Números reales. Ordenación

Ordenación de los números reales.

En los números reales se define la relación de orden como extensión de la definida en los números racionales. La relación de oren **≤ menor o igual que**, entre dos números se define así

$$a \leq b \Leftrightarrow b-a \geq 0 \Leftrightarrow b-a \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

Que además, se demuestra que cumple las siguientes propiedades

$a \leq a$	(*propiedad reflexiva*)
$a \leq a$ y $b \leq a \Leftrightarrow a=b$	(*propiedad reflexiva*)
$a \leq b$ y $b \leq c \Leftrightarrow a \leq c$	(*propiedad transitiva)*
$a<b$ o $b<a$ o $a=b$	(*propiedad de orden total)*

A partir de esta relación, podemos obtener la relación **< menor que**, **≥ mayor o igual que** y **> mayor que**, que viene definidas como

$$a<b \Leftrightarrow a \leq b \text{ y } a \neq b$$

$$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$$

$$a<b \Leftrightarrow b \leq a \text{ y } a \neq b$$

 # Ejemplos:

- *La desigualdad* $\frac{2}{3} \leq \frac{5}{7}$ *es cierta, se cumple, ya que* $\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{1}{21}>0$.
- *La desigualdad* $\sqrt{2} \leq \sqrt[3]{3}$ *es cierta, ya que*

  $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}=1{,}4422\ldots-1{,}4142\ldots>1{,}441-1{,}415=0{,}036 \geq 0$
- *Demostrar la propiedad transitiva de la relación de orden*

Por definición	$a \leq b \Leftrightarrow b-a \in \mathbb{R}^{+}$
Por definición	$b \leq c \Leftrightarrow c-b \in \mathbb{R}^{+}$
Sumando	$b-a+c-b=c-a \in \mathbb{R}^{+}$
Luego	$a \leq b$

Orden y operaciones

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumple

$$a \leq b \Leftrightarrow a \pm c \leq b \pm c$$

$$a \leq b \ y \ c > 0 \Leftrightarrow a\,c \leq b\,c$$

$$a \leq b \ y \ c > 0 \Leftrightarrow a\,c \geq b\,c$$

 # Ejemplo: Resolver la inecuación $\dfrac{3x+1}{2} \leq \dfrac{5x+2}{3}$

Multiplicando por 6: $3(3x+1) \leq 2(5x+2)$

Operando: $9x+3 \leq 10x+4$

Restando 4: $9x-1 \geq 10x$

O también $x \leq -1$

Axiomas de la medida

- Axioma de Arquímedes.

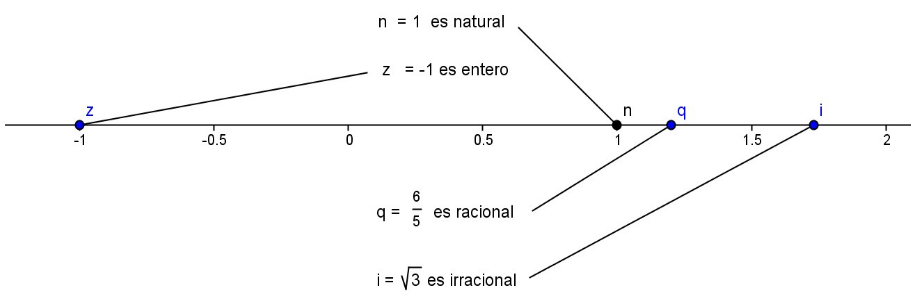
  Si $a > 0$ y $b > 0$ son dos números reales, existe un número natural n tal que $n\,a > b$.

  O también, existe un número natural n tal que $n\,a \leq b < (n+1)\,a$

- Axioma de intervalos encajados.

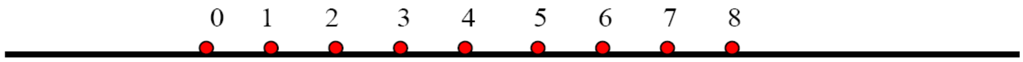
Representación de los números reales.

