Parte 2: Flujos en una dimensión

Temario: Puntos fijos, estabilidad, linealización, existencia y unicidad de soluciones. Actividades de ejercitación.

Material: Libro de Strogatz. Capítulo 2.

En esta parte estudiaremos desde un punto de vista *cualitativo* las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma

$$\dot{x} = f(x)$$

donde x es una función a valores reales de t, "$x(t)$". El objetivo es (sin resolver en el caso que sea posible analíticamente la ecuación diferencial) dar respuesta a la pregunta:

Para una condición inicial arbitraria $x(t_0)=x_0$

¿Cuál es el comportamiento de $x(t)$ cuando $t\rightarrow\infty$?

Nos referiremos a este estilo de ecuaciones diferenciales con el término de *sistema autónomo*. Con la palabra *sistema*, estaremos indicando su dinámica, y con la palabra *autónomo* indicamos que la ecuación diferencial no depende explícitamente del tiempo t. En el caso que la ecuación sea de la forma $\dot{x} = f(x,t)$ se denomina *no-autónomo*.

Analizaremos la ecuación diferencial, desde la geometría del sistema, interpretando la ecuación diferencial como un *campo vectorial* en una dimensión, donde sus soluciones son curvas (llamadas curvas integrales de f) que son tangentes a este campo vectorial en cada punto de sus trayectorias. Graficaremos el campo en un sistema de coordenadas, en el eje de las abscisas a la variable x, y en el de las ordenadas la variable $f(x)$. Es decir, pensaremos que t, es el tiempo, x la posición de una partícula moviéndose a lo largo de una curva, y $\dot{x}$ es su velocidad.

Pensaremos entonces al sistema con condición inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

como al modelo que representa una partícula moviéndose a lo largo del eje-x, siguiendo una *trayectoria* x(t), que en t_0 verifica la condición x_0.

Entonces el flujo se mueve a la **derecha si f(x)>0**, y hacia a la **izquierda si f(x) < 0** (Figura 1).

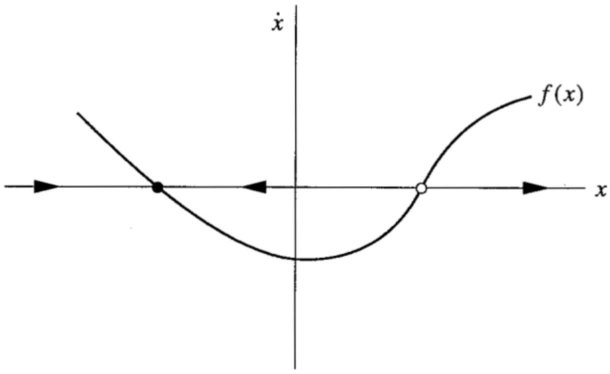

Figura 1

De este modo el flujo es caracterizado por los puntos x^* a los que denominaremos *puntos fijos* o de *equilibrio* son tales que $f(x^*)=0$.

En términos de la ecuación diferencial, los *puntos fijos* representan soluciones de equilibrio.

Los puntos de equilibrio pueden ser *estables* o *inestables*. El punto de equilibrio x* se llama *estable*, cuando para pequeñas variaciones en x(t), esta evoluciona volviendo al valor de equilibrio, caso contrario se llama inestable.

En la Figura 1, hay dos puntos fijos, el negro es estable, y el blanco es inestable.

A partir de la lectura del ejemplo 2.1 del libro Strogatz (página 16) realizar la siguiente actividad.

Actividad

1. Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = ax$ (a parámetro) hallar el o los puntos de equilibrio. Clasificarlos a partir de un gráfico. Luego resolver analíticamente la ecuación con condición inicial $x(0)=x_0$ verificando lo encontrado.
2. Dar un ejemplo de un flujo unidimensional que tenga dos puntos de equilibrio estables y uno inestable.
3. Elegir algún otro problema que sea una aplicación física de su interés que pueda ser modelizado por una ecuación del estilo $\dot{x} = f(x)$ y analizarlo.

Actividad para entregar

Dado el modelo de crecimiento poblacional conocido con el nombre de *modelo logístico:*

$$\begin{cases} \dot{N}(t) = r.N(t).(1 - \dfrac{N(t)}{k}) \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}$$

N(t): población en el tiempo *t*,

r y *k* constantes.

a. Realizar un gráfico (N(t) versus su derivada) utilizando algún software que contemple los posibles valores de los parámetros r y k.

b. Del gráfico encontrar lo puntos de equilibrio, clasificándolos en estables o inestables, y según sea la condición inicial $N(0)=N_0$. A partir de ello analizar el comportamiento de N(t) para valores grandes de t.

b. Resolver analíticamente la ecuación diferencial con condición inicial. (Ayuda: la solución puede ser hallada por el método de separación de variables, usando fracciones simples, o haciendo el cambio de variables $x=1/N$, derivando y resolviendo la ecuación en variable x obteniéndose de este modo una ecuación diferencial lineal). Comparar el análisis previo obtenido en el inciso a y b con la solución analítica hallada.