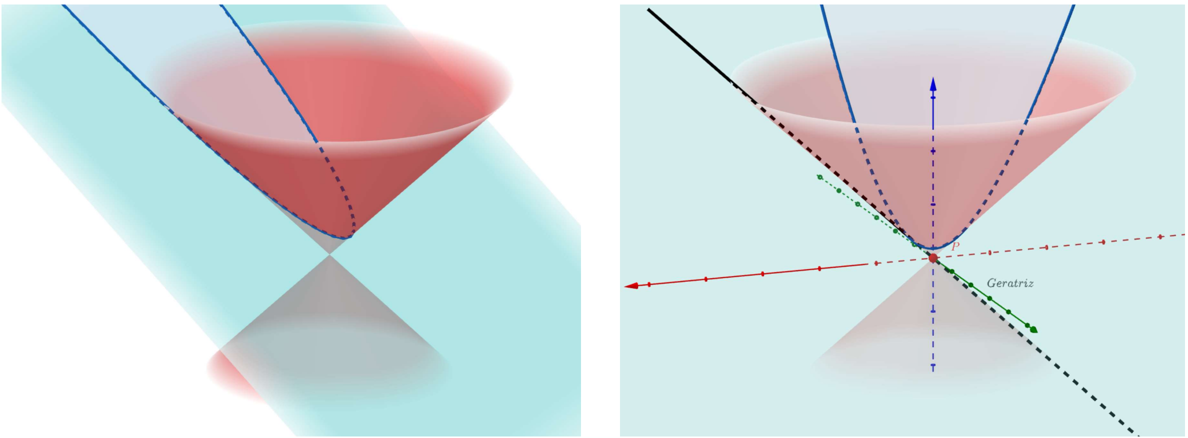
APÊNDICE E – EMBASAMENTO TEÓRICO: PARÁBOLA

Conforme visto anteriormente, a parábola pode ser visualizada como resultado da interseção de um cone duplo com um plano (Figura E.1).

Figura E.1 – Parábola gerada por uma interseção.



(a) (b)

Fonte: Próprio autor.

Todavia, para estudar as propriedades desta curva é mais conveniente explorá-la partindo da sua descrição geométrica. Por isto consideraremos aqui a definição da parábola via Lugar Geométrico. Para tal usaremos o conceito de distância entre ponto e reta. Isto é, dado um ponto $P = (x, y)$ e uma reta $ax + by + c$ do plano, consideraremos a distância entre X e r, denotada por $d(X, r)$ por

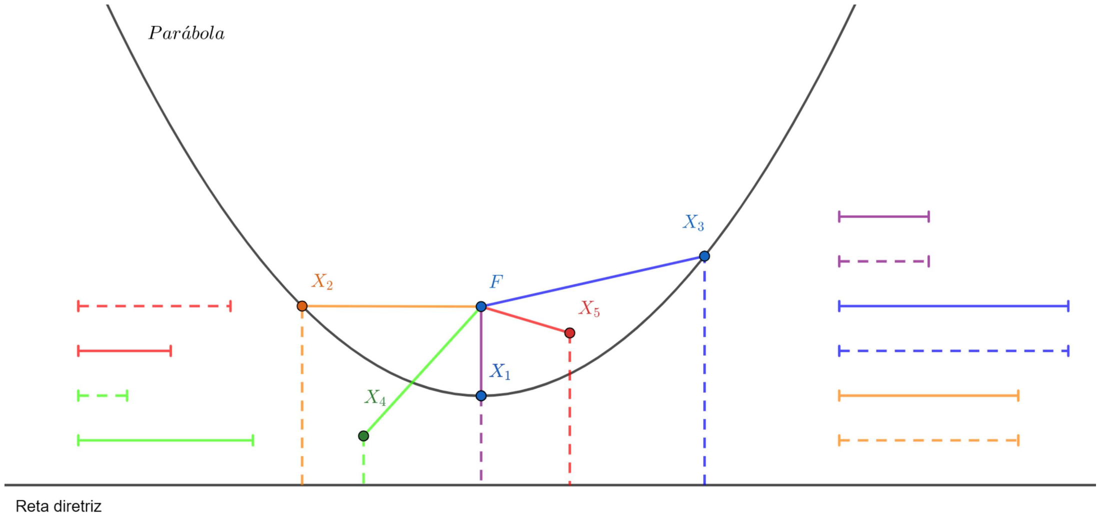
$$d(X, r) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Definição E.1. *Sejam r uma reta e F um ponto do plano não pertencente a r. Chama-se **parábola** o lugar geométrico P dos pontos X de um plano tais que o ponto F equidista da reta diretriz r do plano. Ou seja*

$$d(X, F) = d(X, r).$$

A Figura E.2 ilustra a definição da parábola.