Los números reales se pueden hacer corresponder con los puntos de una recta. Recuerda, que según has estudiado en cursos anteriores, en la recta real podemos representar: números naturales, racionales o fraccionarios y reales (*la mayoría de irracionales aproximadamente*).

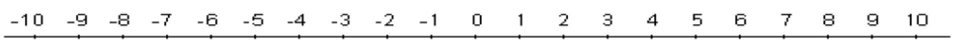


Representación de números reales

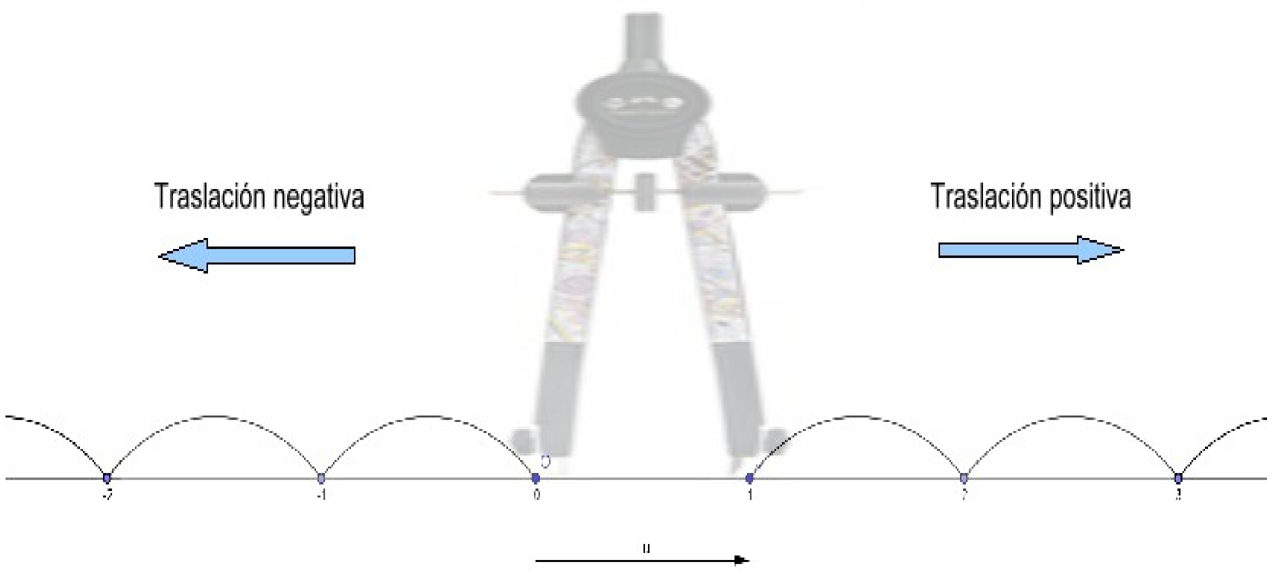
☞ Los **NÚMEROS NATURALES** se pueden representar en una recta, eligiendo un punto arbitrario como el 0, y eligiendo otro punto cualquiera a la derecha del 0 como el 1. Tomando como unidad, la distancia entre el 1 y el 0, tomando una unidad a la derecha del 1, representaremos el número 2, volviendo a tomar una unidad a la derecha del 2, representaremos el número 3, y siguiendo con este proceso, podemos representar todos los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...



☞ Los **NÚMEROS ENTEROS** se pueden representar en una recta, teniendo en cuenta que los números positivos coinciden con los números naturales, y los números negativos -1, -2, -3, -4, -5, -6, ..., se representan utilizando el mismo método que para representar los números naturales, pero tomando las unidades hacia la izquierda del 0.



