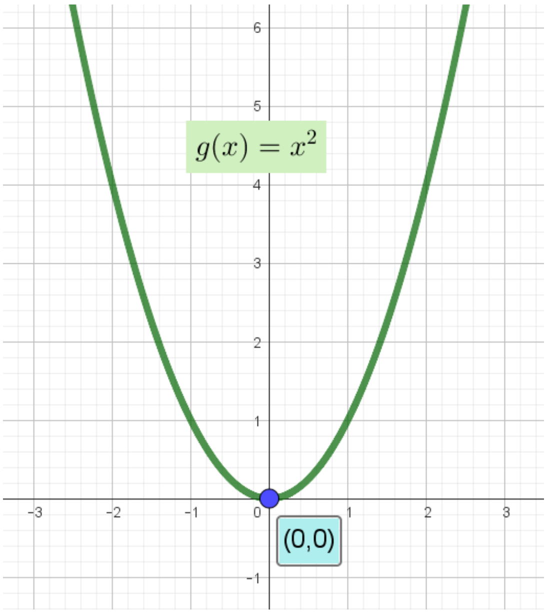
Problemas sobre gráfica de funciones

CURSO	**TEMA**	**WWW.DANIPARTAL.NET**
1ºBach CCSS	Funciones y Límite	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

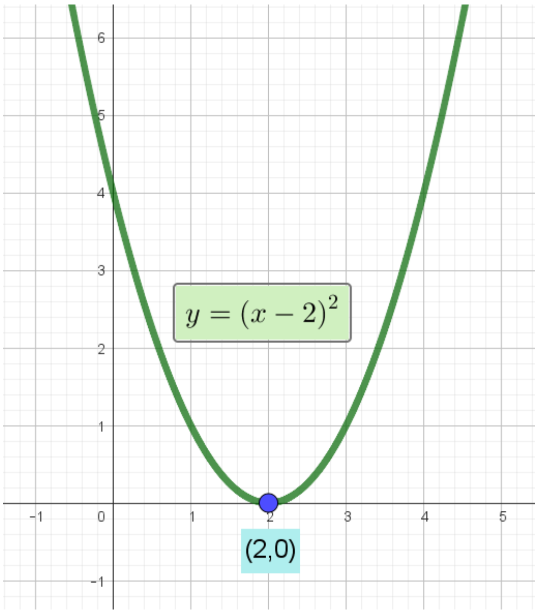
PROBLEMA 1

Representa gráficamente $f(x) = (x-2)^2 + 3$ tomando como referencia la gráfica de $g(x) = x^2$.

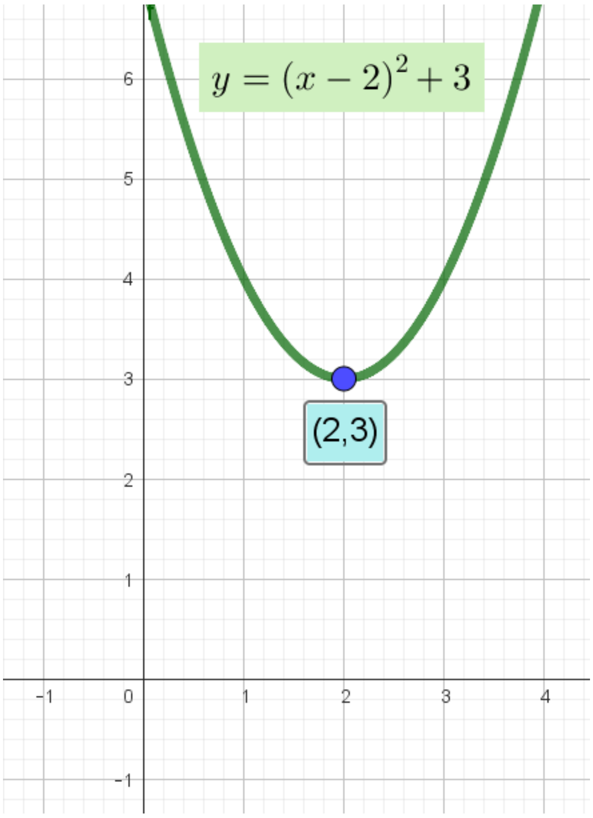
La parábola convexa $g(x) = x^2$ posee su vértice (mínimo absoluto) en el punto (0,0). Y es simétrica respecto de la recta $x = 0$.



Al aplicar una traslación horizontal de 2 unidades a la derecha, tendríamos la parábola $y = (x-2)^2$. El vértice se mueve dos posiciones hacia la derecha, pasando al punto (2,0).