Figura E.2 – Parábola: ilustração da definição

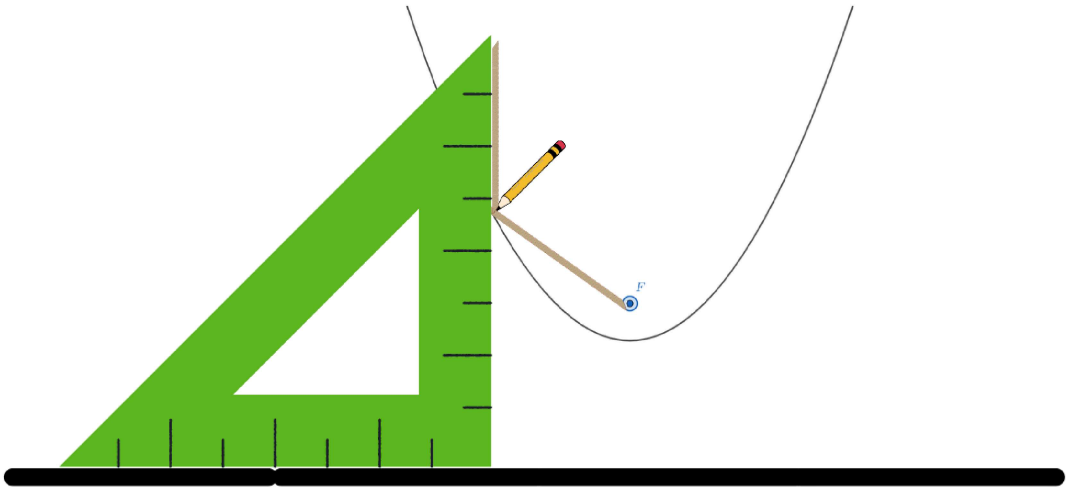


Fonte: Próprio autor.

Note que o ponto X_1 (cor roxa) satisfaz a condição de que $d(X, F) = d(X, r)$. Para visualizar este fato, o lado direito da figura apresenta um segmento horizontal (cor lilás) formado por uma parte de tamanho correspondente ao segmento $\overline{X_1F}$ (linha contínua) seguido por outra parte com tamanho igual (linha tracejada). Logo é possível visualizar que ambos medem o mesmo comprimento. O mesmo ocorre para os pontos X_2 (cor alaranjada) e X_3 (cor azul). Portanto, os X_1, X_2 e X_3 são pontos desta parábola. Todavia, no caso do ponto X_4 (cor verde) teremos que $d(X_4, F) > d(X_4, r)$, enquanto para X_5 (cor vermelho) teremos $d(X_5, F) < d(X_5, F_2)$. Ou seja, X_4 e X_5 não pertencem a esta parábola.

Uma maneira de construir um esboço de uma parábola é usando um barbante e um esquadro. Para tal deve-se ficar as extremidades do barbante no ponto F e no ângulo agudo do esquadro. Em seguida usar um lápis para esticar o barbante e, mantendo sempre o barbante esticado, mover o esquadro na horizontal para esboçar os pontos que pertencem a esta parábola.

