INTEGRALES INDEFINIDAS

Índice:

1. Primitiva de una función

Sean $f(x)$ y $F(x)$ dos funciones reales definidas en un mismo intervalo $I=[a,b]$ Diremos que la función $F(x)$ **es una función primitiva de** $f(x)$, o simplemente **primitiva** de $f(x)$ en el intervalo I , si la derivad de $F(x)$ coincide con la función $f(x)$ en el intervalo I , es decir:

$$F(x) \text{ es primitiva de } f(x) \Leftrightarrow F'(x)=f(x); \forall x \in I$$

 # Ejemplos

- $F(x)=x$ *es una función primitiva de* $f(x)=1$ *, ya que* $F'(x)=1=f(x)$.
- $\ln x$ *es una primitiva de* $\frac{1}{x}$ *, ya que* $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Si existe la función primitiva $F(x)$ de $f(x)$, decimos que $f(x)$ es **integrable.**

El proceso que nos permite obtener $F(x)$ a partir de $f(x)$ se denomina **integración** (*podemos considerar la integración como la función inversa de la derivación*).

Hay que observar que si una función $f(x)$ *tiene una función primitiva no es única. Por ejemplo:* $F_1(x)=x^2$, $F_2(x)=x^2+1$, $F_3(x)=x^2+2$ *, ... , son primitivas de* $f(x)=2.x$.

Teorema.- Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos funciones primitivas de una función $f(x)$, entonces se diferencian en una constante.

Ya que si $F(x)$ *y* $G(x)$ *son primitivas de* $f(x)$ *, se cumplirá* $F'(x)=G'(x)=f(x)$ *. Luego, se cumplirá:*

$$(F-G)'(x)=F'(x)-G'(x)=0$$

Por tanto, existirá una constante C, tal que:

$$(F-G)(x)=F(x)-G(x)=C$$

Por tanto, se verifica:

$$F(x)=G(x)+C$$

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y C es un número real cualquiera, la función $(F(x)+C)$ es también una primitiva de $f(x)$. El **conjunto de funciones primitivas** de $f(x)$ será

$$\{F(x)+C : C \in \mathbb{R}, \forall\ x \in D_f, F'(x)=f(x)\}$$

Cuando utilizamos la notación diferencial, teniendo en cuenta que $F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}$:

$$F(x) \text{ es primitiva de } f(x) \Leftrightarrow dF(x)=f(x).dx$$

Al conjunto, de todas las funciones primitivas de $f(x)$, se le denomina **INTEGRAL INDEFINIDA[1] de** $f(x)$ y se representa por (*integral de f(x) diferencial de x*):

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \; ; C \in \mathbb{R}$$

Al número C, se le denomina **constante de integración**.

Hay que tener en cuenta que la integral indefinida de $f(x)$ es el conjunto de todas las funciones primitivas de $f(x)$.

 # Ejemplos.-

- *Si* $f(x)=3$ *, entonces,* $\int 3\,dx = 3x + C \; ; C \in \mathbb{R}$
- *Si* $f(x)=9x^2$ *, entonces,* $\int 9x^2\,dx = 3x^3 + C \; ; C \in \mathbb{R}$
- Dado que determinar primitivas de funciones es efectuar la operación inversa de la derivación, es inmediato comprobar algunos ejemplos como:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

