Satz des Pythagoras

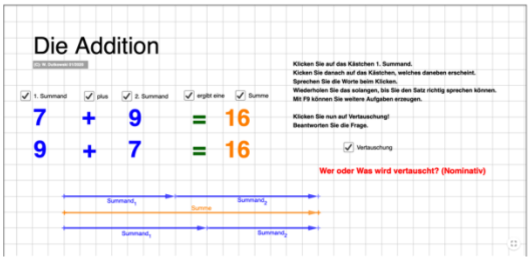
Abendrealschule Wintersemester 2020/2021

Einführung

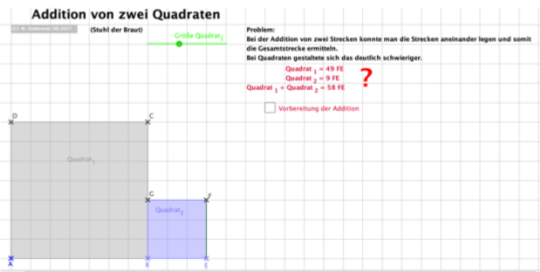
> **Die Summe der Quadratwurzeln von je zwei Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks ist gleich der Quadratwurzel der dritten Seite.**
> (Die Vogelscheuche, Der Zauberer von Oz, 1939)

Das nebenstehende Zitat ist mathematisch nicht richtig, bescheinigt aber im Film Der Zauberer von Oz eine Intelligenzleistung, die mit einem Diplom belohnt wird. Die Grundlage bildet der *Satz des Pythagoras*, der leider nicht in einer sprachlichen Variante erlernt wird, sondern in der algebraischen Form: $a^2 + b^2 = c^2$
Sprich: **A-Quadrat + B-Quadrat ist gleich C-Quadrat**.
Die nachfolgende Unterrichtseinheit soll Ihnen helfen, diesen Fundamentalsatz der Mathematik inhaltlich richtig zu verstehen und seine – oft intuitive – Anwendung im Alltag ins Bewusstsein zu rücken. Dabei ist es wichtig, sich die geometrische Aussage dieses Satzes etwas genauer anzuschauen, weshalb in der obigen Formulierung Farben verwendet wurden. *Der Satz des Pythagoras* bezieht sich auf Flächen, genauer gesagt auf Quadratflächen. In der Anwendung werden jedoch immer die resultierenden **Seitenlängen** der **Quadrate** benutzt. Für dieses Skript existieren interaktive Dateien, die Sie per QR – Code (Semesterplaner S. 17) aufrufen können. Der Satz des Pythagoras wird an der ARS im 4. Semester unterrichtet.

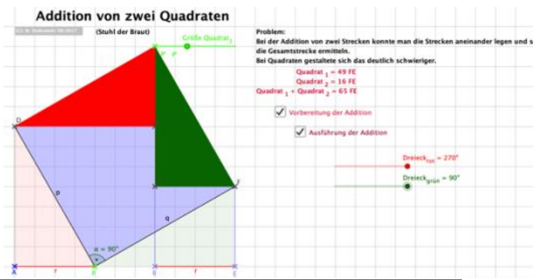
Grundrechenarten geometrisch



Wenn Sie sich an die Grundrechenarten erinnern, haben Sie gelernt, dass man die Strichrechnung mit Strecken gleichsetzen kann, die aneinandergelegt werden. Wenn man als Winkel zwischen den aneinandergelegten Strecken 180° (gestreckter Winkel) wählt, lassen sich die Zahlen als Abstand vom Ursprung am Zahlenstrahl darstellen. Will man zwischen Addition und Subtraktion unterscheiden, werden die Strecken zu Pfeilen. Dabei ist das Ergebnis (Summe oder Differenz) wieder eine Strecke.
Das Bild gibt einen Überblick. Übungen und Vertiefungen finden Sie im GeoGebra Book IVK I. Diese – eindimensionale – Darstellung lässt sich nicht so ganz einfach auf die Addition von Flächen übertragen.



