DERIVADAS.

Índice

1. Tasa de variación media.

La **tasa de variación media** de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, a+h]$ o $[a, b]$ se designa por $TVM(a, h)$ o $TVM(a, b)$ y viene dada por

$$TVM(a,h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=TVM(a,b)$$

El cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, se representa también como $\frac{\Delta f(a)}{\Delta a}$. Además, hay que observar este cociente que dependiendo del valor de $\Delta f(a)$, puede ser positiva, negativa o nula.

 # Ejemplo.- Las $TVM(2,4)$ *,* $TVM(4,6)$ *y* $TVM(2,8)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *serán*

$$TVM(2,4)=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{4^2-2^2}{2}=6$$

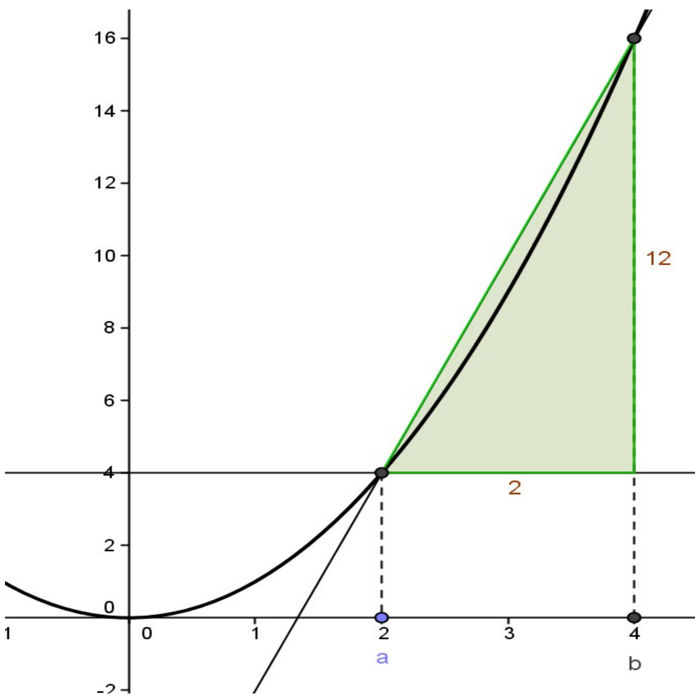
$$TVM(4,6)=\frac{f(6)-f(4)}{6-4}=\frac{6^2-4^2}{2}=10$$

$$TVM(8,2)=\frac{f(8)-f(2)}{8-2}=\frac{8^2-2^2}{6}=10$$

2. Interpretación geométrica

La tasa de variación media de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

 # Ejemplo.- La $TVM(2,4)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *, representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos* $(2,4)$ *y* $(4,16)$.



3. Tasa de variación instantánea. Derivada de una función en un punto

La **tasa de variación instantánea** de la función $f(x)$ en el punto a (*se designa por* $TVI(a)$) o derivada de f en un punto a (*se designa por f'(a)*), cuando existe es

$$TVI(a)=\lim_{h\to 0} TVM(a,h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