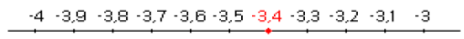
Para representar gráficamente los números enteros sobre la recta real, con regla o compás, basta con que tomemos como unidad un segmento $\vec{u}=\overrightarrow{OU}$ *y lo desplazamos a la derecha o a la izquierda (mediante una regla o compás) tanta veces como indica el valor absoluto del número (a la derecha si es positivo y a la izquierda si es negativo)*



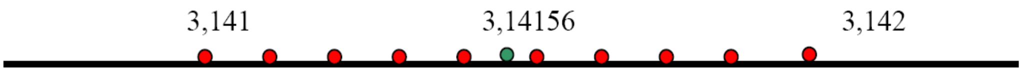
☞ Los **NÚMEROS DECIMALES** con pocas cifras decimales se pueden representar haciendo diez subdivisiones de la unidad, para marcar las décimas, haciendo diez subdivisiones de la décima, para marcar las centésima, y así sucesivamente. Y para representar, un número decimal con muchas cifras decimales se representa aproximadamente entre uno menor y otro mayor aproximados con menor número de cifras decimales.

Ejemplo:

Representación de - 3,4



Representación de 3,14156



☞ Para representar las **FRACCIONES**, primero se halla la FRACCIÓN IRREDUCIBLE $\frac{a}{b}$ equivalente.

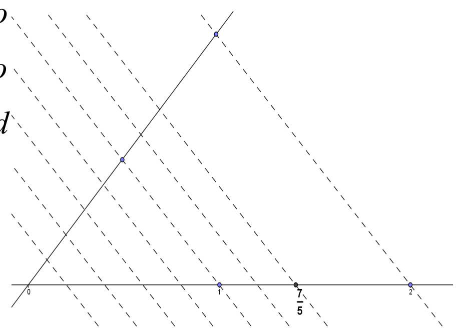
Si el valor absoluto del NUMERADOR *("$|a|$")* es mayor que el valor absoluto del DENOMINADOR *("$|b|$")*, se divide el segmento unitario entre el 0 y 1 si la fracción es positiva, o entre el -1 y 0 si la fracción es negativa, en b partes iguales, y se toman a partes, a partir del 0.

Si el valor absoluto del NUMERADOR *("$|a|$")* es menor que el valor absoluto del DENOMINADOR *("$|b|$")*, se escribe la fracción de la forma:

$$\frac{a}{b} = c + \frac{p}{q}; \quad c \in \mathbb{Z}; \ \frac{p}{q} \text{ es una fracción irreducible tal que } 0 < \frac{a}{b} < 1.$$

Y se divide el segmento unitario entre c y c+1 en b partes iguales, y se toman a partes, a partir de c.

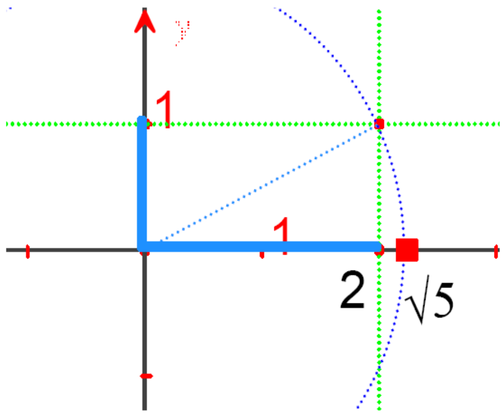
También, podemos utilizar el Teorema de Thales, trazando una recta por O, con puntos igualmente espaciados, uniendo mediante segmentos paralelos, cada $|b|$ *puntos con cada unidad de la recta real, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo*



☞ Los **NÚMEROS IRRACIONALES** de la forma √p siendo p un número natural, se pueden representar utilizando el teorema de PITÁGORAS.

Ejemplo:

Representación √5

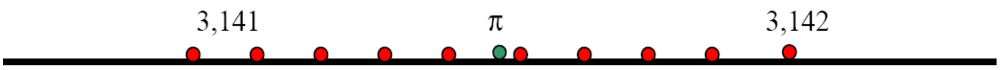


s

☞ Los **NÚMEROS IRRACIONALES** se pueden representar aproximadamente entre el menor y el mayor racionales aproximados del mismo número de cifras decimales.