Zwar lassen sich Flächen aneinanderlegen und die Flächenanteile addieren, aber die Form ist in der Regel nicht erhalten, wie das linke Bild zeigt. Durch geschickte Zerlegung kann man jedoch diese beiden Quadrate in ein flächengleiches Quadrat überführen.



Die Zerlegung wird ‚Stuhl der Braut' genannt, was vermutlich ein Übersetzungsfehler ist. Das griechische Wort ***upnu*** hat zwei Bedeutungen: ***geflügeltes Insekt*** und ***Braut***. Wenn Sie Datei Addition von Quadraten selbst ausprobieren, wird Ihnen das ***geflügelte Insekt*** sympathischer sein.

Satz des Pythagoras

Abendrealschule Wintersemester 2020/2021

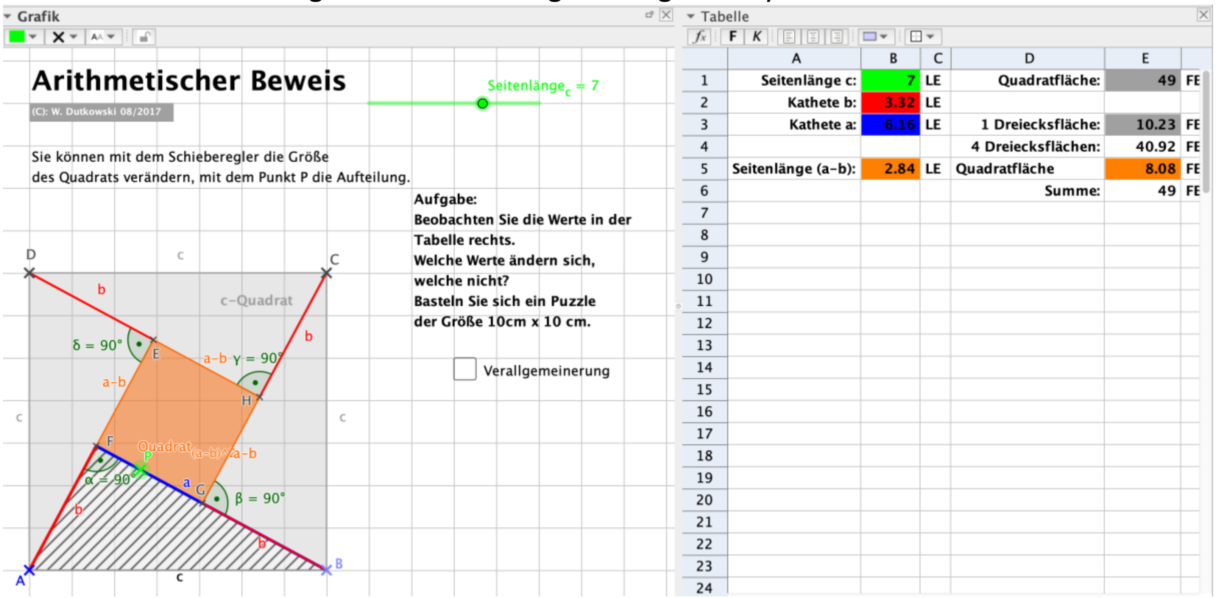
Eigenaktivität:

Versuchen Sie doch einmal selbst, die Quadrate mit den Seitenlängen 3 cm und 5 cm (Sie können auch größere wählen, oder andere) gemäß dieser Idee selbst zu einem neuen Quadrat zu konstruieren. Benutzen Sie einen vernünftigen Zirkel und einen spitzen Bleistift. Arbeiten Sie sorgfältig.

