Setelah kemarin kita mempelajari masalah PL metode grafik beserta 3 metode penyelesaiannya, maka sekarang kita akan mempelajari beberapa kejadian yang mungkin terjadi dalam masalah PL dengan metode grafik. Kita juga akan mempelajari masalah PL bilangan bulat, yang masalah real dalam kehidupan sehari-hari banyak kita jumpai.

Mari kupas kedua masalah tersebut.

A. Beberapa Kejadian Penyelesaian

Ada 5 kejadian khusus yang akan kita pelajari kali ini, yaitu:

1. Ada Pilihan Penyelesaian
2. Soal Tidak Layak
3. Penyelesaian Tak Terbatas
4. Kendala Berlebihan
5. Merosot / Degenerasi

Contoh-contoh dan latihan sebelumnya memperlihatkan soal-soal yang mempunyai satu penyelesaian optimum. Berikut ini akan dibahas beberapa kejadian penyelesaian yang lain.

1. Ada Pilihan Penyelesaian

Contoh 1.

Mencari u, v tak negatif yang memenuhi:

$2u - v \leq 4$ (1)

$3u + v \leq 11$ (2)

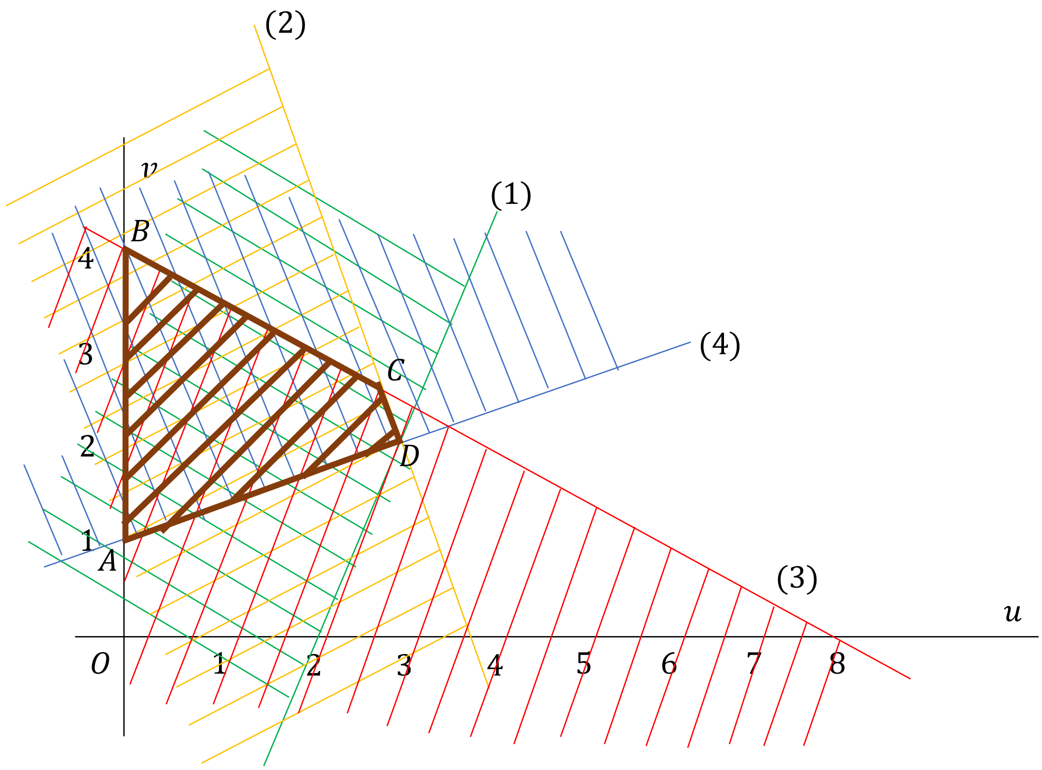
$u + 2v \leq 8$ (3)

$-u + 3v \geq 3$ (4)

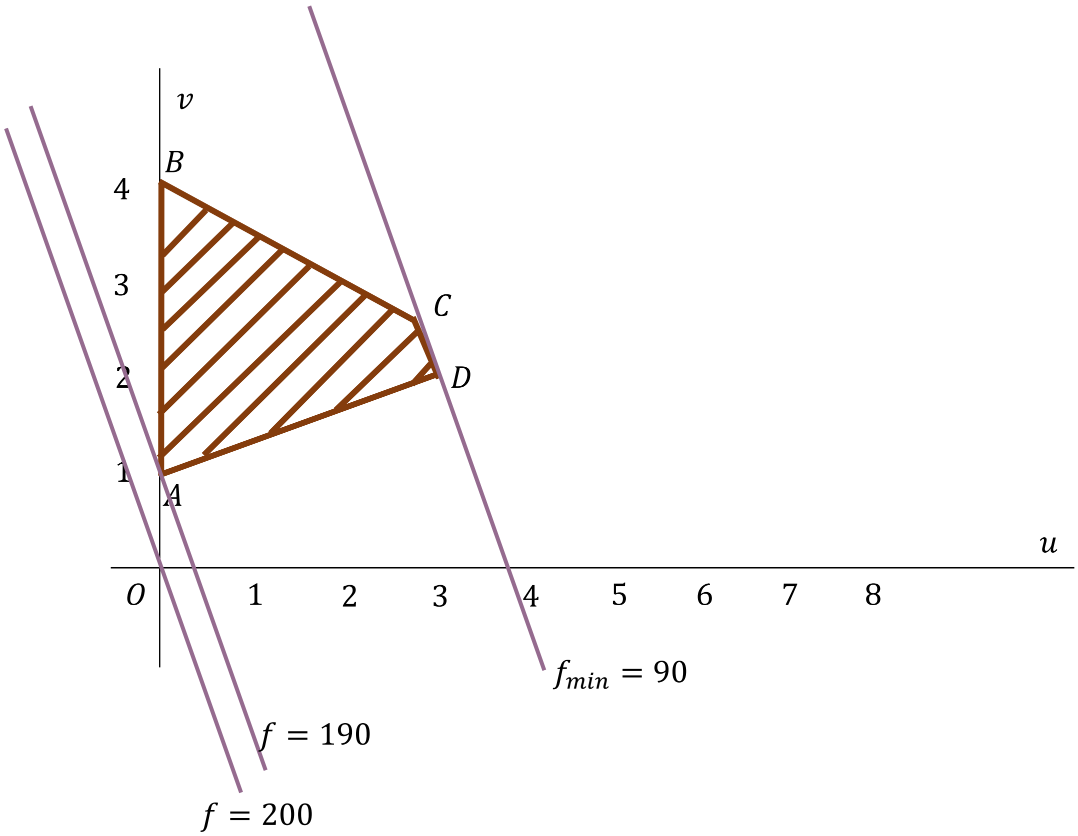
dan meminimumkan $f(u, v) = 200 - 30u - 10v$.

