.

En determinados problemas relacionados con la economía y las ciencias sociales, es interesante obtener el valor más grande posible (máximo) o más pequeño posible (mínimo) que puede tomar la función objetivo $f(x,y)$ en aquellos puntos (x,y) que cumplen las restricciones del sistema de inecuaciones. Es lo que se conoce como **solución óptima de la función objetivo**. Obtener esta solución óptima genera los problemas conocidos como **programación lineal**.

El **Teorema fundamental de la programación lineal afirma que, en una función objetivo $f(x,y)$ de dos variables delimitada por un conjunto convexo, si existe una solución particular que optimice la imagen de la función objetivo, esta solución se encuentra en un vértice de la región factible o en el segmento que une dos vértices (llamado lado).**

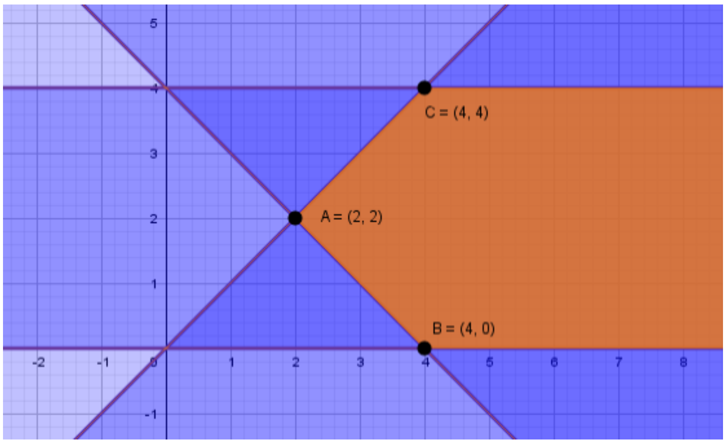
El valor que optimiza a la función objetivo nunca se encuentra en el interior de dicha región factible.

A este teorema podemos añadir tres afirmaciones:

- Si la **región factible es acotada**, el problema de programación lineal **siempre tiene solución**.
- Si **dos vértices optimizan la función objetivo** con el mismo valor, **todos los puntos del segmento que une a dichos vértices también optimizan a la función**. En este caso, habría infinitos puntos solución al problema de programación lineal.
- Si la **región factible no está acotada**, **no siempre será posible encontrar el máximo y/o el mínimo**. **Pero si existen, se encontrarán en al menos uno de los vértices de la región**.

  ¡Ojo! Si, por ejemplo, dos vértices conectados por un lado maximizan la función, todos los puntos de ese lado serán solución del problema de optimización.

  Si un vértice que optimiza la función forma parte de un lado infinitamente largo (al ser región no acotada), debemos tomar un punto arbitrario de ese lado, evaluar la función objetivo y comprobar numéricamente si ese punto también optimiza la función objetivo al mismo valor que lo hace el vértice. Si lo hace, todos los puntos del lado infinito optimizan la función objetivo.



La región factible de la derecha no está acotada. Es un conjunto convexo, pero no está acotado porque por un lado la región se expande hasta el infinito. **Supongamos que deseamos minimizar una función objetivo en esta región factible**.

Para ello, sustituimos en la función $f(x,y)$ las coordenadas de cada vértice A, B y C. Los posibles casos que pueden ocurrir son:

La imagen más pequeña acontezca solo en A → el punto A minimiza la función.

La imagen más pequeña acontezca solo en B → el punto B minimiza la función.

La imagen más pequeña acontezca solo en C → el punto C minimiza la función.

La imagen más pequeña coincida en A y B → todos los puntos del segmento AB son mínimos.

La imagen más pequeña coincida en A y C → todos los puntos del segmento AC son solución.

¡Ojo! Si la imagen más pequeña ocurre en B y al coger otro punto del lado que va desde B hacia la derecha, ese punto genera la misma imagen que B, entonces todos los puntos del lado infinito a la derecha de B son solución del problema de minimización.

¡Ojo! Si La imagen más pequeña ocurre en C y al coger otro punto del lado que va desde C hacia la derecha, ese punto genera la misma imagen que C, entonces todos los puntos del lado infinito a la derecha de C minimizan la función.