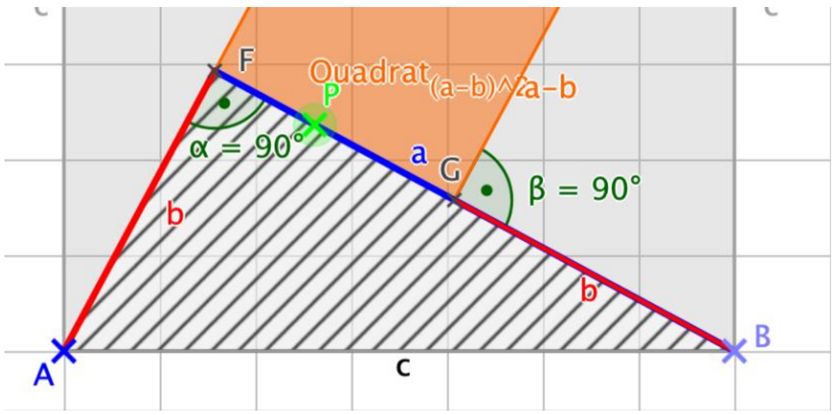
Der *Stuhl der Braut* ist der Beweis dafür, dass man zwei Quadratflächen wieder als eine Quadratfläche darstellen kann.

☛ Beachten Sie, dass es sich hier nur um zwei Quadratflächen handelt die addiert werden. Wenn Sie mehr Quadratflächen addieren wollen, geht das nur nacheinander!

Nach dieser Betrachtung kann man die folgende Figur analysieren:



Benutzen Sie dazu die Datei im GeoGebra – Book. Überprüfen Sie durch Nachrechnen bei unterschiedlichen Aufteilungen, dass immer gilt: $a^2 + b^2 = c^2$, was die oberflächliche algebraische Beschreibung des *Satzes des Pythagoras* darstellt.



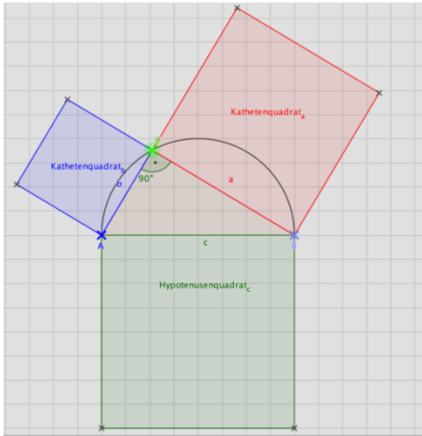
Um hier genauer zu werden muss man sich das grüne – schraffierte – Dreieck etwas genauer ansehen:

1. Das Dreieck ist **rechtwinklig**
2. Es hat zwei kurze Seiten (a ,**b**) und eine lange Seite (**c**).

Die kurzen Seiten werden im **rechtwinkligen** Dreieck Katheten genannt, die lange Seite Hypotenuse.

Satz des Pythagoras

Das lässt folgende Figur zu (Achtung, a und b farblich vertauscht!!), aus der sich dann die korrekte sprachliche Formulierung des Satz des Pythagoras wie folgt ableiten lässt:



In einen **rechtwinkligen** Dreieck ist der Summe der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates.

Beachten Sie, dass hier nicht die Seitenbezeichnung wichtig ist, sondern das Quadrat über den Dreieckseiten.
Werden die Katheten (wie in Formelsammlungen blich) mit a und b bezeichnet und die Hypotenuse mit c, dann gilt die algebraische Beschreibung: $a^2 + b^2 = c^2$, leider fehlt in den meisten Beschreibungen, dass das nur im rechtwinkligen Dreieck gilt. Mit der Datei Folgerungen aus dem Satz des Pythagoras können Sie Umkehrung nutzen:

Gilt in einem Dreieck, dass die Summe der Kathetenquadrate flächengleich mit dem Hypotenusenquadrat ist, ist das Dreieck rechtwinklig.
Diese Umkehrung wird bei Innenarchitekten gerne dazu benutzt, ob die Ecke eines Zimmers rechtwinklig ist. Maurer benutzen das sogenannte Maurerdreieck. Dabei spielen die Zahlen 3, 4 und 5 (6,8,10 – 60, 80, 100 - …) eine Rolle:
32 + 42 = 52, den 3·3 + 4·4 = 5·5 ➔ 9 + 16 = 25

