Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 3 - ecuaciones de la recta - parte 2 de 2

1. Pasa la recta general $r:\left\{\begin{matrix} x+y-2z=3 \\ x-y+4z=5 \end{matrix}\right\}$ **a recta paramétrica.**

Pasar de recta general a recta paramétrica significa resolver un sistema SCI con un parámetro libre.

La forma de proceder es muy sencilla: a una de las variables la consideramos igual al parámetro λ . Por ejemplo:

$$z=\lambda \quad \rightarrow \quad r:\left\{\begin{matrix} x+y=3+2\lambda \\ x-y=5-4\lambda \end{matrix}\right\}$$

Y resolvemos el sistema obtenido (es decir, obtenemos el valor de x e y en función del parámetro λ).

$$r:\left\{\begin{matrix} x=4-\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$$

2. Pasa la recta paramétrica $r:\left\{\begin{matrix} x=4-\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$ **a recta general.**

Pasar de recta paramétrica a recta general significa eliminar parámetros. Podemos hacerlo por Gauss (considerando los parámetros como incógnitas, tal y como vimos en el Tema de matrices) o bien despejando el valor de los parámetros y sustituyendo en las ecuaciones.

Vamos a resolverlo de dos formas. **Primero por Gauss**, considerando el parámetro como incógnita :

$$r:\left\{\begin{matrix} \lambda=4-x \\ \lambda=\frac{1}{3}+\frac{y}{3} \\ \lambda=z \end{matrix}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 4-x \\ 1 & \frac{1}{3}+\frac{y}{3} \\ 1 & z \end{array}\right) .$$

Hacemos cero por debajo de la diagonal principal.

$$F'_2=F_2-F_1 \quad , \quad F'_3=F_3-F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 4-x \\ 0 & \frac{-11}{3}+x+\frac{y}{3} \\ 0 & x+z-4 \end{array}\right)$$

Si recuerdas, tras obtener la matriz triangular, para que no hubiese absurdos matemáticos teníamos que igualar a cero los términos independientes de las ecuaciones donde todos los coeficientes eran cero. Por lo tanto:

$r:\left\{\begin{matrix} x+\frac{y}{3}-\frac{11}{3}=0 \\ x+z-4=0 \end{matrix}\right\}$ → Esta es la recta en general o implícita.

Vamos a resolverlo ahora de otra forma. **Despejando el valor del parámetro y sustituyendo su valor en el resto de ecuaciones**.

Necesitamos dos ecuaciones donde no aparezca el parámetro λ .

Partimos nuevamente de la paramétrica → $r:\left\{\begin{matrix} x=4-\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$

Podemos hacerlo de varias maneras diferentes (todas dan sistemas equivalentes, es decir, con la misma solución). Si sumamos las dos primeras ecuaciones de la forma paramétrica, nos queda:

$$x+y=3+2\lambda$$

Y como de la tercera ecuación sabemos que $z=\lambda \rightarrow x+y-2z=3$

Si ahora restamos las dos primeras ecuaciones de la forma paramétrica:

$$x-y=5-4\lambda$$

Como $z=\lambda \rightarrow x-y+4z=5$

Por lo tanto llegamos al sistema 2x3 siguiente:

$r:\left\{\begin{matrix} x+y-2z=3 \\ x-y+4z=5 \end{matrix}\right\}$ → Forma general de la recta: dos ecuaciones y tres incógnitas

¿Podría haber sumado, por ejemplo, la primera ecuación más la tercera, y la segunda más la tercera en la forma paramétrica? Sí. Puedo hacerlo. Y habría quedado:

$r:\left\{\begin{matrix} x+z=4 \\ y-3z=-1 \end{matrix}\right\}$ → Forma general de la recta: dos ecuaciones y tres incógnitas

¿Y podría haber sumado, por ejemplo, la primera ecuación más la segunda, y la segunda más la tercera en la forma paramétrica? Sí, puedo hacerlo. Y habría quedado:

$r:\left\{\begin{matrix} x+y-2z=3 \\ y-3z=-1 \end{matrix}\right\}$ → Forma general de la recta: dos ecuaciones y tres incógnitas

Todas las soluciones son perfectamente válidas. Lo fundamental es tener siempre dos ecuaciones con las tres incógnitas x, y, z en su conjunto, y sin parámetros libres. Al haber infinitas soluciones válidas posibles, es clave explicar bien los pasos que se dan al operar (para que el corrector entienda lo que hago).