¡Ojo! Si la imagen más pequeña entre los vértices ocurre en B y al coger otro punto del lado que va desde B hacia la derecha, ese punto genera una imagen aún más pequeña que la imagen de la función B, no hay solución al problema de minimización.

¡Ojo! Si la imagen más pequeña entre los vértices ocurre en C y al coger otro punto del lado que va desde C hacia la derecha, ese punto genera una imagen aún más pequeña que la imagen de la función C, no hay solución al problema de minimización.

En Selectividad Matemáticas CCSS la inmensa mayoría de ejercicios sobre programación lineal son sobre regiones factibles acotadas. Esto simplifica mucho los cálculos, ya que basta con obtener la imagen de la función en cada uno de los vértices para decidir si hay máximo o mínimo.

EJEMPLO RESUELTO SOBRE PROBLEMA DE CONTEXTO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Para resolver ejercicios de enunciado sobre programación lineal:

1. Detectar del enunciado las variables y formar la función objetivo. Son muy típicas las funciones objetivos de ganancia máxima o de coste mínimo.
2. Escribir las restricciones que marca el enunciado en forma de inecuación, formando así un sistema de inecuaciones lineales.
3. Obtener la región factible del sistema. Es decir, resolver gráficamente el sistema de inecuaciones, calculando las coordenadas de los vértices que forman la región factible e indicando claramente si los lados de la región factible pertenecen o no a la solución final.
4. Evaluar la función en las coordenadas de los vértices y decidir si aparecen máximos o mínimos, comparando las imágenes obtenidas y nombrando el Teorema fundamental de la programación lineal. Recuerda que, si el punto óptimo aparece

en dos vértices, todos los puntos del segmento que une esos vértices son puntos óptimos.

Sea la función objetivo a maximizar: $f(x, y) = 5x + 4y$

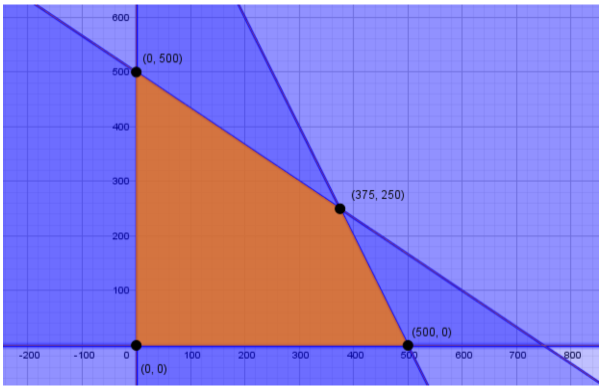
Y sean las restricciones marcadas por el sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 1000 \\ 2x + 3y \leq 1500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Obtener la región factible y obtener valores que optimizan a la función objetivo.

Tenemos cuatro inecuaciones. Obtenemos gráficamente la región factible, indicando claramente los vértices y si los lados pertenecen o no a la solución general.

Cada inecuación posee una recta asociada. Ya sabemos dibujar rectas: con dos puntos es suficiente. Y hemos estudiado cómo resolver gráficamente cada una de las inecuaciones lineales.



Los vértices de la región factible se obtienen planteando sistemas 2x2 con las dos rectas que forman el vértice.

Los lados de la región factible se dibujan continuos si pertenecen a la solución, y eso ocurre cuando aparece el signo igual en la desigualdad.

La región factible de la imagen de la derecha es acotada. Forma un conjunto conexo. Además, los cuatro lados pertenecen a la solución.

Por el Teorema fundamental de la programación lineal podemos afirmar que, al tener una región factible acotada, el máximo y el mínimo aparecen en vértices de la región factible.

Evaluamos la función objetivo $f(x, y) = 5x + 4y$ en los cuatro vértices.

$$f(0,0) = 0 + 0 = 0$$

$$f(0,500) = 0 + 4 \cdot 500 = 2.000$$

$$f(375,250) = 5 \cdot 375 + 4 \cdot 250 = 2.875$$

$$f(500,0) = 5 \cdot 500 + 0 = 2.500$$

Conclusiones:

- El punto (375, 250) maximiza la función objetivo con una imagen igual a 2.875.
- El punto (0,0) minimiza la función objetivo con una imagen igual a 0.