Problemas – Tema 6

Problemas resueltos - 8 - operaciones elementales al operar con matrices

1. Si $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}$ **, calcula el valor del número real** a **para que se cumpla** $A^2=I$

$$A^2=I \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Operamos e igualamos a cada término m_{ij} de la matriz identidad:

$$m_{11} \rightarrow 1=1$$

$$m_{12} \rightarrow 1+a=0 \rightarrow a=-1$$

$$m_{13} \rightarrow 1+a=0 \rightarrow a=-1$$

$$m_{21} \rightarrow 0=0$$

$$m_{22} \rightarrow a^2=1 \rightarrow a=\pm 1$$

$$m_{23} \rightarrow 0=0$$

$$m_{31} \rightarrow 0=0$$

$$m_{32} \rightarrow 0=0$$

$$m_{33} \rightarrow a^2=1 \rightarrow a=\pm 1$$

Por lo tanto, la condición que cumple todas las igualdades es $a=-1$.

2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **. ¿Para qué valores de** m **se verifica** $A^2=2A+B$ **? .**

$$A^2=2A+B \rightarrow \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operamos.

$$\begin{pmatrix} (1+m)^2+1 & 1+m+1-m \\ 1+m+1-m & 1+(1-m)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+2m & 2 \\ 2 & 2-2m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m^2+2+2m & 2 \\ 2 & m^2+2-2m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+2m & 1 \\ 3 & 2-2m \end{pmatrix}$$

Igualamos término a término en ambas matrices, encontramos las siguientes incongruencias o absurdos matemáticos.

$$2=1 \quad , \quad 2=3$$

Por lo tanto, no existe ningún valor real m que satisfaga la ecuación matricial.

3. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **,** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ **, considera el sistema de ecuaciones lineales dado por** $X^t A=B^t$ **. Discútelo según los distintos valores de** m **.**

En primer lugar, aplicamos traspuesta:

$$X^t=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \ , \ B^t=\begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

¡Ojito! No mezcles el orden al multiplicar matrices. Y el resultado del producto de matrices del término de la izquierda es una matriz de 1 fila y 3 columnas.

$$\begin{pmatrix} (2-m)x+y+mz & x+my+z & (2m-1)x+y+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales si sus coeficiente son iguales. Por lo tanto, igualamos coeficientes y llegamos al sistema:

$$\begin{Bmatrix} (2-m)x+y+mz=2m^2-1 \\ x+my+z=m \\ (2m-1)x+y+z=1 \end{Bmatrix}$$

Vamos a resolver por Gauss, por lo que planteamos notación matricial del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-m & 1 & m & 2m^2-1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 2m-1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Intercambiamos la posición de las columnas 1 y 3: $C_1 \Leftrightarrow C_3 \ \rightarrow \ \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 2-m & 2m^2-1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & 2m-1 & 1 \end{array}\right)$

$F'_2 = mF_2 - F_1$ (ojo: $m=0$ inhabilita Gauss)

$F'_3 = F_3 - F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 2-m & 2m^2-1 \\ 0 & m^2-1 & 2m-2 & 1-m^2 \\ 0 & 1-m & 2m-2 & 1-m \end{array}\right)$$

Intercambiamos la columna 2 y ala columna 3: $C_2 \Leftrightarrow C_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2-m & 1 & 2m^2-1 \\ 0 & 2m-2 & m^2-1 & 1-m^2 \\ 0 & 2m-2 & 1-m & 1-m \end{array}\right)$$

$F'_3 = F_3 - F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2-m & 1 & 2m^2-1 \\ 0 & 2m-2 & m^2-1 & 1-m^2 \\ 0 & 0 & -m^2-m+2 & -m+m^2 \end{array}\right)$$

Igualamos a cero los coeficientes de la diagonal principal que dependen del parámetro.

$m=0$ (inhabilita una transformación de Gauss, como ya hemos indicado anteriormente)

$2m-2=0 \rightarrow m=1$

$-m^2-m+2=0 \rightarrow m=1$, $m=-2$

Realizamos discusión de casos.

Si $m=0$ → Sustituimos este valor antes de la transformación no permitida de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \text{Intercambiamos la primera y la tercera fila} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$F'_2 = F_2 - F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow F'_3 = F_3 + F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

Tras aplicar Gauss, comprobar que no hay absurdos matemáticos ni filas proporcionales, el rango coincide con el número de ecuaciones con al menos un coeficiente no nulo. Tenemos Rango 3 y 3 incógnitas. SCD con solución única.

Si $m=1$ → Sustituimos en la matriz final de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ → Queda una única ecuación no nula tras aplicar Gauss, sin absurdos matemáticos

Al tener 3 incógnitas, estamos ante Sistema Compatible Indeterminado con 2 parámetros libres. Infinitas soluciones.

Si $m=-2$ → Sustituimos en la matriz final de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$ → En la tercera fila aparece un absurdo: $0=6$

Sistema Incompatible, sin solución

No olvidar el caso complementario: Si $m=\{-2,0,1\}$

Tras aplicar Gauss, eliminar filas proporcionales y comprobar que no hay absurdos matemáticos, quedan tres ecuaciones no nulas y tres incógnitas. Sistema Compatible Determinado, solución única.

4. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix}1&7\\0&5\end{pmatrix}$ **Efectuar:**

a) $(A+B+C)^t$

b) $(A^t+B^t+C^t)^2$

c) $(A\cdot B)^t$

d) $A^t\cdot B^t$

a) $A+B+C=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&7\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\-1&11\end{pmatrix}$

$(A+B+C)^t=\begin{pmatrix}4&-1\\5&11\end{pmatrix}$

b) $A^t+B^t+C^t=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\7&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\5&11\end{pmatrix}$

$(A^t+B^t+C^t)^2=\begin{pmatrix}4&-1\\5&11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-1\\5&11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-15\\75&116\end{pmatrix}$

c) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&8\end{pmatrix}$

$(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}1&-2\\1&8\end{pmatrix}$

d) $A^t\cdot B^t=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-4&7\end{pmatrix}$

5. Sea $A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ **. Obtener** A^3

$$A^3=A^2\cdot A$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$