# Problemas – Tema 9

# Problemas resueltos - 18 - punto simétrico respecto a una recta

**1. Considera el punto** $P(1,-1,0)$ **y la recta** $r:\begin{Bmatrix} x=1+3t \\ y=-2 \\ z=t \end{Bmatrix}$ **.**

**a) Determinar la ecuación del plano que pasa por** $P$ **y contiene a** $r$ **.**

**b) Halla las coordenadas del punto simétrico de** $P$ **respecto de** $r$ **.**

a) La determinación lineal del plano afirma que un plano queda definido de manera única con un punto perteneciente al plano y dos vectores linealmente independientes y paralelos al plano.

El punto nos lo da el enunciado: $P(1,-1,0)$

Si el plano contiene a la recta del enunciado, su vector director será paralelo al plano: $\vec{u}_r=(3,0,1)$

El segundo vector podemos formarlo con el vector $\vec{AP}$ , donde $A\in r$ . Mirando la ecuación paramétrica de la recta, ese punto puede ser: $A(1,-2,0)$ $\rightarrow$ $\vec{AP}=(0,1,0)$ .

Comprobamos que ambos vectores son independientes dividiendo las respectivas componentes entre si y verificando que no son vectores proporcionales → $\frac{3}{0}\neq\frac{0}{1}\neq\frac{1}{0}$

Igualando a cero determinante asociado a la determinación lineal del plano, obtendremos la ecuación general del plano solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & x-1 \\ 1 & 0 & y+1 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix}=0 \rightarrow (x-1)-(3z)=0 \rightarrow \Pi : x-3z-1=0$$

b) Sea $P(1,-1,0)$ y $P'(x,y,z)$ su simétrico respecto la recta $r$ .

Consideramos un punto arbitrario de la recta, cuyas componentes coinciden con las componentes paramétricas de la recta. Es decir: $B(1+3t,-2,t)\in r$ .

Formamos el vector $\vec{BP}=(-3t,1,-t)$ . El punto $B$ será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ siempre que el vector $\vec{BP}$ y el vector director de la recta $\vec{u}_r=(3,0,1)$ sean perpendiculares.

Dos vectores perpendiculares cumplen que su producto escalar es nulo. Por lo tanto:

$$\vec{BP}\cdot\vec{u}_r=0 \rightarrow (-3t,1,-t)\cdot(3,0,1)=0 \rightarrow -9t+0-t=0 \rightarrow t=0$$

De donde concluimos que $B=(1,-2,0)$ . Recordamos que las coordenadas del punto medio de un segmento se obtiene como la semisuma de las coordenadas de los extremos. Es decir:

$$(1,-2,0)=\left(\frac{x+1}{2},\frac{y-1}{2},\frac{z-0}{2}\right)$$

Igualamos componentes → $x=1$ , $y=-3$ , $z=0$ → $P'(1,-3,0)$ es el punto solución.

