Problemas – Tema 4

Problemas resueltos - 7 - sistemas con parámetro parte 1 de 4

1. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{matrix}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $m\in\mathbb{R}$ **.**

b) Resolver el sistema, si es posible, para $m=2$ **.**

a) Planteamos la matriz ampliada del sistema y triangulamos por Gauss. Recuerda que si, al transformar alguna línea, aparece en la ecuación de transformación el parámetro m , debemos **estar atentos al obtener los resultados finales por si algún valor está inhabilitado** (ya que no podemos multiplicar por 0 la línea que estamos transformando).

¿Qué transformaciones podemos aplicar? **Transformaciones lineales**. Es decir: sumar/restar líneas paralelas entre sí y/o multiplicar una línea por un número real no nulo. Si durante el proceso aparece una fila nula, e elimina. Y si aparecen dos filas iguales o proporcionales, también se elimina una de ellas.

Estas transformaciones lineales garantizan que **el sistema resultante es equivalente al sistema de partida**, es decir, tienen las mismas soluciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m-1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \quad F'_2=F_2-F_1 \quad , \quad F'_3=F_3-2\mathrm{F}_1 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 0 & m-2 & 1-m & -1 \\ 0 & m-2 & -2m-1 & -5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad F'_3=F_3-F_2 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 0 & m-2 & 1-m & -1 \\ 0 & 0 & -m-2 & -4 \end{array}\right)$$

Discusión de casos (es vital **mirar las posiciones** a_{33} **,** a_{22} **y** a_{11} **en la matriz triangular. Y si una fila tiene todos los coeficientes nulos, salvo el término independiente, también debemos mirar si en ese término independiente aparece el parámetro**).

¡Fundamental! El rango del sistema, tras aplicar Gauss y siempre que no aparezcan absurdos matemáticos, es el número de ecuaciones no nulas.

Si el rango coincide con el número de incógnitas, tendremos SCD y solución única.

Si el rango es menor que el número de incógnitas, tendremos SCI e infinitas soluciones. El número de parámetros libres coincide con la diferencia del número de incógnitas y el rango.

Y si encontramos un absurdo matemático, tendremos SI sin solución.

Planteamos la discusión de casos.

- Si $-m-2=0$ → $m=-2$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$ → Incongruencia en F_3 → No hay solución → Sistema Incompatible
- Si $m-2=0$ → $m=2$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$ → F_3 es combinación lineal de F_2 , por lo que el sistema equivalente resulta $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$ → Sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas → Infinitas soluciones, ya que el rango del sistema es 2, y al tener 3 incógnitas, tendremos un Sistema Compatible indeterminado con un parámetro libre. Recuerda que **una línea L_i es combinación lineal de otra línea paralela o de otras líneas paralelas si podemos expresar esa línea L_i como suma/resta de las otras líneas y/o proporcional a otra línea**. En este caso, podremos obviar en la resolución la línea que es combinación lineal, ya que no aporta información nueva al sistema de ecuaciones.
- Si $m\neq-2$ y $m\neq2$ → Solución única → Sistema Compatible Determinado, ya que llegamos a **tres ecuaciones no nulas en la sistema triangulado de tres ecuaciones y tres incógnitas, que no son combinación lineal entre sí**. El rango del sistema es tres, lo cual coincide con el número de incógnitas, por lo que la solución será única.

b) Para $m=2$ ya hemos razonado que tenemos infinitas soluciones al ser S.C.I. con un parámetro libre. Para resolver **damos a una de las incógnitas el valor arbitrario del parámetro**, e intentamos escribir las otras incógnitas en función de ese parámetro.

Si resulta que la incógnita a la que hemos igualado al parámetro libre toma un valor real fijo después de operar y resolver en el sistema, significa que no puede ser parámetro libre, por lo que igualaremos otra incógnita al parámetro.

El sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas al que llegamos es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow z=1 \ , \ y=\lambda \rightarrow x=-1-\lambda$$

2. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{c} x-y+m\cdot z=0 \\ m\cdot x+2y+z=0 \\ -x+y+2m\cdot z=0 \end{array}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $m\in\mathbb{R}$ **.**

b) Resolver el sistema, si es posible, para $m=-2$ **.**

a) Planteamos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 0 \\ m & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2\mathrm{m} & 0 \end{array}\right) \rightarrow \quad F'_2=F_2-mF_1 \quad , \quad F'_3=F_3+F_1 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 0 \\ 0 & 2+m & 1-m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mathrm{m} & 0 \end{array}\right)$$

Discusión de casos:

- Si $m=0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Infinitas soluciones → S.C.I.
- Si $m=-2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right)$ → F_3 es combinación lineal de F_2 → obtenemos el sistema equivalente $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$ → Infinitas soluciones → S.C.I.
- Si $m\neq 0$, $m\neq -2$ → Solución única → S.C.D.

b) Para $m=-2$, como ya analizamos → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$ → Infinitas soluciones → S.C.I. → $z=0 \rightarrow y=\lambda \rightarrow x=\lambda$