Penyelesaian:

Irisan enam kendala menghasilkan daerah layak F berupa daerah $ABCD$.



Daerah layak adalah daerah segiempat $ABCD$. Dengan melukis dua garis selidik $f = 200$ dan $f = 190$ diketahui bahwa nilai f mengecil bila garis senilai digeser ke kanan dan f mencapai minimum bila garis senilai melalui titik C dan titik D sekaligus.



Hal ini terjadi karena gradien garis senilai sama dengan gradien $\overline{CD}$ ialah -3. Disimpulkan bahwa semua titik pada $\overline{CD}$ merupakan titik optimum dan dikatakan bahwa soal di atas mempunyai pilihan (alternatif) penyelesaian optimum. Semua PO tersebut memberikan nilai program yang sama ialah $f_{min} = 90$. Nilai 90 ini dapat diperoleh dengan memasukkan koordinat $D(3,2)$ atau koordinat $C\left(\frac{14}{5}, \frac{13}{5}\right)$ ke dalam fungsi sasaran. Sifat yang menunjang hal tersebut adalah, "Bila dua titik merupakan titik optimum suatu soal program linear maka setiap kombinasi konveksnya juga akan merupakan titik optimum bagi soal tersebut".

Dalam praktek bila ada pilihan PO maka dapat ditambahkan kendala atau pertimbangan tambahan sehingga akan terpilih satu PO saja yang akan digunakan.

2. Soal Tidak Layak

Contoh 2.

Mencari x, y yang memenuhi:

$x \geq 0$ (1)

$y \geq 0$ (2)

$x + 4y \leq 4$ (3)

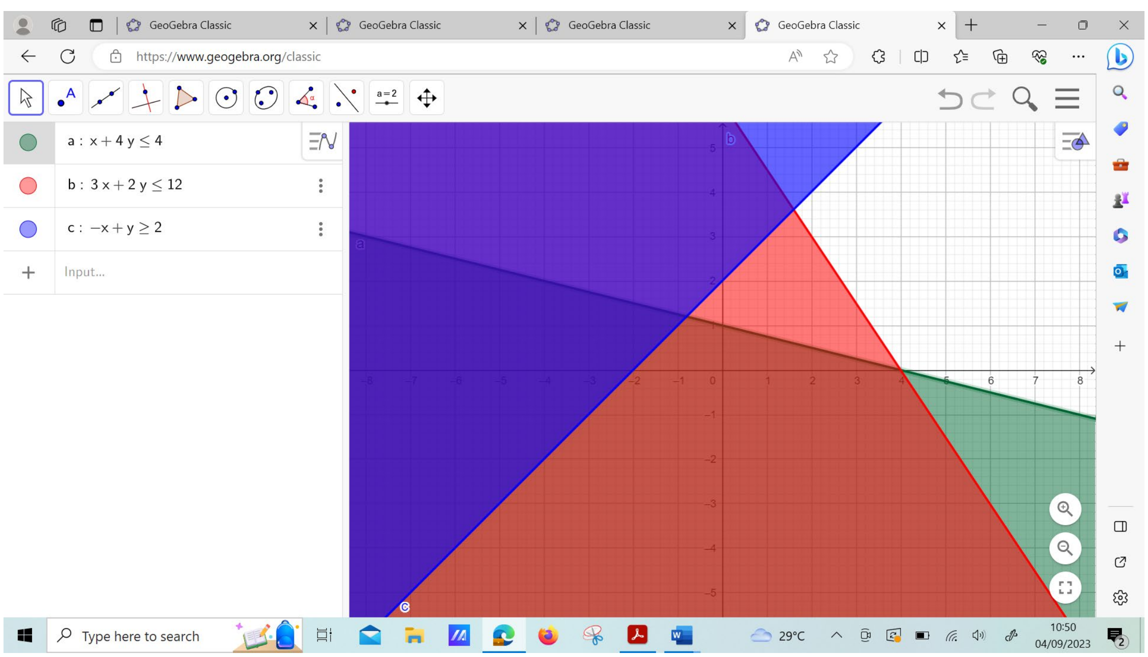
$3x + 2y \leq 12$ (4)

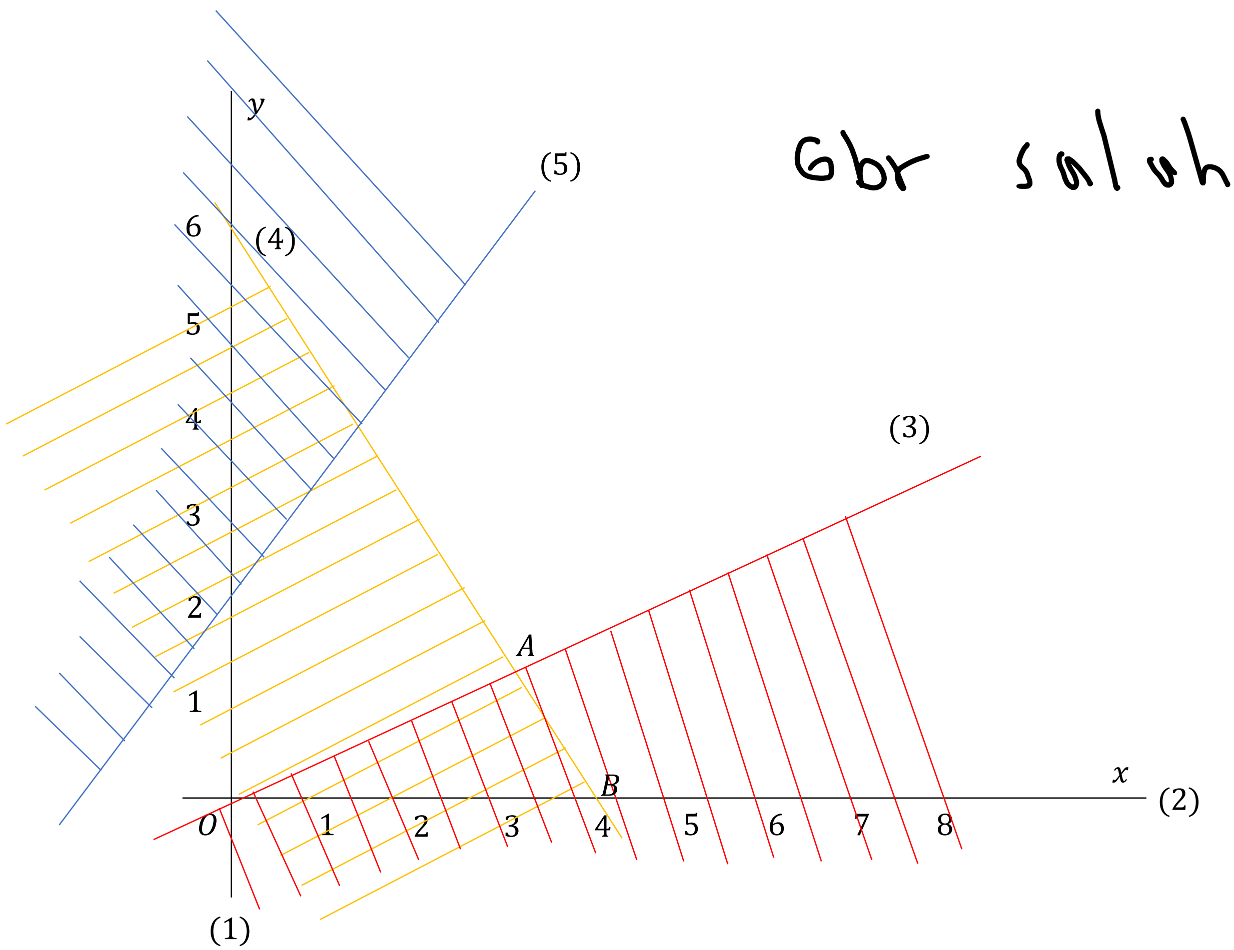
$-x + 2y \geq 2$ (5)

