Números reales. Operaciones

Números racionales. Caracterización.

Recuerda que un número r es racional si se puede poner en forma de fracción de números enteros de la forma $\frac{a}{b}$ (siendo el denominador $b \neq 0$).

Cada número racional puede representarse por un único número decimal (*exacto, con un número finito de decimales o con infinitas cifras decimales periódicas*) o por infinitas fracciones.

 # Ejemplo: $0{,}333333\ldots = \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$.

Convertir una expresión fraccionaria en expresión decimal

si r = $\frac{a}{b}$, para convertir r en decimal, basta con que efectuemos la división decimal a **:** b.

 # Ejemplo: $\frac{2454}{990} = 2{,}478787878\ldots = 2{,}\widehat{478}$

☞ **Todo número racional se escribir en forma decimal periódica**.

De la expresión fraccionaria a la expresión decimal

Cualquier número decimal periódico (*incluyendo números exactos o con un número de decimales limitado*) se puede expresar en forma de fracción $\frac{u}{v}$.

☞ Si D es un número racional escrito en forma decimal, es decir de la forma $D = a\,,b\,p\,p\,p\ldots$; con a, b, p número enteros.

1) Si $p = 0$, decimos que D es un número decimal con un número finito de decimales.

$$\Rightarrow D = \frac{u}{v} = \frac{D.10^m}{10^m}$$, siendo m el número de dígitos de v.

 # Ejemplo: $13{,}152 = \frac{13{,}152.10^3}{10^3} = \frac{13152}{1000}$

2) Si $p \neq 0$ y $b = p$, decimos que D es periódico puro de periodo p.

$$\Rightarrow D = \frac{u}{v} = \frac{D.10^n - D}{10^n - 1} = \frac{D.10^n - D}{99..\overset{n\ldots}{}.9}$$, siendo n el número de dígitos de p.

 # Ejemplo:

$$714{,}236423642364\ldots = \frac{714{,}236423642364\ldots.10^4 - 714{,}236423642364\ldots}{10^4 - 1} = \frac{7141650}{9999}$$

3) Si $p \neq 0$ y $b \neq p$, decimos que D es periódico mixto de periodo p.

$$\Rightarrow D = \frac{u}{v} = \frac{D.10^{m+n} - D.10^{m}}{10^{m+n} - 10^{m}} = \frac{D.10^{m+n} - D.10^{m}}{(99..^{n}.9)\ .\ 10^{m}}$$ siendo m el número de dígitos de b y n el número de dígitos de p.

Ejemplo:

$$21{,}45369369369\ldots = \frac{21{,}45369369369\ldots .10^{2+3} - 21{,}45369369369\ldots .10^{2}}{10^{2+3} - 10^{2}} = \frac{2143224}{99900}$$

Números irracionales. Caracterización.

Los números irracionales (*que representamos por I*) son aquellos que no se pueden expresar en forma de fracción, o de forma equivalente su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

Ejemplo: $a = 0{,}01001000100001\ldots$ *es un número irracional.*

Además, existen números que habitualmente utilizamos en todas las ramas científicas que son irracionales, y que por su importancia tiene un nombre propio, como $\pi = 3{,}41592653589793238462 64\ldots$

Actividades para el aula:

Clasificar los siguientes números decimales en racionales o irracionales

a) 0,111222333111222333 …, b) 0,220200200020000200000 ...

c) 0,112122122212222122222 … d) 0,123321123321123321 …

Solución:

a) Racional b) Irracional. c) Irracional. d) Racional.

Números reales. Aproximación y error

Recuerda que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, donde

$\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales = $\{ 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \}$.

$\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros = $\{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$.

$\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales = $\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$

El conjunto de los números reales es $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$, además se cumple $\mathbb{Q} \cap I = \emptyset$

Aproximación de números irracionales. Errores.

Decimos que un número a es aproximado de A, cuando $A - a \neq 0$.