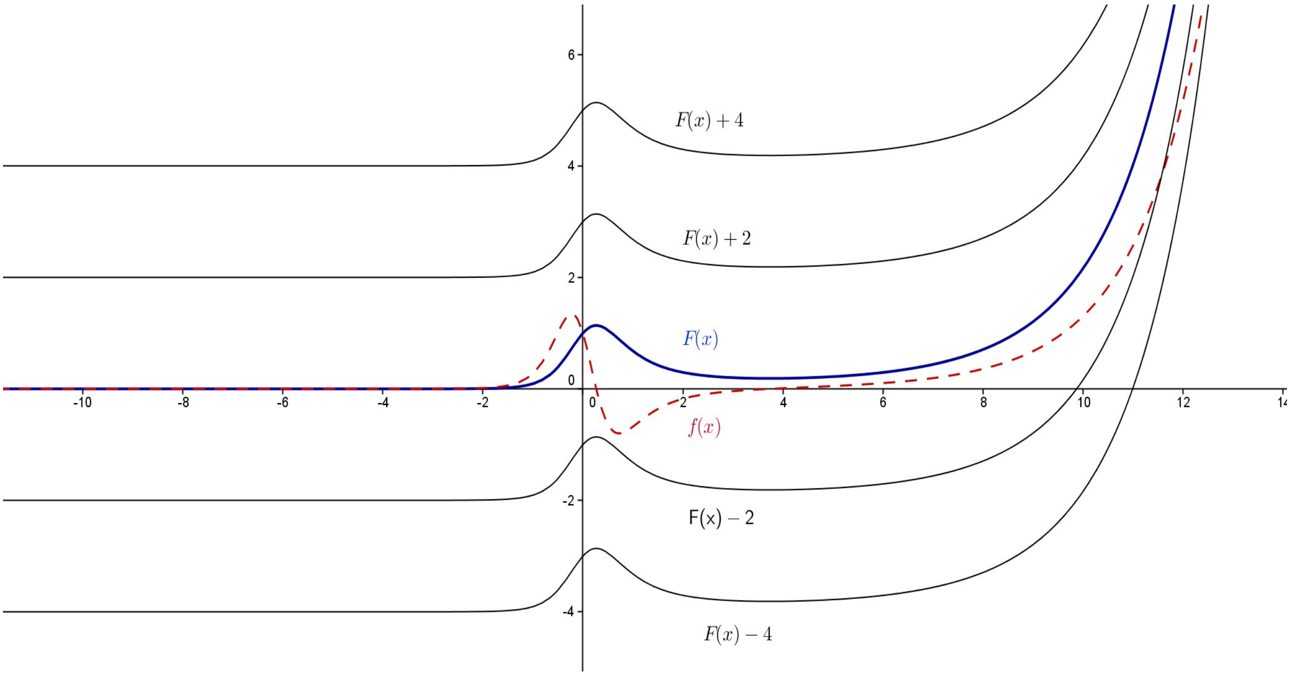
$$\int \cos x\,dx = sen\,x + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

1 *No hay que confundir los símbolos,* $\int f$ *con* $\int_a^b f$ *. El primero, designa el conjunto de todas las primitivas de f, mientras que el segundo(integral definida de f en el intervalo [a,b]), es un número real.*

2. Interpretación geométrica. Propiedades de la integral indefinida

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, la integral indefinida $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, serán infinitas traslaciones verticales de la función $F(x)$.



Si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ en un intervalo I, existe una única primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto (a, b).

 # Ejemplos.-

- *Hallar una primitiva* $F(x)$ *de* $f(x)=2x$ *cuya gráfica pase por el punto* $P(1,3)$.

  Las primitivas de $f(x)$ *son de la forma* $F(x)=x^2+C$. *Puesto que la primitiva pedida para por el punto* $P(1,3)$*, resulta:*

  $$f(1)=3 \Rightarrow 3=1+C \Rightarrow C=2$$

  Luego, la primitiva es

  $$F(x)=x^2+2$$

  ¿ Y si pasa por el origen?.

  Si pasara por el origen C sería 0, y la primitiva sería $F(x)=x^2$

- *Halla una recta (función lineal* $f(x)$ *) cuya pendiente es 2 y pasa por el punto* $P(0,4)$

  La derivada de la función lineal es su pendiente, por tanto, $f'(x)=2$*, luego*

  $$f(x)=2x+C$$

  Por pasar por el punto $P(0,4)$*, resulta que*

  $$4=C \Rightarrow f(x)=2x+4$$

Si $f(x)$ es una función derivable, se cumplen las siguientes propiedades

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

2. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C \qquad C \in \mathbb{R}$

 # Ejemplos:

1.- $\left(\int 3.x^2\,dx\right)' = \left(x^3 + C\right)' = 3.x^2$

2.- $\int \left(3.x^2\right)'.dx = \int 6.x.dx = 3.x^2 + C \qquad C \in \mathbb{R}$