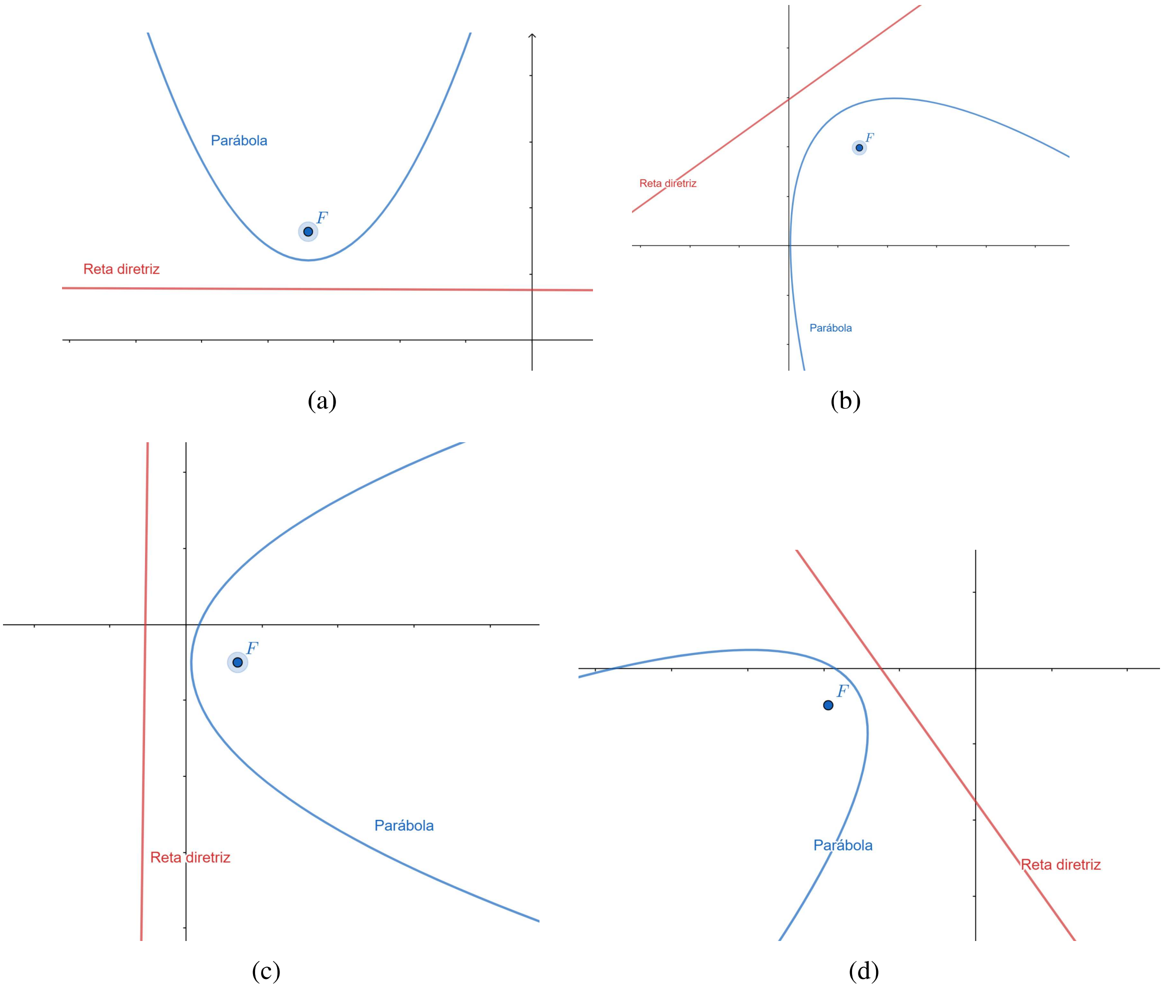
Figura E.3 – Esboço da parábola utilizando lápis e barbante



Fonte: Próprio autor.

Na Figura E.4 podem ser vistos mais alguns exemplos de parábola. Note que a parábola não precisa ter uma posição específica em relação ao sistema de coordenadas. Isto é, a concavidade pode estar para cima (Figura E.4(a)), ou então para o lado (Figura E.4(c)), ou mesmo não estar paralela a nenhum dos eixos (Figura E.4(b)).