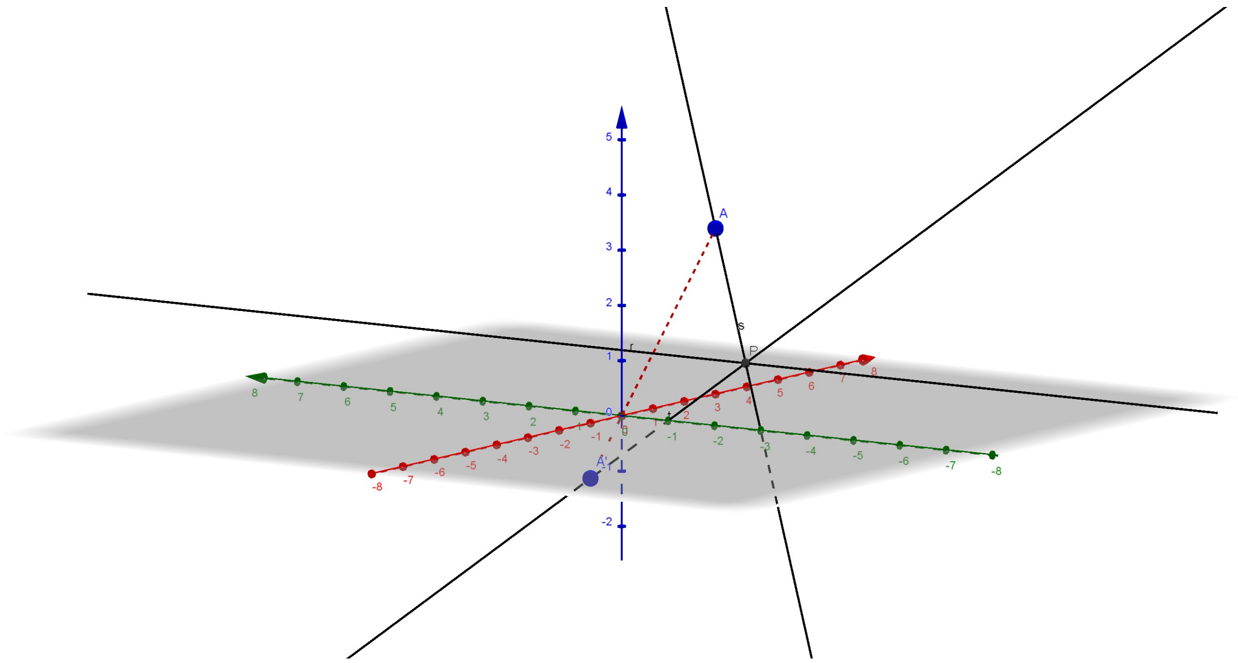
**2. Las rectas** $r:\begin{Bmatrix} x=1 \\ y=a \\ z=1 \end{Bmatrix}$ **y** $s:\begin{Bmatrix} x=1+b \\ y=-2+b \\ z=1+b \end{Bmatrix}$ **son secantes en un punto** $P$ **y forman entre sí un ángulo** $\alpha$ **. Encontrar la recta** $t$ **que también pase por** $P$ **y forme con la recta** $r$ **el mismo ángulo que forman** $r$ **y** $s$ **. Escribir la recta** $t$ **en paramétricas, en continua y en general.**

Estos problemas donde aparece el ángulo entre dos rectas, a veces, pueden plantearse de forma más directa usando conceptos de simetría en vez de las fórmulas de ángulos. Si no nos dan el ángulo exacto, la fórmula de ángulo entre dos rectas puede ser difícil de manejar para obtener una solución.

Las tres rectas se cortan en el punto $P$ . Y la recta $r$ será como “un eje de simetría”, donde las rectas $s$ y $t$ se reflejan, formando el mismo ángulo con $r$ . Cogeremos un punto de $A\in s$ distinto de $P$ , obtendremos su simétrico respecto a la recta $r$ , y tendremos así un punto de $A'\in t$ .

Con los puntos $P$ y $A'$ podremos escribir la recta t.

La siguiente imagen en tres dimensiones, de Geogebra, nos muestra la solución de nuestros problema.




Para obtener el punto de corte igualamos las componentes paramétricas de las rectas $r$ y $s$ .

$$\begin{Bmatrix} 1=1+b \\ a=-2+b \\ 1=1+b \end{Bmatrix} \rightarrow b=0, a=-2 \rightarrow P(1,-2,1)$$

Ahora obtenemos un punto $A\in s$ , dando valores al parámetro libre de la recta $s$ .

Por ejemplo $A(3,0,3)\in s$ . Y obtenemos el simétrico de $A$ respecto $r$ .