dan meminimumkan $f(x, y) = 40x - 10y$.

Penyelesaian:

Setelah batas-batas kendala ditulis dan semua setengah bidang yang sesuai ditandai, dicari irisan kelima setengah bidang kendala.





Himpunan titik yang memenuhi (1), (2), (3), dan (4) adalah daerah segitiga OAB. Daerah ini diiriskan lagi dengan setengah bidang (5) dan ternyata irisannya berupa himpunan kosong sehingga tidak terdapat titik layak, berarti tidak ada penyelesaian layak dan tidak ada penyelesaian optimum karena penyelesaian optimum harus layak. Dalam hal ini dikatakan bahwa soalnya tidak layak (infisibel).

3. Penyelesaian Tak Terbatas

Contoh 3.

Mencari x dan y yang memenuhi:

$$-x + 2y \leq 4$$

$2x + y \geq 12$

$x + 2y \geq 8$

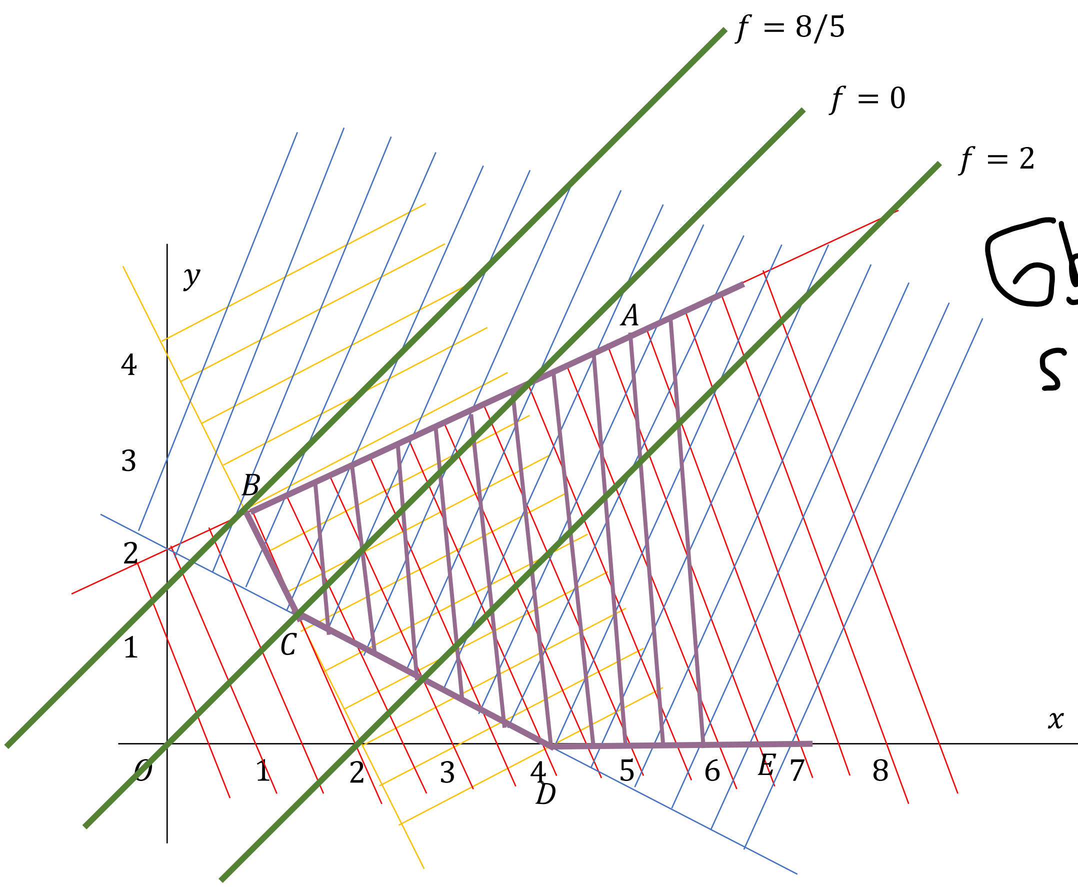
$x \geq 0$

$y \geq 0$

dan a. memaksimumkan $f(x, y) = -x + y$.

b. meminimumkan $f(x, y) = -x + y$.

Penyelesaian:

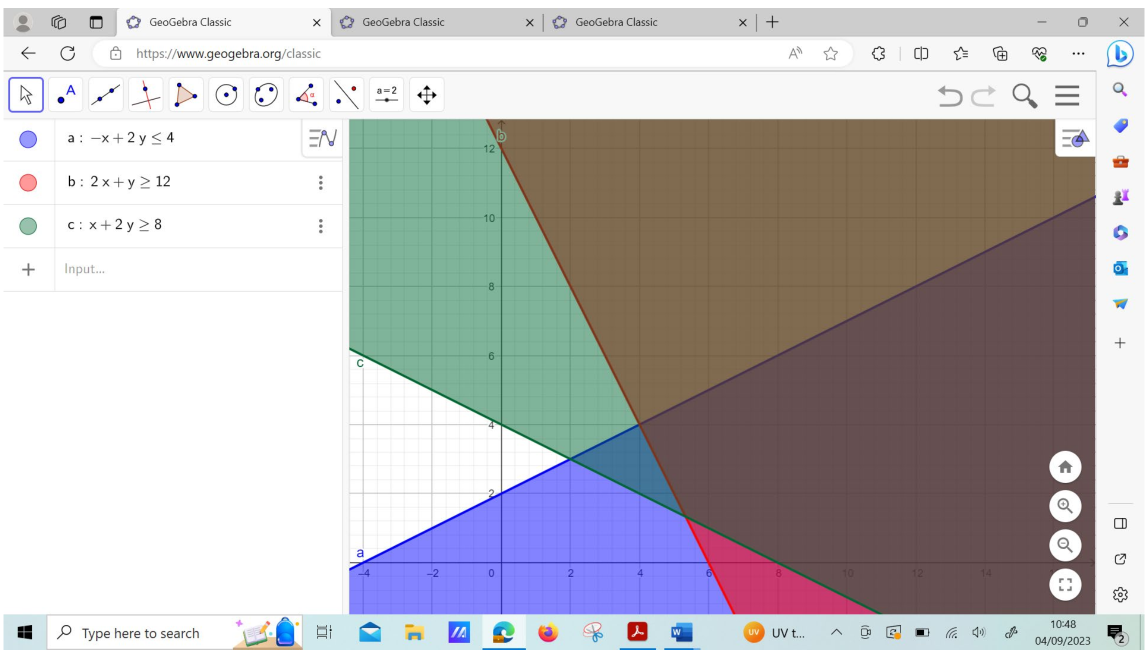


Gbr salah

Daerah layak soal ini ternyata merupakan daerah yang melebar ke tak hingga ialah daerah $ABCDE$. Daerah layak ini tak terbatas. Dilukis dua garis selidik, misalnya $f = 0$ melalui $O(0,0)$) dan $f = -2$ (melalui $P(2,0)$).

Ternyata nilai f membesar bila garis senilai digeser ke kiri (dan mengecil bila digeser ke kanan), maka untuk menjawab soal a. garis senilai digeser ke kiri dan menghasilkan titik maksimum $B\left(\frac{4}{5},\frac{12}{5}\right)$ dengan nilai program $f_{min} = \frac{8}{5}$.

Sekarang untuk menjawab soal b. garis senilai digeser ke kanan. Tetapi karena daerah layak membentang ke kanan sampai ke tak hingga maka penggeseran garis senilai tidak akan berhenti, berarti nilai f menghampiri negatif tak hingga, sehingga tidak ada f minimum. Dalam hal ini dikatakan bahwa soal b. tidak mempunyai PO karena penyelesaiannya tak terbatas (unbounded).



Catatan

Dari contoh di atas jelas bahwa meskipun daerah layaknya tak terbatas belum tentu penyelesaiannya juga tak terbatas. Ada tidaknya penyelesaian optimum masih tergantung kepada arah penggeseran garis senilai.

4. Redundancy / Kendala yang berlebihan

Pada suatu masalah PL seringkali terjadi terdapat adanya kendala yang adanya kendala tersebut tidak mempengaruhi daerah layak yang ada. Adanya kendala tersebut mendukung terciptanya daerah layak, namun tidak adanya kendala tersebut juga tidak mempengaruhi daerah layak yang diperoleh. Kendala demikian disebut sebagai kendala berlebih atau redundant. Kendala redundant bisa kita abaikan dalam penentuan daerah layaknya. Bisa dilihat pada contoh berikut.

Contoh:

Memaksimumkan $f(x, y) = 2x + 3y$

dengan kendala $x + 2y \leq 6$

$x + y \leq 2$

$x \geq 0$ dan $y \geq 0$.

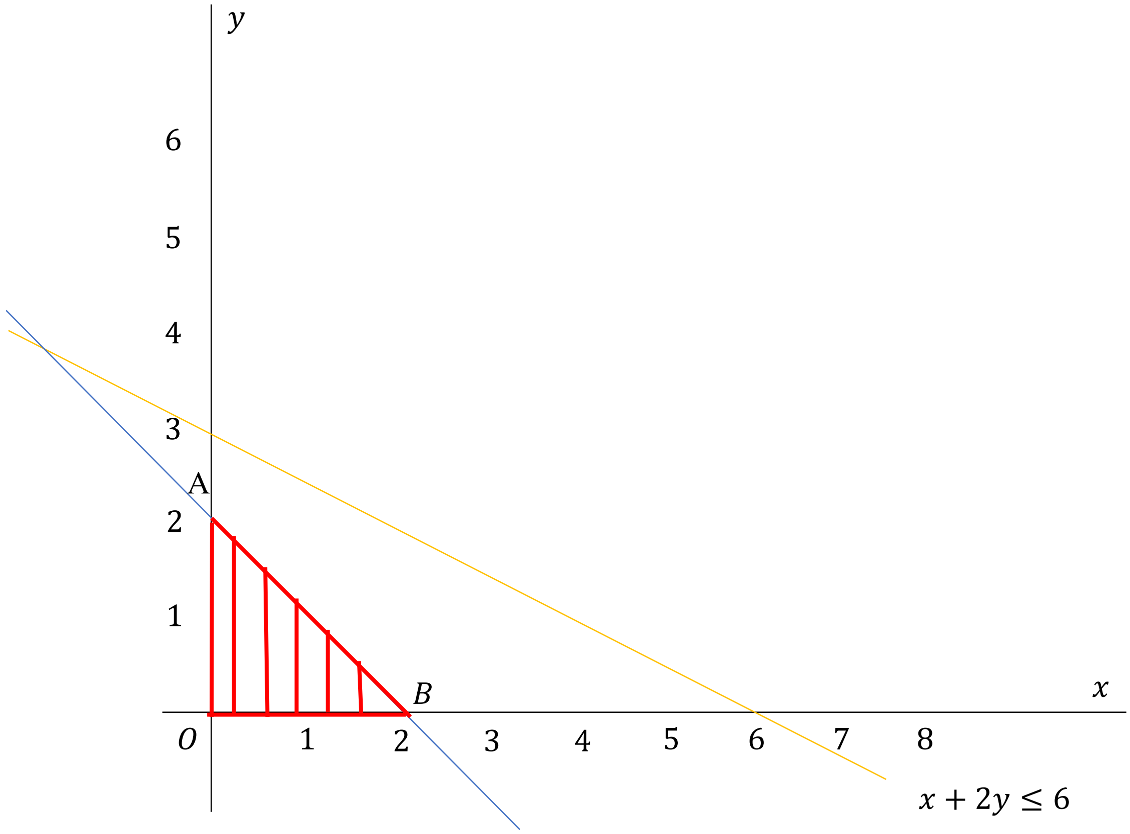
Jawab:

$x + 2y = 6$

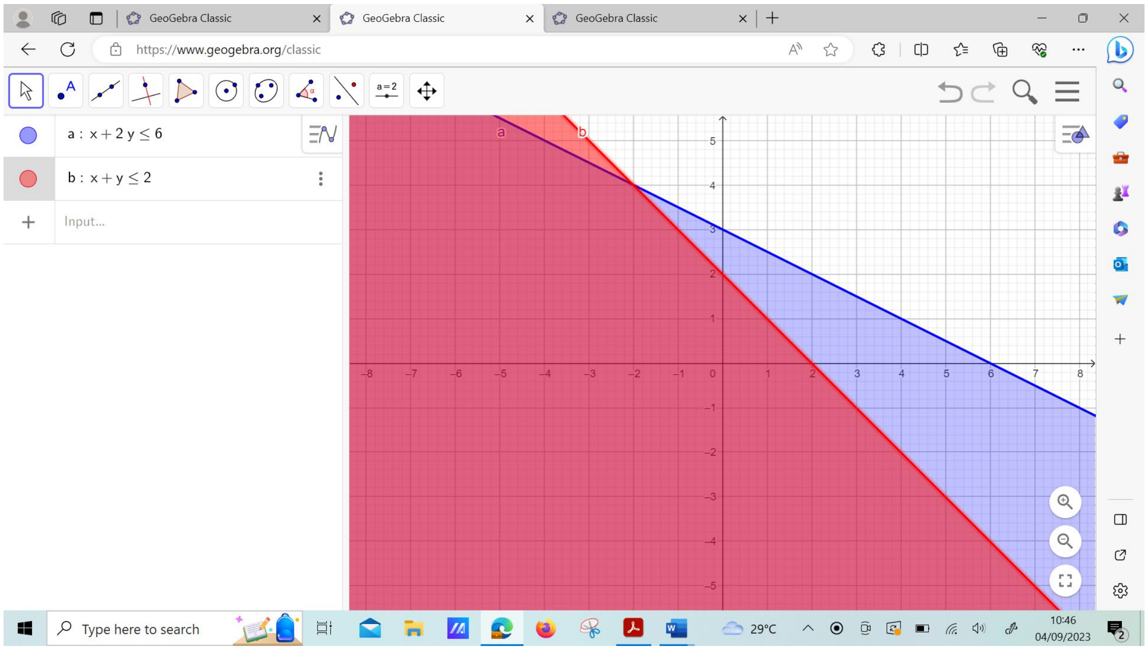
x	0	6
y	3	0

$x + y = 2$

x	0	2
y	2	0



Dari gambar tersebut terlihat bahwa daerah layak dibatasi oleh kendala $x + y \leq 2$, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, sedangkan kendala $x + 2y \leq 6$ tidak mempengaruhi daerah layak sehingga ada kendala berlebih. Jadi PL tersebut *redundancy* / kelebihan.



5. *Degeneracy* / Merosot

Karakteristik dimana jumlah variabel positif atau variabel basis lebih kecil dari jumlah kendalanya disebut sebagai peristiwa degenerasi.

Contoh:

Memaksimumkan $f(x, y) = 5x + 8y$

dengan kendala $4x + 6y \leq 24$ (1)

$2x + y \leq 18$ (2)

$3x + 9y \leq 36$ (3)

$x \geq 0$ dan $y \geq 0$.

Jawab:

$4x + 6y = 24$

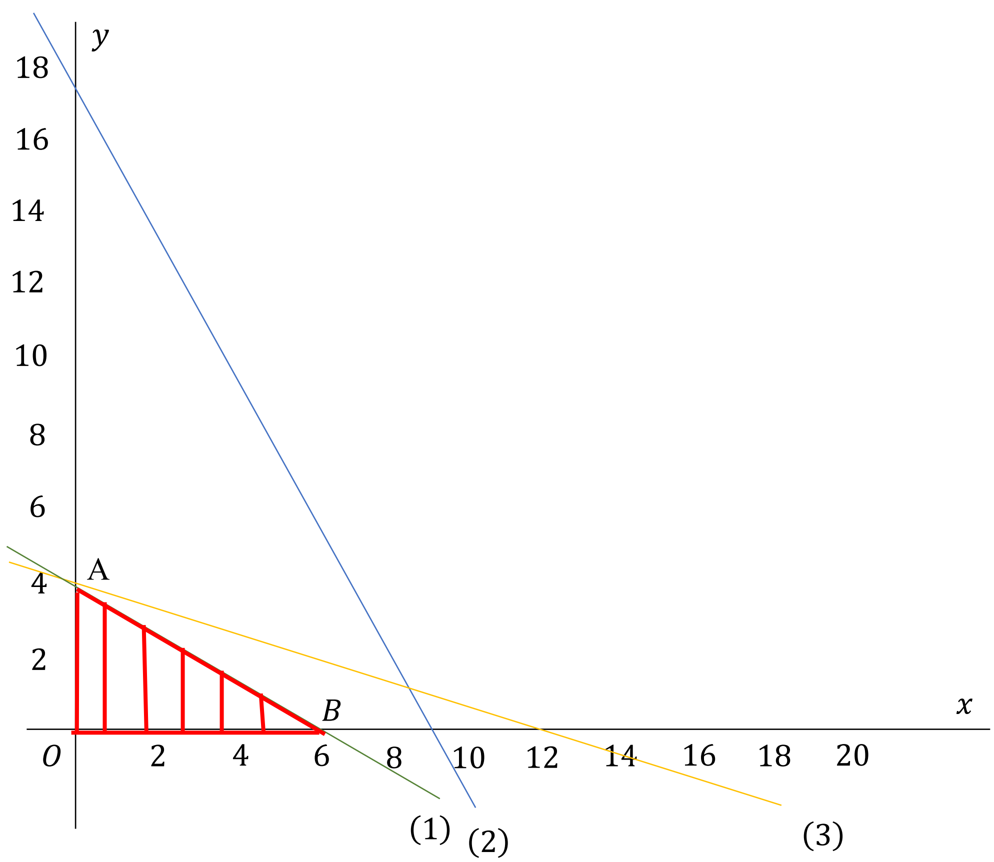
x	0	6
y	4	0

$2x + y = 18$

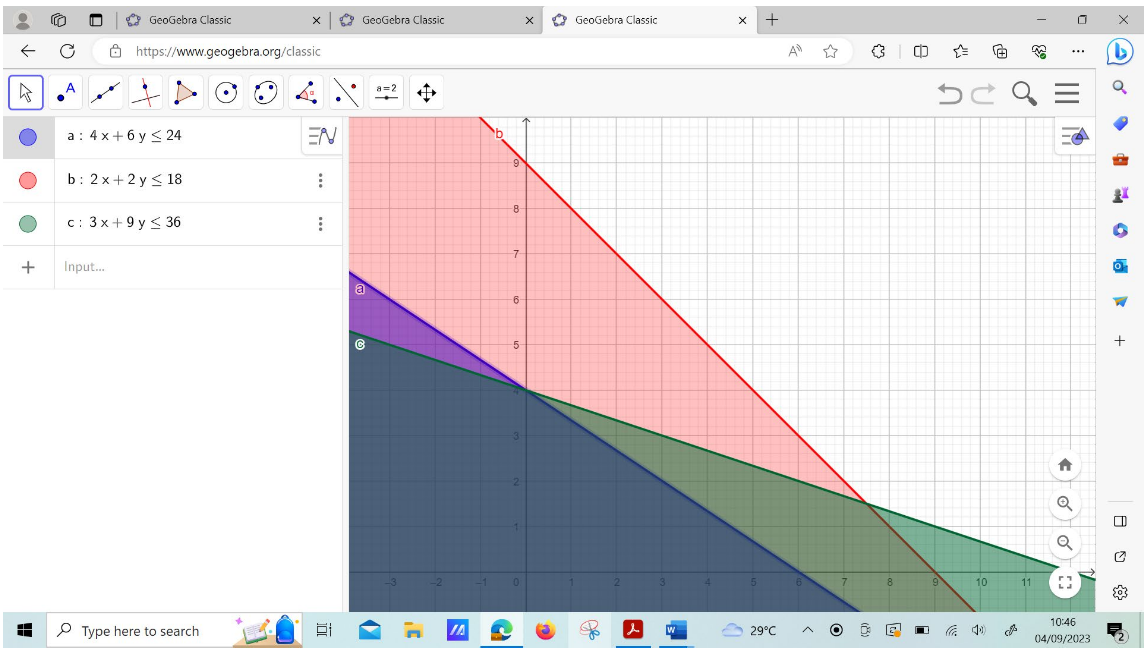
x	0	9
y	18	0

$3x + 9y = 36$

x	0	12
y	4	0



Soal ini memuat lima kendala yaitu tiga kendala utama dan dua kendala tak negatif. Irisan kelima setengah bidang yang bersesuaian menghasilkan daerah layak OAB. Perhatikan dua buah batas kendala yaitu kendala (1) dan kendala (3), kedua kendala tersebut sama-sama melalui satu titik sudut yaitu $A(0,4)$. Sehingga, masalah PL tersebut merosot / *degeneracy*. Selain itu kendala (2) juga menunjukkan adanya kelebihan kendala.



Inilah kasus-kasus khusus yang mungkin terjadi dalam masalah PL. Selanjutnya akan kita pelajari masalah program bilangan bulat.

B. Program Bilangan Bulat

Sebagai ilustrasi, seringkali kita dapati masalah sehari-hari yang satuan masalahnya harus berupa nilai bulat. Misalnya, produksi tas, produksi sepatu, dsb. Maka untuk masalah serupa ini, kita berhadapan dengan masalah program bilangan bulat. Ada sedikit perbedaan antara masalah PL dengan masalah PL bilangan bulat, mulai dari pemodelannya, hingga penyelesaiannya. Untuk penyelesaiannya akan kita pelajari dua metode, yaitu

1. Metode Bujursangkar / Metode Titik Lantai dan Titik Langit-langit
2. Metode Branch and Bound

Untuk pertemuan ini akan kita bahas metode pertama.

Contoh: (Agen Mobil)

Setiap semester seorang agen mobil Koyota memesan dagangan dari pusatnya yang berupa sedan (S) dan van (V) yang berturut-turut memberi laba kepadanya sebesar 5 juta dan $3\frac{1}{2}$ juta per unitnya yang terjual. Kantor pusat mengharuskan agen untuk memesan S paling sedikit 20% dari seluruh pesanan. Ditempat agen, luas ruang pamer (show room) sekaligus gudang hanya cukup untuk 10 buah S saja atau untuk 15 buah V saja.

Dalam keadaan demikian berapa S dan berapa V sebaiknya dipesan (per semester) bila diketahui bahwa pada akhir semester dagangan lama pasti habis terjual dan agen ingin memaksimumkan laba total?

Perumusan

Dimisalkan s: banyak unit S yang dipesan,

v: banyak unit V yang dipesan.

Syarat dari pusat dapat ditulis

$s \geq \frac{1}{5}(s+v)$ atau $4s - v \geq 0$.

Untuk merumuskan kendala luas tempat, misalkan

L : luas ruang pamer,

L_s : luas lantai yang diperlukan bagi 1 unit S,

L_v : luas lantai yang diperlukan bagi 1 unit V.

Terdapat hubungan $L_s = \frac{1}{10}L$

$$L_v = \frac{1}{15}L.$$

Luas total yang diperlukan untuk s unit S dan v unit V tidak boleh melebihi L, jadi

$$s\left(\frac{L}{10}\right) + v\left(\frac{L}{15}\right) \leq L$$

atau $\frac{s}{10} + \frac{v}{15} \leq 1$

atau $3s + 2v \leq 30$.

Laba total yang harus dimaksimumkan adalah

$5s + \frac{6}{10}v$ (dalam juta rupiah)

Perumusan masalah menjadi

Mencari s dan v yang memenuhi

$4s - v \geq 0$ (1)

$3s + 2v \leq 30$ (2)

$s \geq 0$ (3)

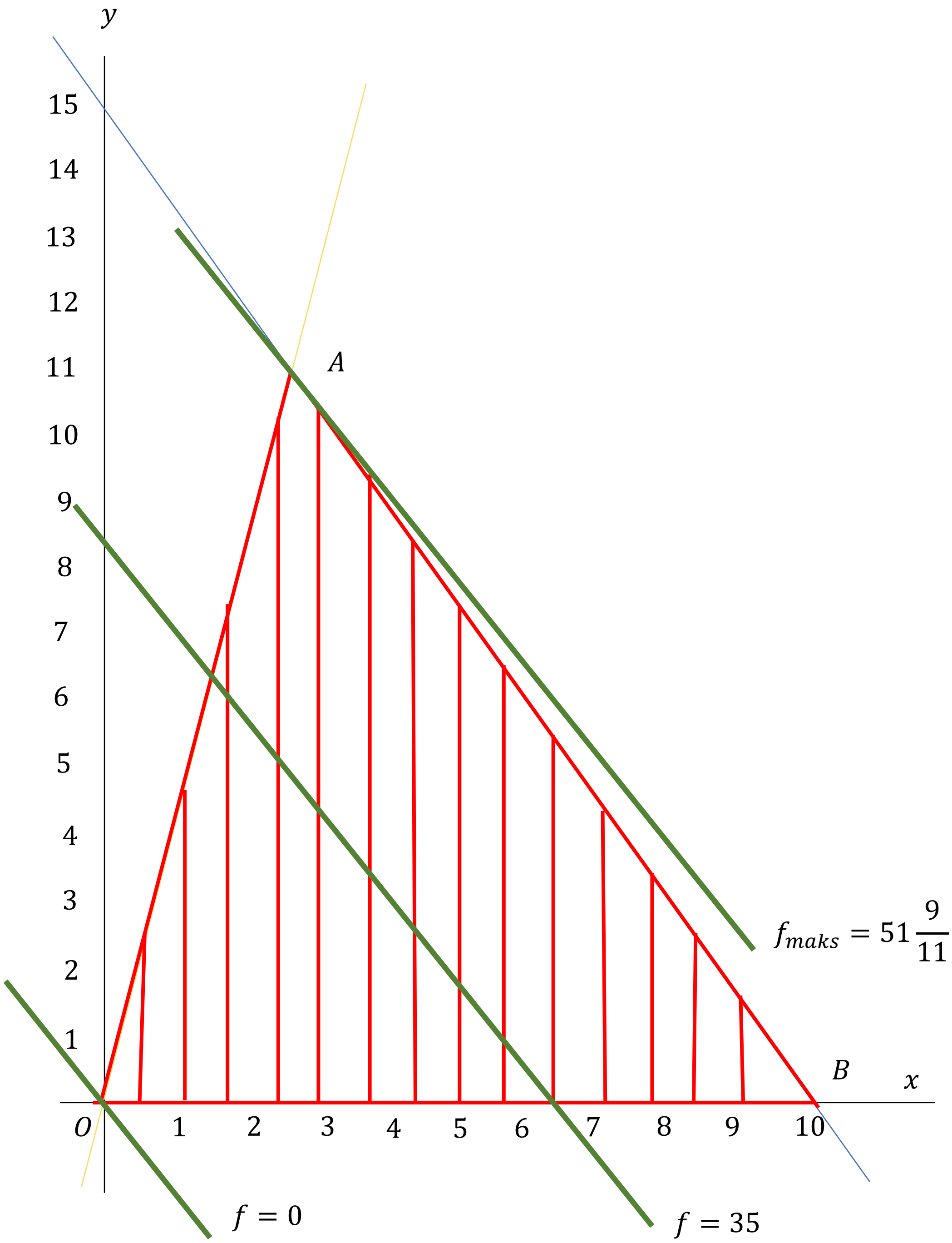
$v \geq 0$ (4)