Figura E.4 – Exemplo de parábola



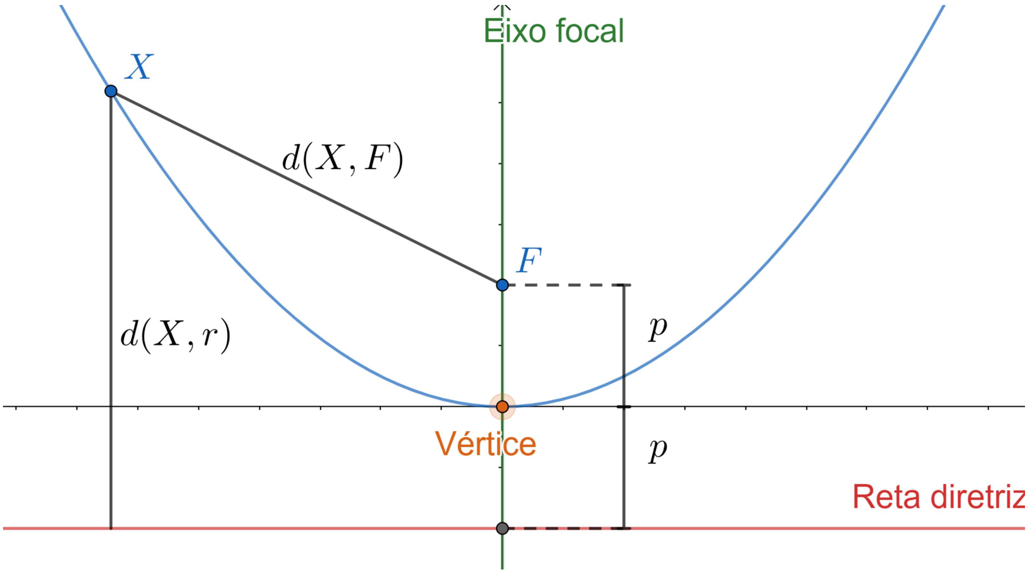
Fonte: Próprio autor.

E.1 ELEMENTOS DA PARÁBOLA

Para compreendermos melhor esta curva, é importante obter uma forma de caracterizá-la através de uma equação. Todavia, para tal será importante estabelecer previamente os elementos e as nomenclaturas desta seção cônica. Os principais elementos da parábola estão listados abaixo e podem ser visualizados na Figura E.5.

- Foco: ponto fixo F;
- Reta focal: reta que contém o foco e é perpendicular á diretriz;
- Vértice: ponto que pertence a parábola e a reta focal;
- Parâmetro p: distância do foco até o vértice.

Figura E.5 – Elementos da parábola



(a)

Fonte: Próprio autor.

A distância do foco até a reta r será dada como $d(F, r) = 2p$, ou seja, a distância do foco ao vértice será o parâmetro p, alguns autores utilizam a distância de F a r igual a p, portanto a distância do foco ao vértice será $p/2$, para evitar a utilização de fração nesta passagem, optou-se em utilizar $d(F, r) = 2p$.

E.2 EQUAÇÃO REDUZIDA DA PARÁBOLA

Para facilitar a compreensão da dedução da equação reduzida da parábola, vamos considerar primeiramente o caso do vértice da parábola centrada na origem. Além disso, consideraremos o caso em que a reta diretriz está paralela ao eixo das abcissas do sistema de coordenadas. Neste caso teremos que as coordenadas dos focos podem ser escritas como $F = (0, p)$ e a reta diretriz $y = -p$. Além disso, dado um ponto $X = (x, y)$ qualquer da parábola, este deverá satisfazer: $d(X, F) = d(X, r)$. Lembrando que $d(X, r) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Temos que

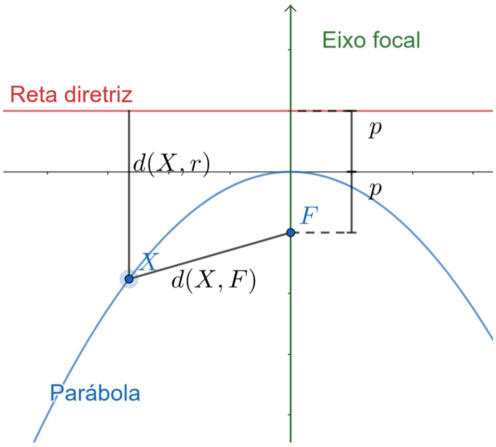
$$\begin{aligned} & d(X, F) = d(X, r) \\ \Rightarrow\ & \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = y + p \\ \Rightarrow\ & \sqrt{x^2 + y^2 - 2yp + p^2} = y + p \end{aligned}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado obtemos a **Equação Reduzida da Parábola**,

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2 \\ \Rightarrow\ & x^2 = 4yp. \end{aligned} \tag{E.1}$$

Para o caso onde a reta diretriz está paralela ao eixo x e o foco a baixo da reta r, como ilustra a Figura E.6. Escolhe-se o foco $F(0,-p)$, o ponto $X = (x,y)$ e a diretriz sendo a reta $y = p$.

