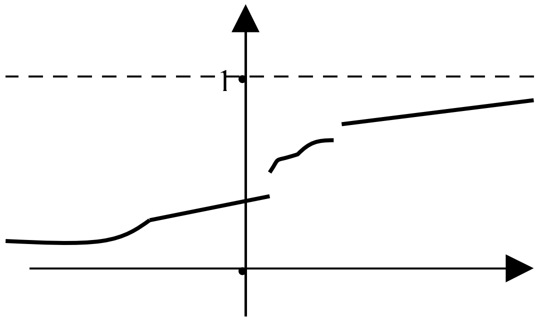
PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.

Dado un espacio de probabilidad unidimensional $\left(X, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X\right)$ la función de distribución

$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] : t \to F_X(t)$

Cumple:



1) Es monótona creciente.
2) Es continua por la derecha.
3) $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$
4) $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.

 # Demostración:

1) *Si* $x < y \Rightarrow (-\infty, x] \subset (-\infty, y] \Rightarrow \{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$

Luego:

$$F_X(x) = P_X\left((-\infty, x]\right) \leq P_X\left((-\infty, y]\right) = F_X(\mathrm{y})$$

2) *Basta tomar límites y tener en cuenta*

$$\lim_{h \to 0} F_X(x+h) = \lim_{h \to 0} P_X\left(\{X \leq x+h\}\right) = \lim_{n \to \infty} P_X\left(\left\{X \leq x + \frac{1}{n}\right\}\right) =$$

$$= P_X\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{X \leq x + \frac{1}{n}\right\}\right) = P_X(X \leq x) = F_X(x)$$

3) *Basta tomar límites y tener en cuenta*

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = \lim_{n \to -\infty} P_X\left(\{X \leq n\}\right) = P_X\left(\lim_{n \to -\infty} \{X \leq n\}\right) =$$

$$= P_X\left(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \{X \leq n\}\right) = P_X(\varnothing) = 0$$

4) *Basta tomar límites y tener en cuenta*

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} P_X\left(\{X \leq n\}\right) = P_X\left(\lim_{n \to +\infty} \{X \leq n\}\right) =$$

$$= P_X\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{X \leq n\}\right) = P_X(\mathbb{R}) = 1$$

Este último apartado tiene sentido, por ser $\mathbb{R}$ *separable y métrico, ya que si* $x \to +\infty$ *existe una sucesión numerable* $\{n\}_n^{+\infty} \subset \mathbb{R}$*, tal que* $n \to +\infty$ *y tal que para toda aplicación* F_X*, se cumple* $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} F_X(n)$

☞ Además, hay que observar que como

$$\{X \leq a\} = \left\{\left\{\lim_{x\to a^-} \{X \leq a\}\right\} \cup \{a\}\right\} \text{ (\textit{Unión de sucesos disjuntos}).}$$

Se cumple:

$$P_X(\{a\}) = P_X\left(\{X \leq a\}\right) = P_X\left(\left\{\lim_{x\to a^-} \{X \leq n\}\right\} \cup \{a\}\right) = F_X(a) - \lim_{x\to a^-} F_X(a)$$

Donde

$$\lim_{x\to a^-} \{X \leq x\} = \lim_{x\to a; x\leq a} \{X \leq x\}$$

Que en el caso de que F_X sea continua por la izquierda en a, por serlo también por la derecha, es continua, y por tanto será $P_X(\{a\}) = 0$