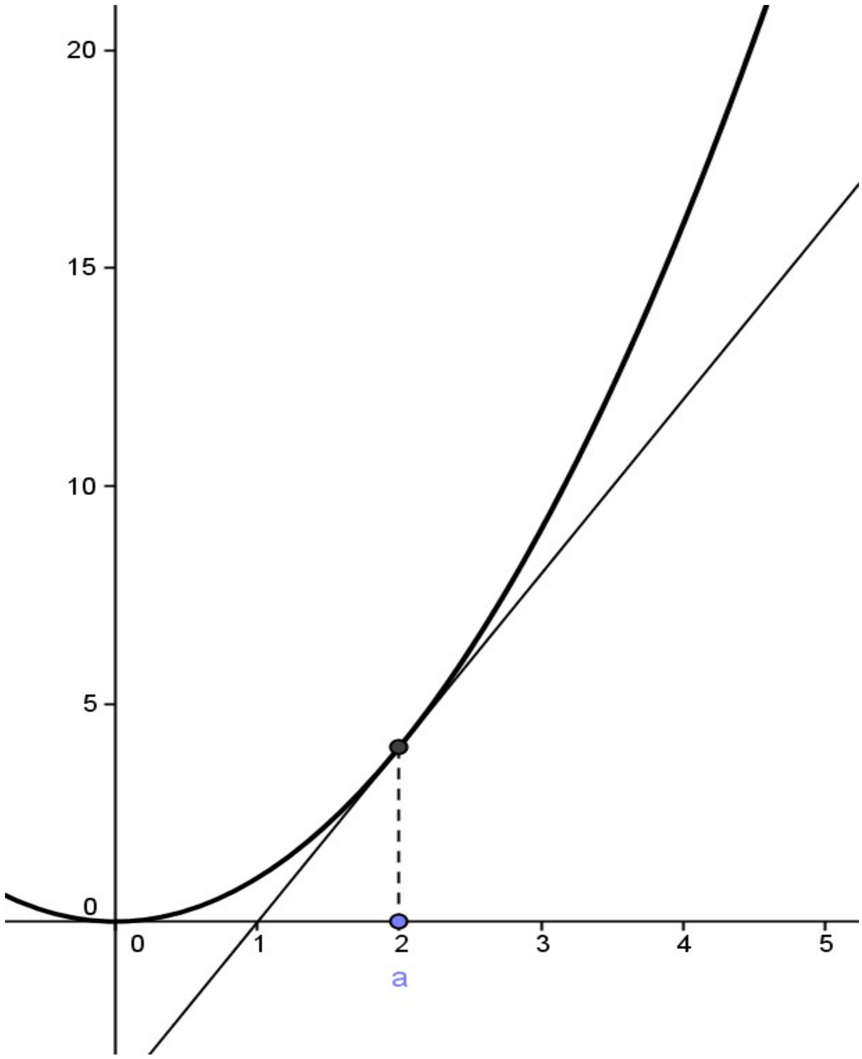
 # Ejemplo.- Las $TVI(2)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *será*

$$TVI(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2^2+2h+h^2-2^2}{h}=\lim_{h\to 0} 2+h=2$$

4. Interpretación geométrica

La tasa de variación instantánea de $f(x)$ en el punto a, o $f'(a)$ representa la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$

 # Ejemplo.- La $TVI(2)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *, representa la pendiente de la recta tangente a* $f(x)=x^2$ *que pasa por el punto (2,f(2)).*



5. Reglas de derivación.

Algunas reglas de derivación son

1.- Si $f(x)$ es un función derivable y a es una constante, se cumple

$$(a.f(x))'=a.f'(x)$$

2.- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables, se cumple

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$$

3.- Si $f(g(x))$ es una función compuesta, donde $Ima(g(x))\subset Dom(f(x))$, entonces

(f(g(x)) ' = f ' (g(x)) . g '(x)

4.- Si $f(x)$ tiene función inversa $f^{-1}(x)$, entonces

$$(f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(y)} \quad \text{con} \quad f^{-1}(x)=y$$

5.- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables, se cumple

$$(f(x).g(x))'=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$$

6.- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables y $g(x)\neq 0$, se cumple

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g(x)^2}$$

 # Ejemplos.-

1.- $(3.x^2)'=3.(x^2)'=3.2.x=6.x$

2.- $(x^3-\ln x)'=(x3)'-(\ln x)'=3.x^2-\dfrac{1}{x}$

3.- $(\sqrt{(\ln x)})'=(\sqrt{(\ln x)})'.(\ln x)'=\dfrac{1}{2.\sqrt{\ln x}}.\dfrac{1}{x}$

4.- $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{(y^2)'}=\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

5.- $(x^{2.}Sen\,x)'=(x^2)'.xen\,x+x^2.(sen\,x)'=2.x.sen\,x-x^2.\cos x$

6.- $(\dfrac{x^2}{Sen\,x})'=\dfrac{(x^2)'.xen\,x-x^2.(sen\,x)'}{sen^2 x}=\dfrac{2.x.sen\,x+x^2.\cos x}{sen^2 x}$

6. Derivadas de funciones.

Derivadas de funciones polinómicas

- Función constante $f(x)=k$, con $k \in \mathbb{R}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=0$$

- Función identidad $f(x)=x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=1$$

- Función potencial $f(x)=x^n$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.x^{n-i}.h^i-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}.x^{n-i}.h^{i-1}=n.x^{n-1}$$

- Función polinómica $f(x)=a_n.x^n+a_{n-1}.x^{n-1}+...+a_1x+a_0$

$$f'(x)=(a_n.x^n)'+(a_{n-1}.x^{n-1})'+...+(a_1.x)'+(a_0)'=$$
$$=a_n,n.x^{n-1}+a_{n-1}.(n-1)x^{n-2}+...+a_1$$