Figura E.6 – Posição relativa b



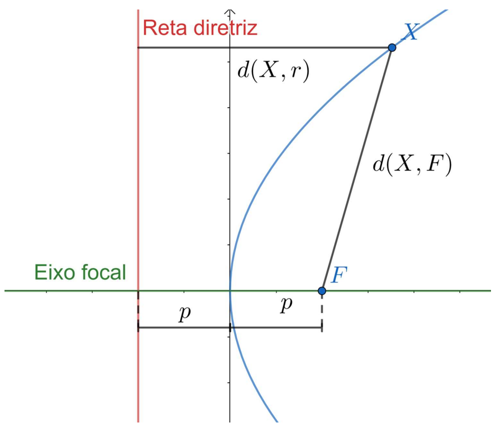
Fonte: Próprio autor.

Pela definição

$$
\begin{aligned}
& d(X,F) = d(X,r) \\
\Rightarrow \quad & \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-p)^2} = y - p \\
\Rightarrow \quad & \sqrt{x^2 + y^2 + 2yp + p^2} = y - p \\
\Rightarrow \quad & x^2 + y^2 + 2yp + p^2 = y^2 - 2yp + p^2 \\
\Rightarrow \quad & x^2 = -4yp. \qquad \text{(E.2)}
\end{aligned}
$$

Para o caso onde a reta diretriz está paralela ao eixo y e o foco a direita da reta r, como ilustra a Figura E.7. Escolhe-se o foco $F(p,0)$, o ponto $X = (x,y)$ e a diretriz sendo a reta $x = -p$.

Figura E.7 – Posição relativa da parábola com reta diretriz paralela ao eixo y



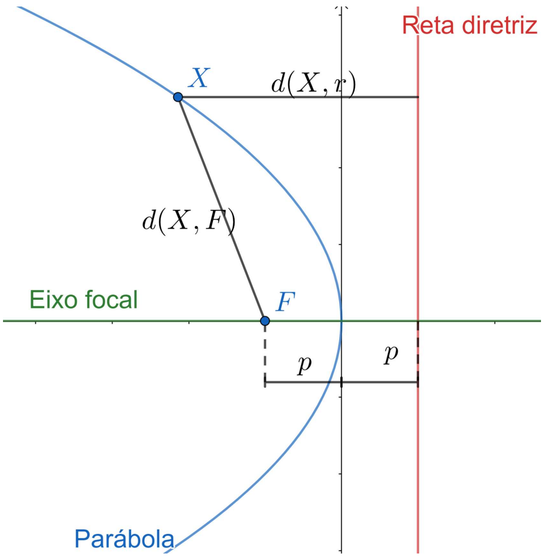
Fonte: Próprio autor.

De forma análoga calcularemos via definição e para esta modalidade a equação da reta é $x + p = 0$, onde $a = 1$, $b = 0$ e $c = p$, o que implica que $d(X, r) = x + p$.

$$
\begin{aligned}
& d(X,F) = d(X,r) \\
\Rightarrow\ & \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = x + p \\
\Rightarrow\ & \sqrt{x^2 - 2yp + p^2 + y^2} = x + p \\
\Rightarrow\ & x^2 - 2yp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2 \\
\Rightarrow\ & y^2 = 4xp.
\end{aligned} \tag{E.3}
$$

Para o último caso, onde reta diretriz está paralela ao eixo y e o foco a esquerda da reta r, como ilustra a Figura E.8. Escolhe-se o foco $F(-p, 0)$, o ponto $X = (x, y)$ e a diretriz sendo a reta $x = p$.

Figura E.8 – Segunda posição relativa da parábola com reta diretriz paralela ao eixo y



Fonte: Próprio autor.