 # Ejemplo.- 1 es aproximado por defecto de $\sqrt{2}$ *, 1,5 es aproximado por exceso de* $\sqrt{2}$ *y 1,41 es aproximado por defecto de* $\sqrt{2}$ *.*

Si a es un número aproximado de A, denominamos

Error absoluto a $\Delta=|A-a|$

Error relativo a $\delta=\dfrac{\Delta}{A}=\dfrac{|A-a|}{A}$

 # Ejemplo.- Si $A=\dfrac{10}{3}$ *y* $a=3{,}3$ *, tenemos*

$$\Delta=\left|\frac{10}{3}-3{,}3\right|=\left|\frac{10}{3}-\frac{33}{10}\right|=\left|100-\frac{99}{30}\right|=\frac{1}{30} \qquad \delta=\frac{1/30}{10/3}=\frac{3}{300}$$

- Si el número exacto A es racional solemos utilizar fracciones.
- Si el número exacto A es irracional, no se puede utilizar ni fracción, ni forma decimal exacta o periódica, ya que el número irracional tiene infinitas cifras decimales no periódicas. En este caso, solemos utilizar cotas de error.

 # Ejemplo.- Si $A=\pi$ *y* $a=3{,}15$ *, como* $3{,}14<\pi<3{,}15$ *es* $3{,}15-\pi<3{,}15-3{,}14$

$$\Delta=|\pi-3{,}15|=|3{,}15-\pi|<3{,}15-3{,}14=0{,}01=\Delta_a$$

$$\delta=\frac{\Delta}{\pi}<\frac{\Delta_a}{\pi}<\frac{\Delta_a}{3{,}14}=\frac{0{,}01}{3{,}14}=\frac{1}{314}=\delta_a$$

Habitualmente, representamos las cotas de error absoluto y relativo de un número aproximado a, mediante la notación Δ_a y δ_a respectivamente.

Números reales: operaciones

Cuando efectuamos operaciones con números racionales, es conveniente utilizar fracciones, para conseguir un resultado exacto. Sin embargo, cuando operamos con números irracionales es conveniente dejar dicha operación simplificada e indicada, por ejemplo: $\sqrt{8}+\pi=2\sqrt{2}+\pi$,

Sin embargo, cuando necesitamos conocer una aproximación de una operación de números reales, tenemos que tener en cuenta, que al efectuar operaciones con números aproximados, el error que se comete depende de la operación. Para el cálculo de errores en las operaciones con números aproximados, aplicamos diversos métodos para calcular una cota de error.

 # Ejemplo.- si $a=1{,}4142$ *es un número aproximado de* $\sqrt{2}$ *y* $b=3{,}1415$ *de* π *, como* $1{,}4142<\sqrt{2}<14143$ *y* $3{,}1415<\pi<3{,}1416$ *, se cumple*

$$1{,}4142+3{,}1415<\sqrt{2}+\pi<1{,}4143+3{,}1416$$

Y una cota de error de a+ b es $\Delta_{a+b}=|(1{,}4143+3{,}1416)-(1{,}4142+3{,}1415)|$ *, es decir*

$$\Delta=|\sqrt{2}+\pi-(a+b)|<0{,}0002=\Delta_{a+b}$$

Además

$$\delta=\frac{\Delta}{\sqrt{2}}+\pi<\frac{\Delta_{a+b}}{1{,}4143+3{,}1416}=\frac{0{,}0002}{4{,}5559}\approx 0{,}0000438$$

Propiedades de la suma y producto de números reales.

Recuerda que la suma y producto de números reales, cumple las mismas propiedades que los números racionales. Es decir, si a, b y c son tres números cualesquiera, se cumple

Propiedades de suma de números

$a+(b+c)=(a+b)+c$	propiedad asociativa
$a+b=b+a$	propiedad conmutativa
$a+0=a$	existencia de elemento neutro o nulo 0
$a+(-a)=0$	existencia de elemento opuesto de a

Propiedades de suma de números

$a(bc)=(ab)c$	propiedad asociativa
$ab=ba$	propiedad conmutativa
$a1=a$	existencia de elemento neutro o unidad 1
$aa^{-1}=1$	existencia de elemento inverso de a

Propiedades de producto y suma

$a(b+c)=ab+ac$	propiedad distributiva

Números reales: radicales.

Si $r\in\mathbb{R}$ es un número real, se cumple $\sqrt[n]{r}=y \quad\Leftrightarrow\quad y^n=r$.

Además, Si $r\in\mathbb{Q}$ es un número racional tal que no existe ningún racional $y\in\mathbb{Q}$ tal que $r=y^n$, $\sqrt[n]{r}$ es un número irracional.

 # Ejemplo.- Demostrar que $\sqrt{2}$ *es un número irracional.*

La demostración se hace por reducción al absurdo, es decir suponiendo que es cierto lo contrario y llegando a una contradicción.