dan memaksimumkan $f(s, v) = 5s + \frac{6}{10}v$.

Penyelesaian:

Setelah batas-batas kendala dan daerah yang memenuhi ditandai maka diperoleh daerah layak berupa daerah segitiga OAB Gambar a. Dari kedua garis selidik $f = 0$ dan $f = 35$

diketahui bahwa garis senilai harus digeser ke kanan sehingga memberikan titik B sebagai titik optimumnya.



Lagi-lagi diperlukan penyelidikan lewat gradien untuk menentukan bahwa titik B titik optimumnya dan bukan titik A, sebab garis senilainya hampir sejajar dengan batas kendala (2) sebagai berikut.

Gradien batas kendala (2), $m_2 = -\frac{3}{2}$.

Gradien garis senilai, $m_f = -\frac{10}{7}$.

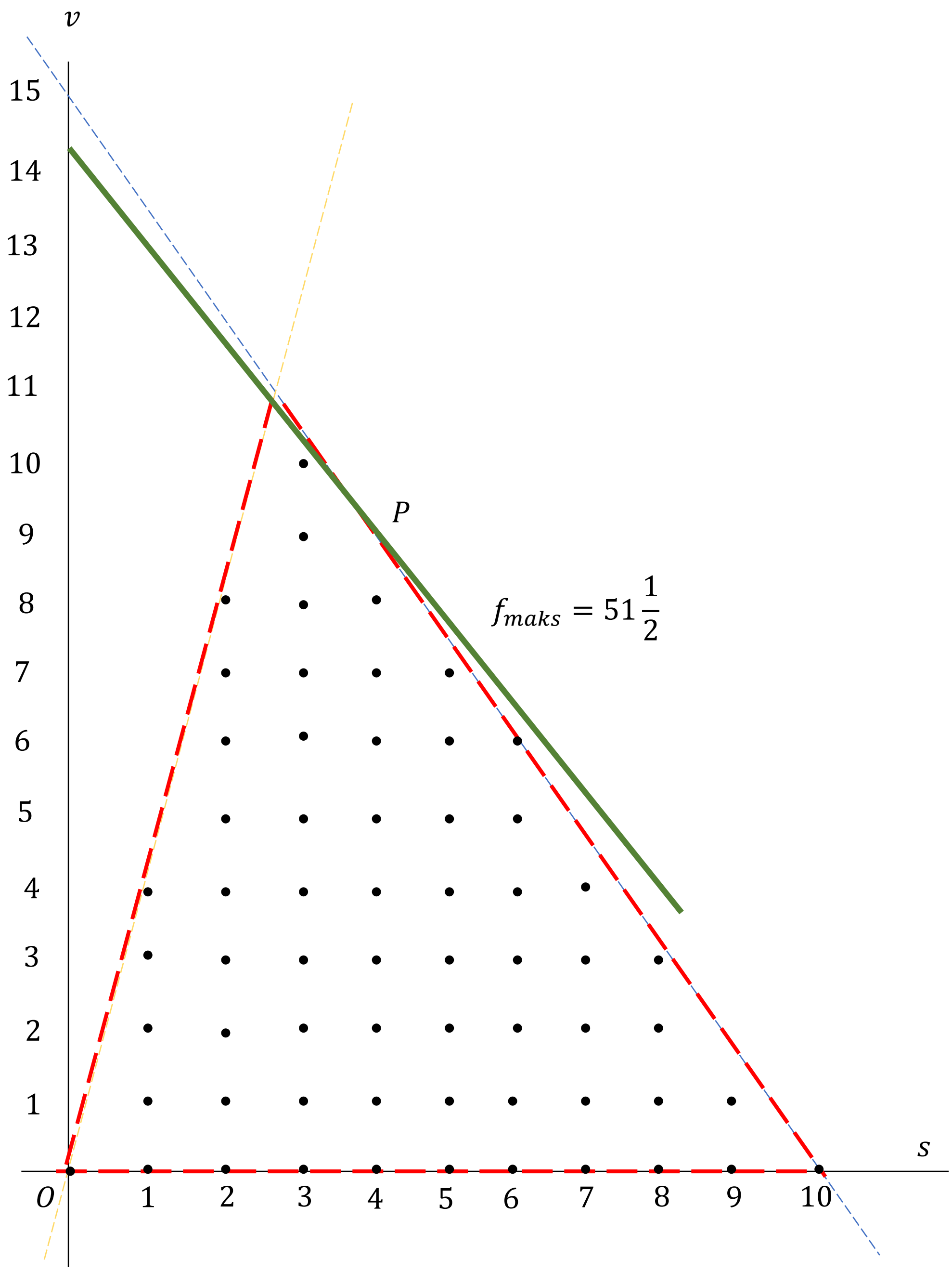
Ternyata $m_2 < m_f$. Karena keduanya negatif maka ini berarti bahwa garis AB lebih tegak dibanding dengan garis senilai, jadi titik optimum adalah B bukan A.

Dari perhitungan diperoleh koordinat B ialah B$\left(2\frac{8}{11}, 10\frac{10}{11}\right)$, jadi penyelesaian optimumnya $(s, v) = \left(2\frac{8}{11}, 10\frac{10}{11}\right)$, dengan nilai program $51\frac{9}{11}$.