Pela definição temos que

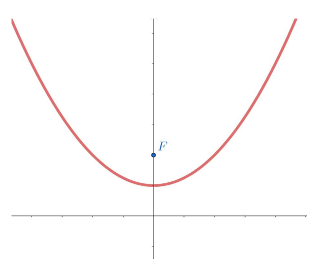
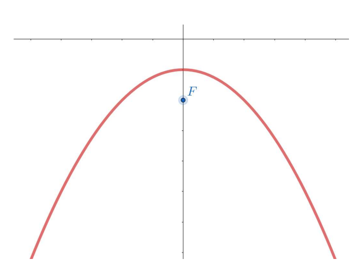
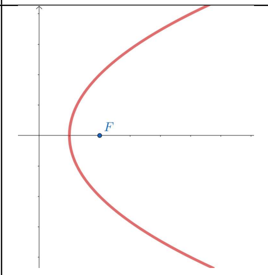
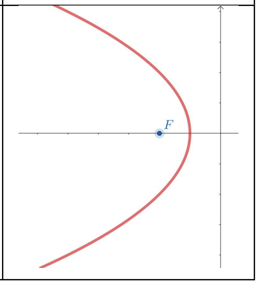
$$
\begin{aligned}
& d(X,F) = d(X,r) \\
\Rightarrow\ & \sqrt{(x-(-p)^2 + (y-0)^2} = x - p \\
\Rightarrow\ & \sqrt{x^2 + 2yp + p^2 + y^2} = x - p \\
\Rightarrow\ & x^2 + 2yp + p^2 + y^2 = x^2 - 2xp + p^2 \\
\Rightarrow\ & y^2 = -4xp.
\end{aligned} \tag{E.4}
$$

Há um padrão nas equações que acabamos de demonstrar, isso se deve a simetria de reflexão relativa ao eixo. Uma segunda forma de encontrar as equações da parábola a partir da

Equação (E.1), basta notar que as construções são apenas reflexões com os eixos do sistema de coordenadas.

Observe que, ao contrário da elipse e da hipérbole, a parábola tem quatro equações reduzidas quando centrada na origem. Verifique o resumo apresentado na Tabela E.1 relacionando a posição relativa da cônica com a **Equação Reduzida da parábola**.

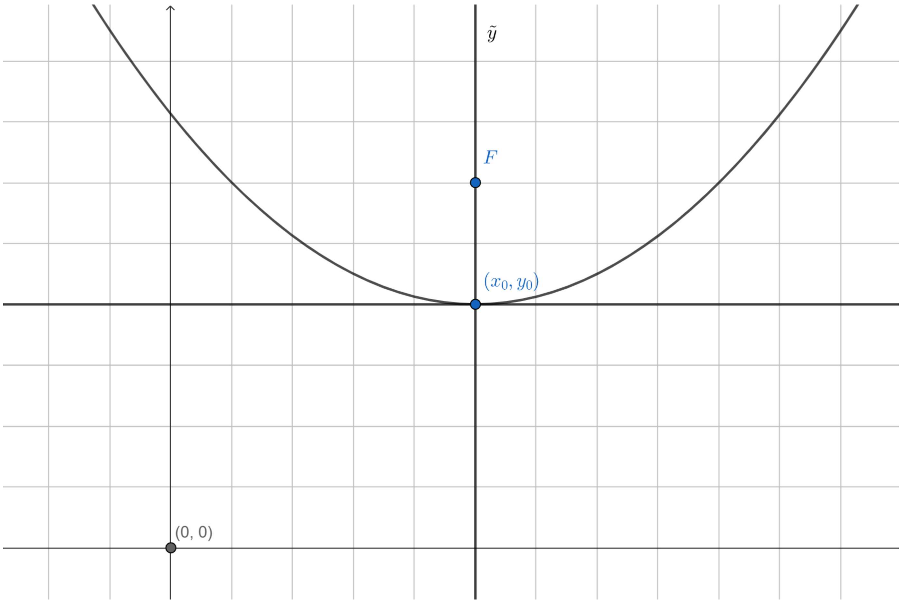
Tabela E.1 – Posição relativa da parábola aos eixos

$x^2 = 4yp$	$x^2 = -4yp$	$y^2 = 4xp$	$y^2 = -4xp$
			

Fonte: Próprio autor.