 # Ejemplos.-

Si $f(x)=3x^2+4x-5$ *, entonces* $f'(x)=3.2.x+4.1-0=6x+4$

Si $f(x)=6x^4-3x^3+2x$ *, entonces* $f'(x)=6.4.x^3-3.3.x^2+2.1=24x^3-9x^2+2$

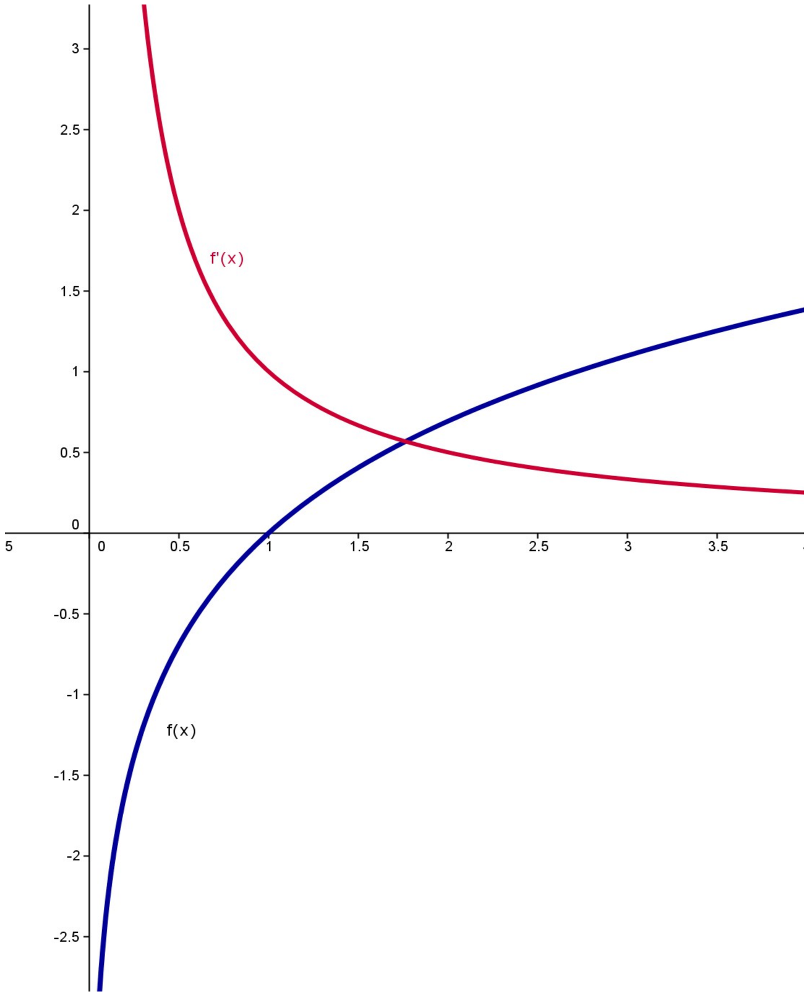
Función logaritmo

- La **derivada** de la función $f(x)=\ln x$ en $(0,+\infty)$ es $f'(x)=\frac{1}{x}$, ya que

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln e=\frac{1}{x}$$

y cuyas gráficas son



- Teniendo en cuenta que $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, se cumplirá

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}.\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln e}{\ln a}.\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a e.\left(\frac{1}{x}\right)$$

<u>Función exponencial</u>

- La **derivada** de la función $f(x) = e^x$ es $f'(x) = e^x$, ya que

$$\left.\begin{array}{l}(\ln e^x)' = \dfrac{(e^x)'}{(e^x)} \\ (\ln e^x)' = (x.\ln e)' = x' = 1\end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad (e^x)' = e^x$$

- Teniendo en cuenta que $a^x = e^{x.\ln a}$, se cumplirá

$$(a^x)' = (e^{x.\ln a})' = (e^{x.ln a})'.(x.ln a)' = (\ln a).a^x$$

 # Ejemplos.-

$$y = \log_3 x \Rightarrow y' = \log_3 e.\frac{1}{x}$$

$$y = 3^x \Rightarrow y' = 3^x.\ln 3$$

- *También podemos* ***derivar*** *de la función potencia* $f(x)=x^a$ *utilizando exponenciales y logaritmos, ya que*