Eigenaktivität

Zeichen Sie ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 6 cm und 8 cm. Ist die Länge der Hypotenuse 10 cm? Messen Sie, und rechnen Sie es nach.
Messen Sie bei sich zu Hause in einer frei zugänglichen Zimmerecke von einer Seite 60 cm ab und auf der anderen Seite 80 cm. Achten Sie darauf, dass Ihre Markierungen auf gleicher Höhe sind! Wie lang ist der Abstand Ihrer Markierungen?

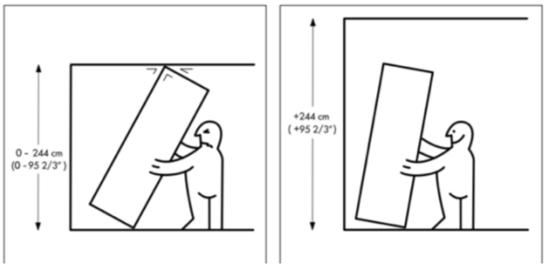
Beweisführungen

Für die Richtigkeit des Satzes von Pythagoras existieren angeblich 1000 Beweise, die bekanntesten bzw. originellsten habe ich Ihnen in dem GeoGebra-Book zusammengestellt. Sie sollten sich – vor allem wenn Sie ein Abitur machen wollen – damit vertraut machen, dass das Beweisen – Zusammentragen von Argumenten – die Kernaufgabe von Mathematikern bedeutet. Für die Anwendungen reicht es oft, dass man den Satz kennt und **geometrisch** richtig anwendet. Das bedeutet, Sie müssen Ihr Auge schulen, um rechtwinklige Dreiecke zu sehen und zu vermuten. Mit dem Satz des Pythagoras können Sie dann nachprüfen und verstehen, wie man alltäglichen Problemen aus dem Weg gehen kann.

Satz des Pythagoras

Abendrealschule Wintersemester 2020/2021

Anwendungen



Auch wenn das jetzt Schleichwerbung für ein schwedisches Möbelhaus ist. Der PAX – Schrank hat schon so manche Beziehung auf den Prüfstand gebracht. Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus der Aufbauanleitung. Das GeoGebra – Book enthält eine Datei, die zunächst deutlich macht, dass dieser Hinweis sinnvoll ist. Es geht um die Warnung, wann man den Schrank liegend aufbauen kann und wann er stehend montiert werden muss.

Eigenaktivität

Welche Maße hat der Schrank? Was ist die längste Strecke? Was hat das mit dem Satz des Pythagoras zu tun?

Aufgaben

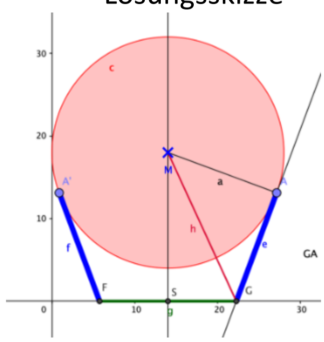
Aufgabe 1

Die Kugel eines Gaskessels hat einen Radius von 14 m. Sie soll durch ebenfalls 14 m lange Streben gehalten werden, welche die Kugel berühren. Der tiefste Punkt der Kugel soll 4 m über dem waagrechten Erdboden liegen.
Berechnen Sie den Abstand der Punkte F und G in dem die Streben in der Erde befestigt werden.

Tipp:
Berühren heißt auch tangieren.
Geraden die einen Kreis berühren werden Tangenten genannt. Tangenten und Radius bilden am Berührpunkt immer einen rechten Winkel.

Benutzen Sie den Satz des Pythagoras mit den Bezeichnungen aus der Skizze, nicht mit denen aus der Formelsammlung.