<u>Propiedad lineal de la integración</u>

Si $a, b \in \mathbb{R}\ y\ f, g$ son funciones continuas definidas en un intervalo I, se cumple

$$\int (a.f(x) \pm b.g(x)).dx = a.\int f(x).dx \pm b.\int g(x).dx$$

 # Ejemplos:

1.- $\int 5.x^2\,dx = 5\int x^2\,dx = 5.\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = \frac{5.x^3}{3} + 5.C = \frac{5.x^3}{3} + K \qquad K \in \mathbb{R}$

2.- $4.\int x^3\,dx = \int 4.x^3\,dx = x^4 + C \qquad C \in \mathbb{R}$

3.- $\int (2x + \cos x)\,dx = \int 2x\,dx + \int \cos dx = x^2 + C_1 + sen\,x + C_2 = x^2 + sen\,x + C \qquad C \in \mathbb{R}$

4.- $\int \left(\frac{5}{x} + 4e^x\right)dx = 5\int \frac{1}{x}\,dx + 4\int e^x\,dx = 5\ln x + C_1 + 4e^x + C_2 = 5\ln x + 4e^x + C \qquad C \in \mathbb{R}$

5.- $\int \frac{x+1}{x}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = \int x\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = x + \ln x + C \qquad C \in \mathbb{R}$

6.- $\int \frac{2x^3 + x^2 - x}{x^2}\,dx = \int \left(2x + 1 - \frac{1}{x}\right)dx = x^2 + x - \ln x + C \qquad C \in \mathbb{R}$

3. Integrales inmediatas

Si tenemos en cuenta la tabla de derivadas estudiadas en el tema de funciones derivadas, y aplicamos de forma inversa estas derivadas, obtenemos la siguiente tabla:

Forma sencilla	Forma compuesta
$\int dx = x + C$	$\int k\,dx = k\,x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,(n \neq 1)$	$\int f'(x).f(x)^n dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C\,(n \neq 1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\|f(x)\| + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int f'(x).e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int f'(x).f'(x).a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
$\int sen\,x\,dx = -\cos x + C$	$\int f'(x).sen\,f(x)\,dx = -\cos f(x) + C$
$\int \cos x\,dx = sen\,x + C$	$\int f'(x).\cos f(x)\,dx = sen\,f(x) + C$
$\int (1+tg^2 x)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\,x + C$	$\int (1+tg^2 f(x)).f'(x)dx = \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = tg\,f(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx = Arcsen\,x + C = -\arccos x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-x^2}}.dx = Arcsen\,f(x) + C = -\arccos f(x) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}.dx = Arctg\,x + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}.dx = Arctg\,f(x) + C$

 # Ejemplos:

1.- $\int \frac{5}{x^2}.dx = 5\int x^{-2}.dx = -5.x^{-1} + C = -\frac{5}{x} + C \qquad K \in \mathbb{R}$

2.- $\int (5^x + 1).dx = \frac{5^x}{\ln 5} + x + C \qquad C \in \mathbb{R}$

Tipos fundamentales de integración

Tipo potencial ($a \neq 1$). Las funciones son de la forma $f(x)=x^a$ o $f(x)=k.x^a$.

Si $a=-1$ *, la integral de la función* $f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$ *no sigue la fórmula que vamos a ver.*

Casos particulares

- Si $f(x)=0 \Rightarrow F(x)=\int 0\,dx=C$ $\quad C \in \mathbb{R}$
- Si $f(x)=k\,,k\neq 0 \Rightarrow \int f(x)\,dx=k\,x+C$ $\quad C \in \mathbb{R}$

Forma simple: $y=x^a$ **(** $a\neq -1$ **)**

- Si $f(x)=x^a;(a\neq -1)\Rightarrow F(x)=\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$ $\quad C \in \mathbb{R}$

Forma compuesta: $y=f^a(x).f'(x)$ **(** $a\neq -1$ **)**

- Si $y(x)=f^a(x).f'(x);(a\neq -1)$
  $\Rightarrow F(x)=\int y(x)\,dx=\int f^a(x).f'(x)\,dx=\frac{f^{a+1}(x)}{a+1}+C$ $\quad C \in \mathbb{R}$