Consideremos agora o caso em que a cônica não esteja centrada na origem, isto é, que $C = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$, e com a reta diretriz paralelo ao Eixo x. Intuitivamente, basta realizar uma translação no sistema de coordenadas que recairemos nos casos anteriores. Isto é, consideraremos o sistema de coordenadas com origem no ponto C e com Eixos $E_{\tilde{x}}$ e $E_{\tilde{y}}$ paralelos aos eixos do sistema de coordenadas original E_x e E_y, respectivamente, como mostra a Figura E.9.

Figura E.9 – Parábola degenerada



Fonte: Próprio autor.

Como neste novo sistema de coordenadas a parábola está centrada na origem e com a reta diretriz sobre o Eixo $\tilde{x}$, a sua equação reduzida será

$$\tilde{x}^2 = 4\tilde{y}p$$
$$\tilde{y}^2 = 4\tilde{x}p.$$

Mas podemos relacionar as novas variáveis, com respeito as antigas, da seguinte forma: $\tilde{x} = x - x_0$ e $\tilde{y} = y - y_0$. Então, no sistema de coordenada original, a **Equação Reduzida da Parábola** será

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0) \tag{E.5}$$
$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0) \tag{E.6}$$
$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0). \tag{E.7}$$
$$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0). \tag{E.8}$$

Note que, no caso em que o centro da Elipse está na origem do sistema de coordenadas, as Equações (E.1),(E.2),(E.3) e (E.4) recairão nas Equações (E.5), (E.7), (E.6) e (E.8), respectivamente. Desta forma a parábola admite as possibilidade de **Equações Reduzidas** descritas na Tabela E.2.

Tabela E.2 – Equação geral de acordo com a posição relativa da parábola

Equação	Condição	Figura
$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$.	Eixo Focal da parábola é paralelo ao Eixo x do sistema de coordenadas	Figura E.4(a)
$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$.	Eixo Focal da parábola é paralelo ao Eixo x do sistema de coordenadas	Figura E.6
$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$.	Eixo Focal da parábola é paralelo ao Eixo y do sistema de coordenadas	Figura E.4(c)
$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$.	Eixo Focal da parábola é paralelo ao Eixo y do sistema de coordenadas	Figura E.8

Fonte: Próprio autor.

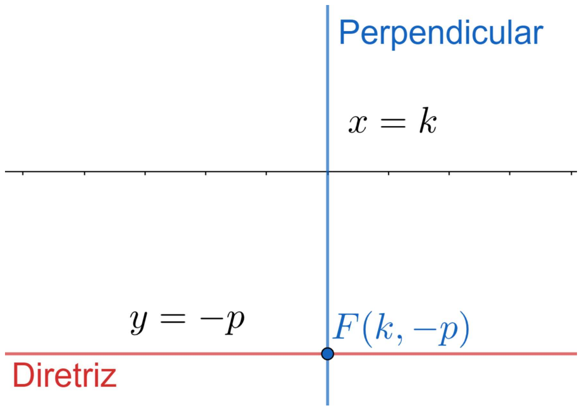
Para o caso em que o Eixo Focal da parábola não é paralelo a nenhum dos eixos do sistema de coordenadas, como no caso da Figura E.4(b), a equação da parábola não será mais chamada de equação reduzida pois ela torna-se mais complexa e não será abordada neste trabalho.

Supondo que o foco pertença a reta diretriz, obteremos uma reta perpendicular a reta diretriz que passa pelo foco. Será demonstrado apenas um caso, para os demais a demonstração é análoga.

Utilizando o conhecimento demonstrado anteriormente. Seja $X = (x, y)$, $F(k, -p)$ e a reta diretriz $r = -p$. Pela definição de parábola temos,

$$\begin{aligned}
& d(X,F) = d(X,r) \\
\Rightarrow\quad & \sqrt{(x-k)^2 + (y-(-p))^2} = y + p \\
\Rightarrow\quad & (x-k)^2 + (y+p)^2 = (y+p)^2 \\
\Rightarrow\quad & (x-k)^2 = 0 \\
\Rightarrow\quad & x = k.
\end{aligned}$$

Figura E.10 – Parábola degenerada



Fonte: Próprio autor.