Si suponemos que $\sqrt{2}$ *es racional, existirá dos números enteros primos a y b tal que* $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ *, elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, se obtiene*

$$2=\frac{a^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad 2.b^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad \textit{2 divide al número a}$$

Luego, se cumple

$$2.b^2=(2.k)^2 \quad \Rightarrow \quad b^2=2.k^2 \quad \Rightarrow \quad \textit{2 divide al número b}$$

Es decir, $m.c.d.(a,b)\neq 1$ *, en contra de lo supuesto (*a y b son primos entre si*), y por tanto llegamos a una contradicción.*

Luego $\sqrt{2}$ *es un número irracional.*

Propiedades de operaciones con radicales.

- ✗ $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a.b}$
- ✗ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- ✗ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$
- ✗ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m.n]{a}$

Además, dados dos números naturales n y m, si p es un número natural cualquiera y q un número que divide a n, se cumple

$$\sqrt[n.p]{a^{m.p}}=\sqrt[n/p]{a^{m/p}}$$

 # Ejemplo.- $\sqrt[3]{7^5}.\dfrac{\sqrt{2^4}}{\sqrt{21^3}}=\sqrt[3]{7^5}.\sqrt{\dfrac{2^4}{21^3}}=\sqrt[6]{7^{10}}.\sqrt[6]{\dfrac{2^{12}}{21^9}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^{12}.7^{10}}{21^9}}=\dfrac{4}{3}.\sqrt[6]{\dfrac{7}{9}}$

Números reales: potencias.

Si r y s, denominamos potencia de base r y exponente s al número r^s .

En el caso particular de que $s\in\mathbb{Q}$, decimos que r^s es una potencia fraccionaria. Además, en para todo m y n números naturales, se cumple $\sqrt[n]{r^m}=r^{\frac{m}{n}}$.

 # Ejemplo.- $\sqrt[3]{7^5}=7^{\frac{5}{3}}$

Si s es un número irracional, utilizamos números aproximados.

Propiedades de potencias.

- ✗ $r^p.a^q=r^{p+q}$ *# Ejemplo.-* $7^{\frac{5}{3}}.7^{\frac{2}{5}}=7^{\frac{31}{15}}$
- ✗ $\dfrac{r^p}{r^q}=r^{p-q}$ *# Ejemplo.-* $7^{\frac{5}{3}}.7^{\frac{2}{5}}=7^{\frac{19}{15}}$

✗ $(r^p)^q = r^{p \cdot q}$ # *Ejemplo.-* $\left(7^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} = 7^2$

✗ $r^p . s^p = (r.s)^p$ # *Ejemplo.-* $7^{\frac{5}{3}} . 3^{\frac{5}{3}} = 21^{\frac{5}{3}}$

✗ $\frac{r^p}{s^p} = \left(\frac{r}{s}\right)^p$ # *Ejemplo.-* $\frac{7^{\frac{5}{3}}}{3^{\frac{5}{3}}} = \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{5}{3}}$

<u>Números reales: logaritmos</u>.

El logaritmo en base a de x es un número y tal que

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Cuando a = 10 lo denominamos logaritmo decimal (*log*) y cuando a = e = 2,71828 lo denominamos logaritmo neperiano (*ln*)

Ejemplo.- $\log_2 \sqrt[3]{4} = \frac{2}{3}$

<u>Propiedades de logaritmos</u>.

✗ $\log_a x . y = \log_a x + \log_a y$

Basta tener en cuenta

$$x . y = a^{\log_a x.y}$$

$$x . y = a^{\log_a x} . a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

Ejemplo.- $\log_3 9 . \sqrt{3} = \log_3 9 + \log_3 \sqrt{3} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

✗ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

Basta tener en cuenta

$$\frac{x}{y} = a^{\log_a \frac{x}{y}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$$

Ejemplo.- $\log_3 \frac{9}{\sqrt{3}} = \log_3 9 - \log_3 \sqrt{3} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

✗ $\log_a x^n = n . \log_a x$

Basta tener en cuenta

$$\log_a x^n = \log_a x . x^{n-1} = \log_a x + \log_a x . x^{n-2} = \log_a x + \log_a x + \log_a x . x^{n-3} = ... = n . \log_a x$$

- *Los logaritmos se pueden obtener en cualquier base a a partir de los logaritmos decimales o neperianos de las calculadoras, ya que de la fórmula del cambio de base de lo logaritmos, para cualquier bases a y b se cumple*

  $$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

  En particular si b =10 o b = e, se cumple

  $$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$