$$(x^a)'=(e^{a.\ln x})'=(e^{a.ln x})'.(a.ln\,x)'=x^a.\frac{a}{x}=a.x^{a-1}$$

Función potencial exponencial

- La **derivada** de la función $h(x)=(f(x))^{g(x)}$ es

$h'(x)=f(x)^{g(x)}.g'(x).\ln f(x)+f(x)^{g(x)-1}.g(x).f'(x)$, ya que

$$h'(x)=(f(x)^{g(x)})'=(e^{g(x).\ln f(x)})'=(e^{g(x).\ln f(x)}).\left(g'(x).\ln f(x)+g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}\right)=$$
$$=f(x)^{g(x)}.\left(g'(x).\ln f(x)+g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}\right)=$$
$$=f(x)^{g(x)}.g'(x).\ln f(x)+f(x)^{g(x)-1}.g(x).f'(x)$$

Ejemplos.-

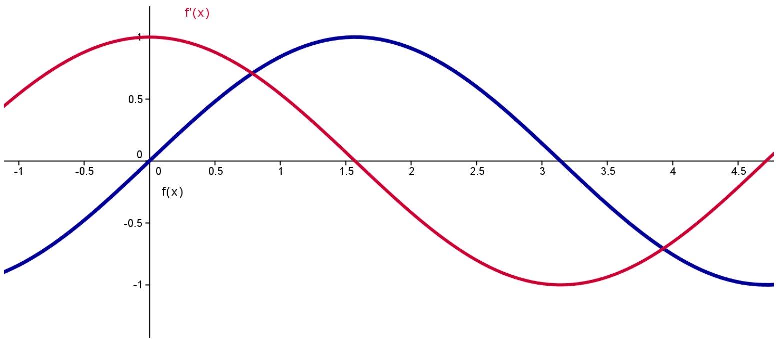
$$((3x+1)^{senx})'=(3x+1)^{sen\,x}.\cos x.\ln(3x+1)+3.(3x+1)^{senx-1}.sen\,x$$
$$(x^{(5x+4)})=5.x^{(5x+4)}.\ln x+x^{(5x+3)}.(5x+4)$$

Función seno

- La **derivada** de la función $f(x)=sen\,x$ en $\mathbb{R}$ es $f'(x)=\cos x$, ya que

$$(sen\,x)'=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{senx.\cos h+\cos x.sen\,h-sen\,x}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{senx.(\cos h-1)+\cos x.sen\,h}{h}=\lim_{h\to 0}\left[sen\,x.\frac{(\cos h-1)}{h}+\cos x.\frac{sen\,h}{h}\right]=$$
$$=\cos x$$

Y cuyas gráficas son



Función coseno

- La **derivada** de la función $f(x)=\cos x$ en $\mathbb{R}$ es $f'(x)=-sen\,x$, ya que

$$(\cos x)'=\left(sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-sen\,x$$

Función tangente

- La **derivada** de la función $f(x)=tg\,x$ en $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ es , $f'(x)=1+tg^2 x$ ya que

$$\left(\frac{sen\,x}{\cos x}\right)'=\left(\frac{\cos x.\cos x+sen\,x\,sen\,x}{\cos^2 x}\right)=\frac{1}{\cos^2 x}=sec^2 x=1+tg^2 x$$

 # Ejemplo.-

$$\left((\cos x+\ln x^2-x^3).e^x\right)'=\left(\cos x+\ln x^2-x^3\right)'.e^x+\left(\cos x+\ln x^2-x^3\right).(e^x)'=$$
$$=\left(-sen\,x+\left(\frac{1}{x^2}\right).2x-3.x^2\right).e^x+\left(\cos x+\ln x^2-x^3\right).e^x=$$
$$=e^x.\left(-sen\,x+\frac{2}{x}-3.x^2+\cos x+\ln x^2-x^3\right)=$$

Derivadas de funciones compuestas

Tipo potencial

- $g(x)=(f(x))^n \Rightarrow g'(x)=n.(f(x))^{n-1}.f'(x)$

 # Ejemplo.-

$g(x)=(x+sen\,x)^4 \Rightarrow g'(x)=4.(x+sen\,x)^3.(1+\cos x)$

Tipo logarítmico

- $g(x)=\ln(f(x)) \Rightarrow g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$
- $g(x)=\log_a(f(x)) \Rightarrow g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}.\log_a e$