 # Ejemplos:

$$\int x^4\,dx=\frac{1}{5}x^5+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^4}dx=\int x^{-4}\,dx=\frac{x^{-3}}{(-3)}+C=-\frac{x^{-3}}{3}+C=\frac{1}{3x^3}+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx=\int x^{\frac{2}{3}}\,dx=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+C=\frac{3}{5}.x^{\frac{5}{3}}+C=\frac{3}{5}.\sqrt[3]{x^5}+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx=\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{2}.x^{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{2}.\sqrt[3]{x^2}+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int (x+1)^2\,dx=\frac{1}{3}.(x+1)^3+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int (2x+1).(x^2+x+1)^{30}\,dx=\frac{1}{31}.(x^2+x+1)^{31}+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int sen^3 x.\cos x\,dx=\frac{1}{4}.sen^4 x+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int tg^2 x \, . \, sec^2 x \, dx = \frac{1}{3} . tg^3 x + C \, ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos x \left(1 - sen^2 x\right) dx = \int \left(\cos x - sen^2 x \cos x\right) dx = sen \, x - \frac{1}{3} . sen^3 x + C \, ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int sen^3 x \, dx = \int sen \, x \left(1 - \cos^2 x\right) dx = \int \left(sen \, x - \cos^2 x \, sen \, x\right) dx = -\cos x + \frac{1}{3} . \cos^3 x + C \, ; C \in \mathbb{R}$$

Tipo logarítmico

Forma simple: $y = \frac{1}{x}$

★ Si $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \, ; C \in \mathbb{R}$

Forma compuesta: $y = \frac{f'(x)}{f(x)}$

★ Si $y(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow F(x) = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C \, ; C \in \mathbb{R}$

 # Ejemplos:

$$\int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx = 3 \ln|x| + C \, ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 5} dx = \ln|x^3 + x + 5| + C \, ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} . \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} . \ln|x^2 + 1| + C \, ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 8} dx = \frac{1}{3} . \int \frac{3x^2}{x^3 + 8} dx = \frac{1}{3} . \ln|x^3 + 8| + C \, ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int tg \, x \, dx = \int \frac{sen \, x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C \, ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int cotg \, x \, dx = \int \frac{\cos x}{sen \, x} dx = \ln|sen \, x| + C \, ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{sen \, 2x}{1 + sen^2 x} dx = \int \frac{2 \, sen \, x \cos x}{1 + sen^2 x} dx = \ln|1 + sen^2 x| + C \, ; C \in \mathbb{R}$$

Tipo exponencial

Forma simple: $y = e^x$; $y = a^x$

★ Si $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \, ; C \in \mathbb{R}$

✯ Si $f(x)=a^x \Rightarrow F(x)=\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \,;\, C \in \mathbb{R}$

Forma compuesta: $y(x)=e^{f(x)}.f'(x)$; $y(x)=a^{f(x)}.f'(x)$

✯ Si $y(x)=e^{f(x)}.f'(x) \Rightarrow F(x)=\int e^{f(x)}.f'(x)dx=e^{f(x)}+C \,;\, C \in \mathbb{R}$

✯ Si $y(x)=a^{f(x)}.f'(x) \Rightarrow F(x)=\int a^{f(x)}.f'(x).dx=\frac{a^{f(x)}}{\ln a}+C \,;\, C \in \mathbb{R}$

 # Ejemplos:

$$\int e^{2x+1}dx=\frac{1}{2}.\int e^{2x+1}.2\,dx=\frac{1}{2}.e^{2x+1}+C \,;\, C \in \mathbb{R}$$

$$\int 3^x dx=\frac{3^x}{\ln 3}+C \,;\, C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{3^x}{2^x}dx=\int \left(\frac{3}{2}\right)^x dx=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}+C \,;\, C \in \mathbb{R}$$

$$\int x.e^{x^2}dx=\frac{1}{2}.\int 2x.e^{x^2}dx=\frac{1}{2}.e^{x^2}+C \,;\, C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^{sen\,x}.\cos x\,dx=e^{sen\,x}+C \,;\, C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^{sen^2 x}.(sen\,2x)dx=\int e^{sen^2 x}.2.sen\,x.\cos x\,dx=e^{sen^2 x}+C \,;\, C \in \mathbb{R}$$