Si ahora sumamos 3 unidades, provocamos una traslación vertical ascendente de 3 unidades. Por lo que el vértice pasa al punto (2,3).



PROBLEMA 2

El número de habitantes de cierta población, en los próximos años, vendrá dado por la función $f(x) = \frac{14500x+7200}{2x+1}$, donde la variable x mide los años transcurridos desde un tiempo inicial $x = 0$.

a) ¿Cuántos habitantes tiene la población actualmente?

b) ¿Y dentro de dos años?

c) ¿La población crecería de manera indefinida o tendería a estabilizarse en torno a un determinado número de habitantes?

a) ¿Cuántos habitantes tiene la población actualmente (tiempo igual a 0)?

$f(0) = 7200 habitantes$

b) ¿Y dentro de dos años (tiempo igual a 2)?

$$f(2) = \frac{14500 \cdot 2 + 7200}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{36200}{5} = 7240 habitantes$$

c) ¿La población crecería de manera indefinida o tendería a estabilizarse en torno a un determinado número de habitantes?

Nos preguntan por el comportamiento de la función en un tiempo infinito. Es decir:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{14500x+7200}{2x+1} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ Cociente de polinomios del mismo grado

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{14500x + 7200}{2x + 1} = \frac{14500}{2} = 7250\ habitantes$$

La población muestra una asíntota horizontal en el valor $\mathrm{f(x) = 7250\ habitantes}$, que es un límite superior al que tiende la imagen por mucho tiempo que pase.

PROBLEMA 3

Sea $f(x) = a + \frac{bx+c}{x^2+1}$, donde a, b y c son números reales. Calcula los valores de a, b y c sabiendo que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$, la gráfica de $f(x)$ corta al eje OY en el punto de ordenada $y = 2$, y que la gráfica pasa por el punto $(1, \frac{3}{2})$.

Expresamos la función como una única fracción.

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + a + c}{x^2 + 1}$$

Interpretamos con ecuaciones cada una de las frases del enunciado.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3 \to \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2+bx+a+c}{x^2+1} = \frac{a}{1} = a \to a = 3$

$Corte\ eje\ OY\ en\ y = 2 \to f(0) = 2 \to \frac{a+c}{1} = 2 \to \frac{3+c}{1} = 2 \to c = -1$

$f(x)\ pasa\ por\ \left(1, \frac{3}{2}\right) \to f(1) = \frac{3}{2} \to \frac{a+b+a+c}{1+1} = \frac{3}{2} \to \frac{b+5}{2} = \frac{3}{2} \to b = -2$

PROBLEMA 4

Una barra de hierro dulce de 30 cm de larga a 0ºC se calienta y su dilatación viene dada por una función lineal $L = a + bt$, donde L es la longitud en cm y t es la temperatura grados Celsius.

Halla la expresión analítica de L, sabiendo que $L(1) = 30{,}0005\ cm$ y que $L(3) = 30{,}0015 cm$.

a) El crecimiento de la barra depende linealmente de la temperatura → $L = a + bt$ → Si representamos en el eje horizontal la variable tiempo (t) y en el eje vertical la variable longitud (L), tendremos una recta. Y una recta queda definida si conocemos dos puntos.

$L(1) = 30{,}0005\ cm \rightarrow 30{,}0005 = a + b \cdot 1$

$L(3) = 30{,}0015 cm \rightarrow 30{,}0015 = a + b \cdot 3$

Llegamos a un sistema 2x2.

Si restamos ambas ecuaciones → $-0{,}001 = -2b \rightarrow b = 0{,}0005 \rightarrow a = 30$

La expresión analítica queda → $L = 30 + 0{,}0005 \cdot t$

PROBLEMA 5

Por el alquiler de un coche cobran 100 € diarios más 0.30 € por kilómetro. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona el coste diario con el número de kilómetros y represéntala. Si en un día se ha hecho un total de 300 km, ¿qué importe debemos abonar?

En la recta a representar tenemos:

Variable independiente → número de kilómetros → x

Variable dependiente → coste → $C(x)$

Valor mínimo de un día → $100€$ → es el valor de la recta cuando $x = 0$ (gasto mínimo).

Cada kilómetro el precio crece en 0.30 euros. Por lo que la pendiente es 0.30.

Ecuación de la recta → $C(x) = 0{,}3 \cdot x + 100$

Si recorremos en un día un total de 300 kilómetros → $C(300) = 0{,}3 \cdot 300 + 100 = 190€$