Para ello cogemos el vector director de $r$ $\rightarrow$ $\vec{u}_r=(0,1,0)$

Tomamos un punto arbitrario de $r$ $\rightarrow$ $B=(1,a,1)$

Creamos el vector $\vec{AB}=(-2,a,-2)$

Y forzamos que este vector $\vec{AB}$ sea perpendicular a $\vec{u}_r$ , anulando el producto escalar de ambos.

$$\vec{AB}\cdot\vec{u}_r=0 \quad\rightarrow\quad 0+a+0=0 \quad\rightarrow\quad a=0$$

Con el valor del parámetro $a=0$ sacamos $B(1,0,1)$ , que será el punto medio del segmento $\overline{AA'}$ . Recordamos que $A(3,0,3)$ y $A'(x,y,z)$ son simétricos respecto a la recta $r$ .

$$1=\frac{3+x}{2} \quad\rightarrow\quad x=-1$$

$$0=\frac{y+0}{2} \quad\rightarrow\quad y=0$$

$$1=\frac{3+z}{2} \quad\rightarrow\quad z=-1$$

Y la recta $t$ pasará por el punto $P(1,-2,1)$ y por $A'(-1,0,-1)$ . Su vector director será $\vec{PA'}=(-2,2,-2)$ . La ecuación paramétrica de la recta es:

$$t:\begin{Bmatrix} x=1-2\lambda \\ y=-2+2\lambda \\ z=1-2\lambda \end{Bmatrix}$$

Despejamos el parámetro libre, igualamos y obtenemos la ecuación continua → $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-2}$

Si en las ecuaciones paramétricas sumamos primera y segunda, y sumamos segunda y tercera, obtenemos la ecuación general → $\begin{Bmatrix} x+y=-1 \\ y+z=-1 \end{Bmatrix}$

**3. Sea el punto** $P(1,0,5)$ **y la recta** $r:\begin{Bmatrix} y+2z=0 \\ x=1 \end{Bmatrix}$ **.**

**a) Determinar la ecuación del plano que pasa por** $P$ **y es perpendicular a** $r$ **.**

**b) Calcula la distancia de** $P$ **a la recta** $r$ **y el punto simétrico de** $P$ **respecto a** $r$ **.**

a) Si el plano es perpendicular a la recta, el vector director de la recta será perpendicular al plano. Y con un vector normal al plano y un punto del plano, podemos obtener directamente la ecuación general del plano.

$r:\begin{Bmatrix} y+2z=0 \\ x=1 \end{Bmatrix}$ → pasamos a paramétricas → $r:\begin{Bmatrix} x=1 \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{u}_r=(0,-2,1)$

$$\Pi: Ax+By+Cz+D=0 \rightarrow \Pi:-2y+z+D=0$$

Si $P(1,0,5)\in\Pi \rightarrow 0+5+D=0 \rightarrow D=-5 \rightarrow \Pi:-2y+z-5=0$

b) Sea $P(1,0,5)$ y sea $Q(1,-2\lambda,\lambda)$ un punto genérico de la recta $r$ , cuyas coordenadas tomamos de la ecuación de la recta en paramétricas.

La distancia del punto $P$ a la recta $r$ será el módulo del vector $\vec{PQ}$ siempre que este vector sea perpendicular al vector director de la recta. Y dos vectores perpendiculares cumplen que su producto escalar es nulo.

$$\vec{PQ}=(0,-2\lambda,\lambda-5) \rightarrow \vec{PQ}\cdot\vec{u}_r=0 \rightarrow 0+4\lambda+\lambda-5=0 \rightarrow \lambda=1 \rightarrow \vec{PQ}=(0,-2,-4)$$

$$d(P,r)=|\vec{PQ}|=\sqrt{0+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}\ u$$

Para $\lambda=1$ se cumple que el punto $Q(1,-2,1)\in r$ es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ , siendo $P'(x,y,z)$ el punto simétrico de $P(1,0,5)$ respecto la recta $r$ . Por lo tanto:

$(1,-2,1)=\left(\frac{x+1}{2},\frac{y}{2},\frac{z+5}{2}\right)$ → Igualo componentes → $x=1, y=-4, z=-3 \rightarrow P'(1,-4,-3)$