<u>**Tipo seno**</u>

Forma simple: $y=\cos x$

✯ Si $f(x)=\cos x \Rightarrow F(x)=\int \cos x\,dx=sen\,x+C \,;\, C \in \mathbb{R}$

Forma compuesta: $y(x)=\cos f(x).f'(x)$

✯ Si $y(x)=\cos f(x).f'(x) \Rightarrow F(x)=\int \cos f(x).f'(x)dx=sen\,f(x)+C \,;\, C \in \mathbb{R}$

 # Ejemplos:

$$\int \cos(2x)dx=\frac{1}{2}\int 2.\cos(2x)dx=\frac{1}{2}sen(2x)+C \,;\, C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos(2x+1)dx=\frac{1}{2}\int 2.\cos(2x+1)dx=\frac{1}{2}sen(2x+1)+C \,;\, C \in \mathbb{R}$$

$$\int x.\cos(x^2+1)dx=\frac{1}{2}\int 2x.\cos(x^2+1)dx=\frac{1}{2}sen(x^2+1)+C \,;\, C \in \mathbb{R}$$

$$\int (2x+1).\cos(x^2+x+1)dx = sen(x^2+x+1)+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \int \cos(\ln x).\frac{1}{x}dx = sen(\ln x)+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x.\cos(e^x)dx = sen(e^x)+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int 3.x^2.\cos(x^3+9)dx = sen(x^3+9)+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^2.\cos(x^3+1)dx = \frac{1}{3}\int 3.x^2.\cos(x^3+1)dx = \frac{1}{3}sen(x^3+1)+C\,;C \in \mathbb{R}$$

Tipo coseno

Forma simple: $y = sen\, x$

✯ Si $f(x) = sen\, x \Rightarrow F(x) = \int sen\, x\, dx = -\cos x + C\,;C \in \mathbb{R}$

Forma compuesta: $y(x) = sen\, f(x).f'(x)$

✯ Si $y(x) = sen\, f(x).f'(x) \Rightarrow F(x) = \int sen\, f(x).f'(x)dx = -\cos f(x)+C\,;C \in \mathbb{R}$

 # Ejemplos:

$$\int sen(2x)dx = \frac{1}{2}\int 2.sen(2x)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x)+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int sen(2x+6)dx = \frac{1}{2}\int 2.sen(2x+6)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+6)+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int x.sen(x^2+3)dx = \frac{1}{2}\int 2x.sen(x^2+3)dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2+3)+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int (2x+1).sen(x^2+x+1)dx = -\cos(x^2+x+1)+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{sen(\ln x)}{x}dx = \int sen(\ln x).\frac{1}{x}dx = -\cos(\ln x)+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x.sen(e^x)dx = -\cos(e^x)+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int sen 5x\, dx = \frac{1}{5}\int 5\, sen 5x\, dx = -\frac{\cos 5x}{5}+C\,;C \in \mathbb{R}$$

$$\int sen(7x+8)dx = \frac{1}{7}\int 7.sen(7x+8)dx = -\frac{1}{7}\cos(7x+8)+C\,;C \in \mathbb{R}$$

Tipo tangente

Forma simple: $y = sec^2 x$

✯ Si $f(x) = sec^2 x \Rightarrow F(x) = \int sec^2 x\, dx = tg\, x + C\,;C \in \mathbb{R}$

Forma compuesta: $y(x)=sec^2 f(x).f'(x)$

Si $y(x)=sec^2 f(x).f'(x) \Rightarrow F(x)=\int sec^2 f(x).f'(x)\,dx=tg\, f(x)+C\,;C\in\mathbb{R}$

