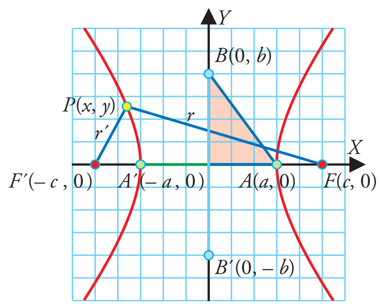
DEMOSTRACIÓN

Deducción de la ecuación reducida de la hipérbola

Una **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a $2a$. Cuando los focos están en el eje X, la **ecuación reducida** es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Procedimiento	Demostración
a) La incógnita es un punto variable del plano.	$P(x, y)$
b) Se hace un dibujo lo más fielmente posible con los datos que se tienen del lugar geométrico. Se representa un punto $P(x, y)$ que verifique la propiedad.	
c) Se expresa mediante una igualdad la propiedad que tienen que verificar los puntos del lugar geométrico.	$\lvert d(F, P) - d(F', P) \rvert = 2a \Rightarrow \begin{cases} d(F, P) - d(F', P) = 2a \\ d(F', P) - d(F, P) = 2a \end{cases}$
d) Se expresan mediante fórmulas los dos miembros de la igualdad.	$d(F, P) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad d(F', P) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
e) Si se verifica que $d(F, P) - d(F', P) = 2a$, se sustituyen los valores en la igualdad.	$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$
f) Se opera y simplifica hasta obtener una ecuación lo más reducida posible.	
• Se pasa un radical al segundo miembro.	$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
• Se elevan al cuadrado ambos miembros.	$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$
• Se desarrollan las potencias.	$\cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$
• Se deja solo el radical en un miembro.	$-4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
• Se simplifica dividiendo entre -4	$cx + a^2 = -a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
• Se elevan otra vez al cuadrado ambos miembros.	$(cx + a^2)^2 = \left(-a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$
• Se desarrollan las potencias.	$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$
• Se aplica la propiedad distributiva.	$c^2x^2 + \cancel{2a^2cx} + a^4 = a^2x^2 + \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2$
• Se agrupan los términos.	$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$
• Se aplica que $c^2 - a^2 = b^2$	$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
• Se divide toda la ecuación entre a^2b^2	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
g) Si se verifica que $d(F', P) - d(F, P) = 2a$, se llega al mismo resultado.	