Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 20 - ángulo entre planos - ángulo entre recta y plano

1. Sea el triángulo de vértices $A(1,2,-2)$, $B(0,-3,1)$ y $C(-1,0,0)$ y los planos $\Pi_1: x+y+z+1=0$ y $\Pi_2: \begin{cases} x=-\alpha+\beta+1 \\ y=\alpha-2\beta \\ z=\alpha+\beta \end{cases}$.

a) Obtener la posición relativa de Π_1 y del plano que contiene al triángulo.

b) Obtener un vector $\vec{n}_1$ perpendicular al plano Π_1 y un vector $\vec{n}_2$ perpendicular al plano Π_2 . Obtener el coseno del ángulo formado por ambos vectores.

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de ambos planos.

a) En primer lugar calculamos el plano que contiene a los puntos A, B y C. Para ello buscamos dos vectores linealmente independientes y un punto del plano, para aplicar la determinación lineal del plano.

$$\begin{matrix} \vec{AB}=(-1,-5,3) \\ \vec{AC}=(-2,-2,2) \\ C(-1,0,0) \end{matrix} \rightarrow \quad \vec{AB} \text{ y } \vec{AC} \text{ son independientes porque } \frac{-1}{-2}\neq\frac{-5}{-2}\neq\frac{3}{2}$$

$$\Pi(\vec{AB},\vec{AC},C) \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -5 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ x+1 & y & z \end{vmatrix}=0 \rightarrow 2z-10(x+1)-6y-(-6(x+1)-2y+10z)=0$$

$$-4(x+1)-4y-8z=0 \rightarrow -4x-4y-8z-4=0 \rightarrow \Pi: x+y+2z+1=0$$

Estudiamos la posición relativa de $\Pi: x+y+2z+1=0$ y $\Pi_1: x+y+z+1=0$, resolviendo el sistema de ecuaciones que forman sus dos ecuaciones generales (otra opción sería estudiar directamente los rangos de la matriz del sistema y de la matriz ampliada).

$$\begin{Bmatrix} x+y+2z+1=0 \\ x+y+z+1=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Restamos ambas ecuaciones} \rightarrow \quad z=0 \rightarrow \begin{Bmatrix} x+y+1=0 \\ x+y+1=0 \end{Bmatrix}$$

Ambas ecuaciones son idénticas, por lo que podemos obviar una → $x+y+1=0$

Tomamos una incógnita como parámetro libre → $y=\lambda \rightarrow x=-1-\lambda$

La solución del sistema resulta una recta.

$$r:\left\{\begin{matrix} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{matrix}\right\}$$

Ambos planos son secantes y se cortan en una recta.

b) Las coordenadas del vector normal a un plano coincide con los coeficientes A, B y C de la ecuación general del plano.

$$\Pi_1: x+y+z+1=0 \quad \rightarrow \quad \vec{u_{\Pi_1}}=(1,1,1)$$

$$\Pi_2:\left\{\begin{matrix} x=-\alpha+\beta+1 \\ y=\alpha-2\beta \\ z=\alpha+\beta \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Pasamos a general} \rightarrow \quad \Pi_2:\begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -2 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}=0$$

$$2z+y+(x-1)-(-2(x-1)-y+z)=0 \quad \rightarrow \quad 3(x-1)+2y+z=0$$

$$\Pi_2: 3x+2y+z-3=0 \quad \rightarrow \quad \vec{u_{\Pi_2}}=(3,2,1)$$

El coseno formado por ambos planos coincide con el coseno formado por sus vectores normales.

$$\cos(\alpha)=\left|\frac{\vec{u_{\Pi_1}}\cdot\vec{u_{\Pi_2}}}{|\vec{u_{\Pi_2}}|\cdot|\vec{u_{\Pi_1}}\cdot|}\right|=\left|\frac{(1,1,1)\cdot(3,2,1)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}}\right|=\frac{3+2+1}{\sqrt{42}}=\frac{6\sqrt{42}}{42}=0{,}926 \quad \rightarrow \quad \alpha=22{,}21^{o}$$

c) Por último debemos obtener la recta, en paramétricas, del corte entre los planos $\Pi_1: x+y+z+1=0$ y $\Pi_2: 3x+2y+z-3=0$, para lo cual resolvemos el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{matrix} 3x+2y+z-3=0 \\ x+y+z+1=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Parámetro libre} \quad z=\lambda \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{matrix} 3x+2y=3-\lambda \\ x+y=-1-\lambda \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad F_2'=2F_2$$

$$\left\{\begin{matrix} 3x+2y=3-\lambda \\ 2x+2y=-2-2\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Restamos ambas ecuaciones} \rightarrow \quad x=5+\lambda$$

$$y=-1-\lambda-(5+\lambda) \quad \rightarrow \quad y=-6-2\lambda$$

La recta solución es $r:\left\{\begin{matrix} x=5+\lambda \\ y=-6-2\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$

2. Considera las rectas $r:\begin{cases} x=1 \\ z=2 \end{cases}$ **,** $s:\begin{cases} x+y=1 \\ z=2 \end{cases}$ **, y los planos** $\Pi_1: y=0$ **,** $\Pi_2: 2x+y-z=1$

a) Obtener el ángulo entre ambas rectas.

b) Obtener el ángulo entre ambos planos.

c) Obtener el ángulo entre la recta s **y el plano** Π_2

a) Debemos obtener los vectores directores de ambas rectas. Podemos aplicar el producto vectorial a los vectores normales de los planos que forman las ecuaciones generales de las rectas.

$r:\begin{cases} x=1 \\ z=2 \end{cases}$ → Vectores normales a los planos → $\vec{u}_1=(1,0,0)$, $\vec{u}_2=(0,0,1)$

$s:\begin{cases} x+y=1 \\ z=2 \end{cases}$ → Vectores normales a los planos → $\vec{u}_3=(1,1,0)$, $\vec{u}_4=(0,0,1)$

$$\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0+0+0-(0+0+\hat{j})=-\hat{j}=(0,-1,0)$$

$$\vec{u}_3\times\vec{u}_4=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\hat{i}+0+0-(0+0+\hat{j})=\hat{i}-\hat{j}=(1,-1,0)$$

El coseno del ángulo entre ambas rectas se define como:

$$\cos(\alpha)=\left|\frac{(0,-1,0)\cdot(1,-1,0)}{\sqrt{(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| \rightarrow \alpha=45^{o}$$

b) El ángulo entre ambos planos coincide con el ángulo formado por sus vectores normales.

$\Pi_1: y=0 \rightarrow \vec{u_{\Pi_1}}=(0,1,0)$

$\Pi_2: 2x+y-z=1 \rightarrow \vec{u_{\Pi_2}}=(2,1,-1)$

$$\cos(\alpha)=\left|\frac{(0,1,0)\cdot(2,1,-1)}{\sqrt{1^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{6}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{6} \rightarrow \alpha=65{,}91^{o}$$

c) El seno del ángulo entre recta y plano se calcula con el vector director de la recta y el vector normal al plano.

$$sen(\alpha)=\left|\frac{(1,-1,0)\cdot(2,1,-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{2-1}{\sqrt{12}}\right|=\frac{\sqrt{12}}{12} \rightarrow \alpha=16{,}79^{o}$$