 # Ejemplos:

$$\int 3\,sec^2 x\,dx=3\int sec^2 x\,dx=3\,tg\,x+C\,;C\in\mathbb{R}$$

$$\int \frac{7}{\cos^2 x}x\,dx=7\int sec^2 x\,dx=7\,tg\,x+C\,;C\in\mathbb{R}$$

$$\int (5+5\,tg^2 x)\,dx=5\int (1+tg^2 x)\,dx=5\,tg\,x+C\,;C\in\mathbb{R}$$

$$\int 3\,x^2.Sec^2(x^3+9)\,dx=tg\,(x^3+9)+C\,;C\in\mathbb{R}$$

$$\int sec^2(2\,x+1)\,dx=\frac{1}{2}\int 2.sec^2(2\,x+1)\,dx=\frac{1}{2}tg\,(2\,x+1)+C\,;C\in\mathbb{R}$$

$$\int sec^4 x\,dx=\int (1+tg^2 x)\,sec^2 x\,dx=\int (sec^2 x+tg^2 x\,sec^2 x)\,dx=tg\,x+\frac{1}{3}.tg^3 x+C\,;C\in\mathbb{R}$$

$$\int tg^2 x\,dx=\int (1+tg^2 x-1)\,dx=tg\,x-x+C\,;C\in\mathbb{R}$$

4. Integración por sustitución o cambio de variable

Este método es consecuencia de la derivación de funciones compuestas. Se trata de sustituir en la función $f(x)$ la variable x por otra función de variable t , $x=x(t)$ (*derivable e invertible, y con derivada no nula*) tal que $f(x)=f(x(t))$, y podamos integrar más fácilmente $f(x)$, mediante los siguiente pasos

a) Sustitución de la variable x por t

Forma directa: Si $f(x)=f(x(t)) \Rightarrow \int f(x)dx=\int f(x(t))x'(t)dt$

Forma recíproca: Si $f(t)=f(t(x)) \Rightarrow \int f(t)dt=\int f(t(x))t'(x)dx$

b) Integración de la nueva función en t

Si la nueva función obtenida de variable t (*o x en forma recíproca*) es más sencilla, se integrar. En caso contrario, hay que elegir otra sustitución más adecuada.

c) Sustitución de la variable t por x

Una vez calculada la integral en t (*o x en forma recíproca*) se deshace el cambio.

Es decir:

$$\int f(x)dx=\int f(x(t)).x'(t).dt=F(t)+C=F(x^{-1}(t))+C$$

 # Ejemplos:

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x=t^2 \\ dx=2t\,dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int \frac{\cos t}{t}2t\,dt=2.\int \cos t\,dt=2\,sen\,t+C=2\,sen\sqrt{x}+C\;;C\in\mathbb{R}$$

$$\int 2x.(x^2+5)^{25}dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} t=x^2+5 \\ dt=2x\,dx \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int t^{25}\,dt=\frac{1}{26}(x^2+5)^{26}+C\;;C\in\mathbb{R}$$

5. Integración por partes

La integral de un producto, método de integración por partes se basa en la derivada de un producto de funciones. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables ó u y v funciones diferenciables, haciendo $f(x)=u$ y $g(x)=v$, mediante el siguiente proceso, resumido:

	Forma con derivadas	**Forma con diferenciales**
Derivando o Diferenciando	$(f\,g)'=f\,g'+g\,f'$	$d(uv)=u\,dv+v\,du$
Integrando	$f\,g=\int f\,g'+\int g\,f'$	$u\,v=\int u\,dv+\int v\,du$
Despejando	$\int f\,g'=f\,g-\int g\,f'$	$\int u\,dv=u\,v-\int v\,du$

 # Ejemplos:

$$\int x\,.\,e^x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=e^x\,dx \Rightarrow v=e^x \end{matrix}\right\}=x\,.\,e^x-\int e^x\,dx=x\,e^x-e^x+C\,;C\in\mathbb{R}$$

$$\int x\cos x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=\cos x\,dx\Rightarrow v=sen\,x \end{matrix}\right\}=x\,.\,sen\,x-\int sen\,x\,dx=x\,sen\,x+\cos x+C\,;C\in\mathbb{R}$$

$$\int \ln x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx\Rightarrow v=x \end{matrix}\right\}=(\ln x)\,.\,x-\int x\,.\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C\,;C\in\mathbb{R}$$

$$\int \ln(x+1)\,dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln(x+1)\Rightarrow du=\frac{1}{x+1}dx \\ dv=dx\Rightarrow v=x \end{matrix}\right\}=x.\ln(x+1)-\int x\,.\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=x\,.\ln(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=x\,.\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C\,;C\in\mathbb{R}$$

