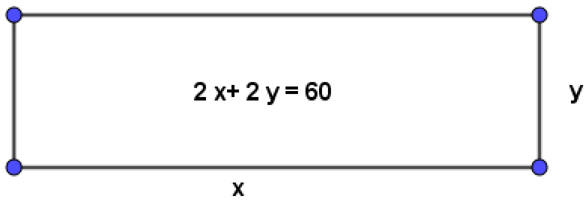
1. Con un hilo de 60 cm de longitud, forma un rectángulo que al girar alrededor de uno de sus lados, engendre un cilindro de área lateral máxima. Obtener dimensiones del rectángulo y el valor del área lateral máxima.



Si hacemos girar el rectángulo de la figura alrededor del lado vertical y obtendremos un cilindro de altura radio de la base x, altura y.

El área de la cara lateral del cilindro será el perímetro de la base por la altura del cilindro.

Es decir:

$$A_L=2\pi x y$$

Del enunciado sabemos que los cuatro lados del rectángulo deben sumar 60 cm → $2x+2y=60 \ \rightarrow \ y=30-x$

Llevamos esta relación a la fórmula del área lateral.

$A_L=2\pi x(30-x)=2\pi(30x-x^2)$ → Esta es la función a optimizar.

Aplicamos la condición necesaria de extremo relativo: $A'_L=0$

$A'_L=2\pi(30-2x) \ \rightarrow \ 30-2x=0 \ \rightarrow \ x=15$ → Punto crítico

Comprobamos si es extremo relativo con la condición suficiente de la segunda derivada.

$A''_L=2\pi(-2)=-4\pi<0$ → La segunda derivada siempre es negativa → El punto crítico es un máximo relativo.

Obtenemos la segunda dimensión del rectángulo:

$$y=30-x \ \rightarrow \ y=15$$

Y terminamos obteniendo el área máxima, que no es más que la imagen del extremo relativo $x=15$ en la función que hemos optimizado:

$$A_L=2\pi(30x-x^2) \ \rightarrow \ A_L(15)=2\pi(30\cdot 15-15^2)=450\pi\, cm^2$$

2. Obtener a y b para que $f(x)$ sea derivable para cualquier valor de x.

$$f(x)=\begin{cases} a+b\cdot x-x^2 & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Estudiamos continuidad en intervalos abiertos.

En $(-\infty,1)$ la función es continua por ser polinómica.

En $(1,+\infty)$ la función es continua por ser cociente de polinomios cuyo denominador solo se anula en $x=0$.

Estudiamos continuidad en punto frontera.

$$\exists f(1)=a+b-1$$

$$L^-=\lim_{x\to 1^-}(a+bx-x^2)=a+b-1 \quad , \quad L^+=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x}\right)=1 \ \rightarrow \ L^-=L^+=L \ \rightarrow \ a+b-1=1 \ \rightarrow \ a+b=2$$

Derivamos la función para estudiar derivabilidad en intervalos abiertos.

$$f'(x)=\begin{cases} b-2x & si \quad x<1 \\ \dfrac{-1}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$

En $(-\infty, 1)$ la función derivada es continua por ser polinómica. Por lo tanto, $f(x)$ es derivable.

En $(1,+\infty)$ la función derivada es continua por ser cociente de polinomios cuyo denominador solo se anula en $x=0$. Por lo tanto, $f(x)$ es derivable.

Estudiamos derivabilidad en punto frontera, igualando las derivadas laterales.

$$f'(1^-)=b-2 \quad , \quad f'(1^+)=-1 \quad \rightarrow \quad f'(1^-)=f'(1^+) \quad \rightarrow \quad b-2=-1 \quad \rightarrow \quad b=1$$

Llevamos este valor a la condición obtenida de la continuidad → $a+1=2$ → $a=1$ → Con estos valores la función es derivable en todo su dominio.

3. Dadas las funciones $f(x)=x^2-ax-4$ y $g(x)=\frac{x^2}{2}+b$, halla los valores de a y b de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tengan la misma recta tangente en el punto $x=3$. Halla la ecuación de la recta.

Si dos funciones comparten la misma recta tangente en $x=3$, significa que la derivada de las funciones evaluadas en $x=3$ coinciden → $f'(3)=g'(3)$ → Recordamos que la derivada evaluada en punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$$f'(x)=2x-a \quad , \quad g'(x)=x \quad \rightarrow \quad f'(3)=g'(3) \quad \rightarrow \quad 6-a=3 \quad \rightarrow \quad a=3$$

También hemos obtenido que la pendiente es $m=f'(3)=g'(3)=3$

Además, las dos funciones deben cortarse en el punto $x=3$, ya que comparten la misma recta tangente en ese punto → $f(3)=g(3)$ → $9-a\cdot 3-4=\frac{9}{2}+b$ → Como $a=3$ → $b=\frac{-17}{2}$

Solo falta obtener la recta tangente. Tenemos el punto $x=3$ y la pendiente $m=3$. Solo nos falta la imagen del punto para poder aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta. La imagen del punto lo podemos sacar de cualquier función, ya que en $x=3$ coinciden la recta tangente y las dos funciones.

$$f(3)=9-9-4=-4$$

Y la recta será → $m=\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}$ → $3=\frac{y+4}{x-3}$ → $y=3x-13$