Lösungsskizze

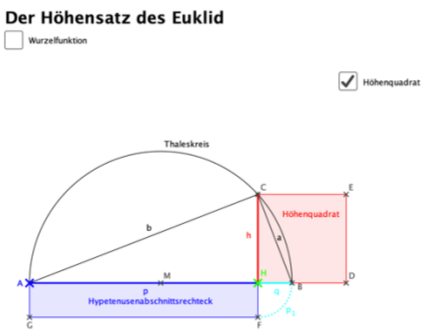


Aufgabe 2:
Eine Straße hat die Steigung von 20%, wenn sie auf 100m einen Höhenunterschied von 20m bewältigt.

a) Welche konstante Steigung müsste eine Straße haben, die einen Höhenunterschied von 157m auf einer geraden Strecke von 1800m überwindet ?
b) Wie lange wäre eine – gerade – Straße mindestens, die bei maximal 10% Steigung eine Höhenunterschied von 157m überwindet ?

Der Höhensatz

Die Unterrichtseinheit befasst sich mit der Satzgruppe des Pythagoras, das bedeutet, im Zusammenhang neben dem Satz des Pythagoras existieren noch weitere sinnvoll nutzbare Flächeneigenschaften. Einer davon ist der Höhensatz des Euklid, dem Sie es zu verdanken haben, dass Sie beim Renovieren oder Anstreichen nicht immer rumrechnen müssen. Warum? Weil Sie bei Farben, Kleister, Fliesen, usw. immer Quadratmeterangaben haben, obwohl Sie in den seltensten Fällen quadratische Wände oder Böden haben.



Das Bild links zeigt den Höhensatz des Euklid.
Um die Ricjtigkeit des Satzes zu zeigen und um den Umgang mit Gleichungen zu wiedrholen, hier der algebraische Beweis.
Das Dreieck ABC ist rechtwinklig (Thalesreis, siehe Datei)
Die Höhe h teilt die Hypotenuse c in die Teilabschnitte p und q. (c = p + q) Dadurch entsethen zwei weitere rechtwinklige Dreiecke: AHC und HBC. Der Satz des Pythagoras gilt. Mit diesen Voraussetzungen erhält:

I. $a^2 = h^2 + q^2$ und II. $b^2 = h^2 + p^2$

I. + II. $a^2 + b^2 = 2h^2 + q^2 + p^2$

da der Satz des Pythagoras gilt muss auch gelten:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

und da c = (p+q) ist gilt:

$$a^2 + b^2 = (p + q)^2$$
$$a^2 + b^2 = 2pq + q^2 + p^2$$

somit muss gelten: $2h^2 = 2pq \Leftrightarrow h^2 = pq$ **(Das ist der Höhensatz des Euklid)**

Sprachlich bedeutet das:

Zu jedem Rechteck existiert ein flächengleiches Quadrat und zu jedem Quadrat ein flächengleiches Rechteck.

Deshalb können Sie Materialien, die in Qudratmeterangabe verkauft werden auch für Rechteckflächen verwenden.
Algebraisch steckt aber noch eine weitere charmante Idee im Höhensatz, der die Konstruierbarkeit jeder Quadratwurzel ermöglicht:

$$h^2 = p \cdot q \;\Leftrightarrow h = \sqrt{p \cdot q}$$

Ohne Beschränkung (der Algemeinheit) können sie für q eine 1 einsetzen, und erhalten somit als Wurzel als Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks. Das können Sie mit dem Applet Höhensatz überprüfen.

Eigenaktivität

Ein LKW soll durch einen Tunnel mit halbkreisförmigem Querschnitt fahren.
Die zweispurige Fahrbahn ist insgesamt 6 m breit; auf beiden Seiten befindet sich ein Randstreifen von je 2 m Breite.
Wie hoch darf der LKW maximal sein, wenn der Sicherheitsabstand zur Decke mindestens 30 cm betragen muss?
Die Lösungsidee finden Sie unter Anwendungen im GeoGebra – Book.