$$\int x^2.\,Sen\,x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=x^2\Rightarrow du=2x\,dx \\ dv=sen\,x\,dx\Rightarrow v=-\cos x \end{matrix}\right\}=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx=$$

$$=-x^2\cos x+\left\{\begin{matrix} u=2x\Rightarrow du=2\,dx \\ dv=\cos x\,dx\Rightarrow v=sen\,x \end{matrix}\right\}=-x^2\cos x+2x\,sen\,x-\int 2\,sen\,x\,dx=$$

$$=x^2\cos x+2x\,sen\,x+2\cos x+C\,;C\in\mathbb{R}$$

$$\int e^x.\cos x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=e^x\Rightarrow du=e^x\,dx \\ dv=\cos x\,dx\Rightarrow v=sen\,x \end{matrix}\right\}=e^x\,sen\,x-\int e^x\,sen\,x\,dx=$$

$$=e^x\,sen\,x+\left\{\begin{matrix} u=e^x\Rightarrow du=e^x\,dx \\ dv=sen\,x\,dx\Rightarrow v=(-\cos x) \end{matrix}\right\}=e^x\,sen\,x+e^x.\cos x-\int e^x\cos x\,dx$$

que reagrupando términos, obtenemos

$$2\int e^{x.}\cos x\,dx=e^x.\,sen\,x+e^x.\cos x\Rightarrow\int e^{x.}\cos x\,dx=\frac{1}{2}.(e^x.\,sen\,x+e^x.\cos x)+C\,;C\in\mathbb{R}$$

6. Integración de funciones racionales (*raíces reales simples y múltiples*)

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios con coeficientes reales, si $grado\,P(x)\geq grado\,Q(x)$, existirá dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$, con $grado\,C(x)<grado\,P(x)$ y $grado\,R(x)<grado\,Q(x)$ tal que:

$$P(x)=C(x).Q(x)+R(x)\Rightarrow\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

Y se cumplirá

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int C(x)dx.+\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

$\int C(x)dx.$ se puede integrar por los métodos estudiados anteriormente.

Para integrar $\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$, si $Q(x)$ tiene p raíces reales (x_1 *de multiplicidad* $m(1)$, ... , x_p *de multiplicidad* $m(p)$). Es decir:

$$Q(x)=a.\prod_{r=1}^{p}(x-x_r)^{m_r}\quad\text{, donde}\quad grado(Q(x))=\sum_{r=1}^{p}m_r$$

Luego, existirán las constantes reales

$$A_{r1},A_{r2},....,A_{rm(r)};r=1,2,...,p$$

tales que

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\sum_{r=1}^{p}\left[\frac{A_{r1}}{x-x_r}+...+\frac{A_{rm(r)}}{(x-x_r)^{m(r)}}\right]$$

Y todos los términos de la descomposición se integran fácilmente, teniendo en cuenta:

$$\int\frac{A_{rm(r)}}{(x-x_r)^{m(r)}}=\begin{cases}A_{rm(r)}.\ln|x-x_r|+K & Si\,m(r)=1\\ \dfrac{(-A_{rm(r)})}{(m(r)-1).(x-x_r)^{m(r)-1}}+K & Si\,m(r)>1\end{cases}$$

 # Ejemplos:

- $$\int\frac{4x^2+8x+6}{x^3+2x^2-x-2}dx=\int\frac{3}{x-1}dx+\int\frac{-1}{x+1}dx+\int\frac{2}{x+2}dx=$$
  $$=3\ln|x-1|-\ln|x+1|+2.\ln|x+2|+K$$
- $$\int\frac{5x-8}{x^2-3x+2}dx=\int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{3}{x-1}dx=2\ln|x-2|+3.\ln|x-1|+K$$

- $$\int \frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1}dx=\int \frac{2}{(x-1)^2}dx+\int \frac{1}{(x-1)^3}dx=-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2.(x-1)^2}+K$$
- $$\int \frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}dx=\int \frac{1}{x+1}dx+\int \frac{-1}{x-1}dx+\int \frac{5}{(x-1)^2}dx=$$ $$=\ln|x+1|-\ln|x-1|-\frac{5}{x-1}+K$$