Ejemplo:

Representación de π (“3,141 < π < 3,142“)



Toda sucesión de intervalos encajados determinan un único número real

Una sucesión de intervalos $\{I_n\}_{n=1,2,3,\ldots}$ *, donde* $I_n=[a_n, b_n]$ *es una sucesión de intervalos encajados, si para cada* $n \in \mathbb{N}$ *,* $I_{n+1}=[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset I_n=[a_n, b_n]$ *.*

 # Ejemplo: Si tomamos a_n *y* b_n *los números reales, tales que*

$$a_n < \sqrt{2} < b_n \qquad y \qquad b_n - a_n < 10^{n-1}$$

Obtenemos, una sucesión de intervalos encajados de $\sqrt{2}$ *. Es decir, dichos intervalos son de la forma*

[1,2], [1,4 ; 1,5], [1,41 ; 1,42], [1,414 ; 1,415], [1,4142 ; 1,4143], . . .

Intervalos, semirrectas y entornos.

Tanto los intervalos (cerrados, abiertos, semicerrados o semiabiertos) como las semirrectas son subconjuntos de la recta real que tiene una interpretación geométrica sencilla, puesto que

- Intervalos cerrado de extremos a y b

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b\}$

- Intervalos abierto de extremos a y b

$(a,b)=(x\in\mathbb{R}: a<x<b)$

- Intervalos semicerrado o semiabierto de extremos a y b

$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x<b\}$ $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a<x\leq b\}$

- Semirrectas

$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x<+\infty\}$ $(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: a<x<+\infty\}$

$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}: -\infty<x<b\}$ $(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}: -\infty<x\leq b\}$

Entorno de un punto a y de radio r, E(a,r).- Es el conjunto de números reales pertenecientes al intervalo abierto (a – r , a + r), con r > 0.

Al conjunto E(a,r) – {a} = (a – r , a + r) - {a}, se le denomina **entorno reducido del punto a y radio r, E*(a,r)**.

Valor absoluto de los números reales.

El valor absoluto de los números reales a se designa por |a| y es:

$$|a| = \begin{Bmatrix} -a & si\, a < 0 \\ a & si\, a \geq 0 \end{Bmatrix}$$

 # Ejemplos.

- *La ecuación* $|x|=0$ *, tiene por solución* $x=0$
- *La ecuación* $|x|=2$ *, tiene por solución* $x=-2$ *y* $x=2$.
- *La inecuación* $|x|<2$ *, tiene por solución* $-2<x<2$ *, es decir el intervalo* $(-2,2)$.
- *La inecuación* $|x|\leq 2$ *, tiene por solución* $-2\leq x\leq 2$ *, es decir el intervalo* $[-2,2]$.
- *La inecuación* $|x|>2$ *, tiene por solución* $x<-2$ *y* $x>2$.
- *La inecuación* $|x|\geq 2$ *, tiene por solución* $x\leq -2$ *y* $x\geq 2$.

Principio de inducción.

Si una propiedad P se cumple un número (*número natural*) infinito de veces, si se verifica para el primer caso y siempre que se verifique para un $i \in \mathbb{N}$, se verifica también para su siguiente s(n), entonces la propiedad P se verifica siempre (*para todo número natural*).

Ejemplo.

- Demostrar que $1+2+3+\ldots.+n=\frac{n.(n+1)}{2}$

Como para $n=1$

$$1=\frac{1.(1+1)}{2}$$

Y si suponemos que se cumple, para $n=i$, para $n=i+1$

$$1+2+3+\ldots.+i+(i+1)=\frac{i.(i+1)}{2}+(i+1)=(i+1).\left(\frac{i}{2}+1\right)=\frac{(i+1).((i+1)+1)}{2}$$

También es cierto, se cumple que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $1+2+3+\ldots.+n=\frac{n.(n+1)}{2}$