 # Ejemplo.-

$$g(x)=\ln(x^3-2.x) \Rightarrow g'(x)=\frac{3.x^2-2}{x^3-2.x}$$

$$g(x)=\log_5(x^3-2.x) \Rightarrow g'(x)=\frac{3.x^2-2}{x^3-2.x}.\log_5 e$$

Tipo trigonométrico

- $g(x)=sen\,f(x) \Rightarrow g'(x)=(\cos f(x)).f'(x)$
- $g(x)=\cos f(x) \Rightarrow g'(x)=(-sen\,f(x)).f'(x)$

- $g(x)=tg\ f(x) \Rightarrow g'(x)=(sec^2 f(x)).f'(x)=(1+tg^2).f'(x)$
- $g(x)=arcsen\ f(x) \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}.f'(x)$
- $g(x)=\arccos f(x) \Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}.f'(x)$
- $g(x)=arctg\ f(x) \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{1+(f(x))^2}.f'(x)$

\# *Ejemplo.-*

$g(x)=sen\ x^2 \Rightarrow g'(x)=2.\cos(x^2)$

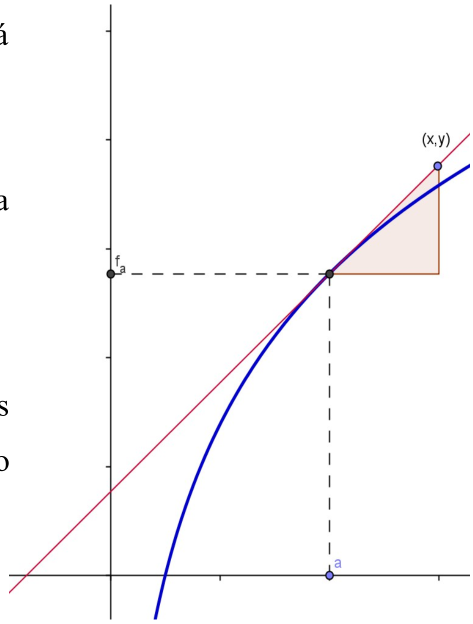
$g(x)=arctg\ x^3 \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{1+(x^3)^2}.3.x^2=\frac{3.x^2}{1+x^6}$

7. Tablas de derivadas

Función y	Función derivada y'
$y=k$	$y'=0$
$y=x$	$y'=1$
$y=(f(x))^n$	$y'=n.(f(x))^{n-1}.f'(x)$
$y=a_n.x^n+a_{n-1}.x^{n-1}+...+a_1.x+a_0$	$y'=n.a_n.x^{n-1}+(n-1).a_{n-1}.x^{n-2}+...+2.a_2.x+a_1$
$y=\ln f(x)$	$y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$
$y=\log_a f(x)$	$y'=\frac{f'(x)}{f(x)}.\log_a e$
$y=e^{f(x)}$	$y'=f'(x).e^{f(x)}$
$y=a^{f(x)}$	$y'=f'(x).a^{f(x)}.\ln a$
$y=f(x)^{g(x)}$	$y'=f(x)^{g(x)}.g'(x).\ln f(x)+f(x)^{g(x)-1}.g(x).f'(x)$
$y=sen\, f(x)$	$y'=(\cos f(x)).f'(x)$
$y=\cos f(x)$	$y'=(-sen\, f(x)).f'(x)$
$y=tg\, f(x)$	$y'=(1+tg^2).f'(x)$
$y=arcsen\, f(x)$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}.f'(x)$
$y=\arccos f(x)$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}.f'(x)$
$y=arctg\, f(x)$	$y'=\frac{1}{1+(f(x))^2}.f'(x)$

8. Recta tangente a una curva

Si $f(x)$ es una derivable en $x=a$, y r es la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. Si m es la pendiente de la recta r, se cumplirá $m=f'(a)$



Además, teniendo en cuenta que el punto $(a, f(a))$ pertenece a la recta r, si (x, y) es un punto cualquiera de la recta se cumplirá:

$$m=\frac{y-f(a)}{x-a}$$

Luego, igualando las dos ecuaciones anteriores, tenemos que la ecuación de la recta r tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ será $f'(a)=\frac{y-f(a)}{x-a}$

 # Ejemplo.- Hallar la ecuación de la tangente a la curva $f(x)=x^4$ *en* $x=2$.

Como $f'(x)=4x^3$ *, la pendiente de la tangente en el punto* $x=2$ *es* $f'(2)=32$ *, y como para* $x=2$ *es* $f(2)=16$ *, la ecuación de la recta tangente a* f *, en el punto* $P(2,16)$ *es:*

$$y-16=32.(x-2)$$