Timbul masalah bila penyelesaian ini akan ditafsirkan kembali, karena nilai s dan v ditemukan berupa pecahan dan ini tidak dapat dilaksanakan. Hal ini terjadi karena dalam perumusan terhadap s dan v hanya disyaratkan tidak negatif dan belum disyaratkan untuk bulat. Pada umumnya masalah PL memang tidak mensyaratkan bulatnya nilai perubah. Bila dikehendaki bahwa penyelesaian harus terdiri dari bilangan-bilangan bulat maka tersedia model dan teknik penyelesaian khusus ialah PL bulat (integer linear programming).

Untuk soal di atas, karena hanya memuat dua perubah sehingga masih dapat diselesaikan dengan metode grafik maka jalan keluarnya adalah sebagai berikut.

Setelah terhadap s dan v ditambahkan syarat harus bulat maka daerah layak akan berupa himpunan titik-titik dengan koordinat cacah (Gambar b).



Kemudian garis senilai digeser ke kanan sampai titik layak yang terakhir yang ternyata adalah P$(4,9)$. Jadi penyelesaian optimumnya ialah $(s, v) = (4,9)$ yang memberikan nilai program $f_{min} = 51\frac{1}{2}$ (sedikit lebih rendah dari hasil sebelumnya).

Dengan demikian jawaban yang operasional bagi soal di atas adalah, memesan 4 unit sedan dan 9 unit van dan akan diperoleh laba total maksimum sebesar $51\frac{1}{2}$ juta.

Catatan

Pada umumnya reaksi pertama orang bila mendapatkan hasil pecahan sedang yang diinginkannya bulat adalah mengadakan pembulatan.

Langkah seperti ini tidak selalu bisa dan untuk contoh di atas memang tidak cocok.

Tinjau titik-titik hasil pembulatan (ke atas / ke bawah) terhadap koordinat B$\left(2\frac{8}{11}, 10\frac{10}{11}\right)$ berikut.

C$(2,10)$: ternyata tidak layak (di luar daerah OAB)

D$(2,11)$: ternyata tidak layak.

E$(3,10)$: memang berupa titik layak tetapi bukan yang optimum karena E$(3,10)$ hanya memberi nilai f sebesar 50, kalah besar dengan nilai f di P.

F$(3,11)$: ternyata tidak layak.

PL Bilangan Bulat dengan Metode Grafik

Untuk masalah PL Bilangan Bulat yang dapat diselesaikan dengan Metode Grafik, langkah-langkah solusinya adalah sebagai berikut.

Diberikan masalah PL:
Menentukan nilai optimal $f(x, y) = c_1x + c_2y$
terhadap kendala $a_{11}x + a_{12}y \leq b_1$
$a_{21}x + a_{22}y \leq b_2$

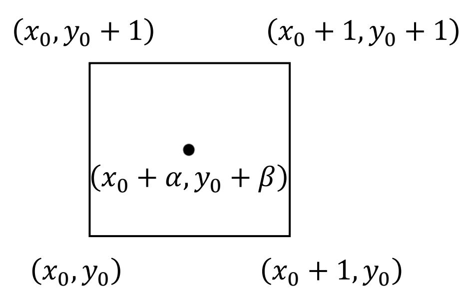
$\vdots$

$a_{m1}x + a_{m2}y \leq b_m$

$x \geq 0, y \geq 0$, x dan y bilangan bulat.

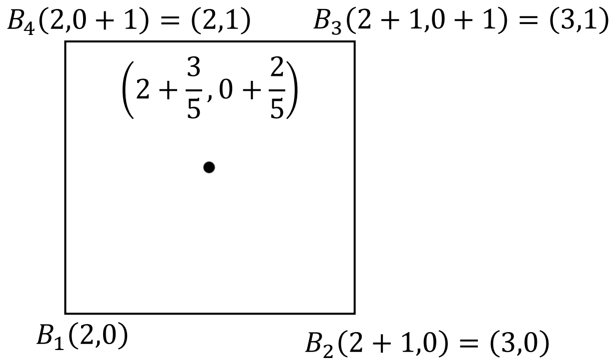
Langkah-langkah penyelesaian:

1. Selesaikan masalah PL hingga diperoleh titik layak basis, seperti pada masalah PL metode geometri biasa.
2. Jika titik layak basis (tlb) $(x, y)^*$ bilangan bulat, masalah selesai. Jika tlb bukan bilangan bulat, maka tentukan 2 titik lantai dan 2 titik langit-langit sebagai berikut, untuk koordinat $(x, y) *= (x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$ maka bentuklah suatu persegi seperti pada gambar berikut



3. Setelah itu titik-titik sudut daerah persegi tersebut dimasukkan ke dalam fungsi tujuan dan tentukan yang memberi nilai optimal.

Contoh: Jika pada masalah PL dengan metode grafik disyaratkan x dan y harus bilangan bulat, sementara, misalnya hasil yang kita peroleh tidak bulat, diperoleh tlb adalah $B\left(\frac{13}{5}, \frac{2}{5}\right)$. Maka yang harus kita lakukan adalah, mengubah koordinat $(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = \left(2 + \frac{3}{5}, 0 + \frac{2}{5}\right)$, maka diperoleh bujursangkar terhadap titik B adalah:



Tabel titik sudut:

Titik sudut	$f(x,y) = x + 2y$	Memenuhi / tidak memenuhi
$B_1(2,0)$	$f(2,0) = 2 + 2.0 = 2$	Memenuhi
$B_2(3,0)$	$f(3,0) = 3 + 2.0 = 3 *$	Memenuhi
$B_3(3,1)$	$f(3,1) = 3 + 2.1 = 5$	Tidak memenuhi
$B_4(2,1)$	$f(2,1) = 2 + 2.1 = 2 + 2 = 4$	Tidak memenuhi

Catatan: * menunjukkan nilai f terbesar dengan (x, y) memenuhi kendala-kendala.
Kesimpulan: $f_{opt} = 3$ dengan plb bilangan bulat pada $B_2(3,0)$.

Latihan: (Tidak untuk dikumpulkan)

1. Tentukan bilangan cacah x, y yang memenuhi:

   $x + y \leq 6$

   $-x + y \leq 3$

   $3x + y \geq 6$

   $3x + 4y \geq 12$

   $y \geq 1$

   dan meminimumkan $f(x,y) = 20x - 10y$.

2. Di pelabuhan tersedia tiga jenis barang A, B, C dalam jumlah yang banyak. Berturut-turut berat barang A, B, C adalah 1 ton, 3 ton, dan 2 ton per unitnya, sedangkan nilainya berturut-turut adalah 30, 80, dan 65 juta rupiah per unit. Dalam keadaan terburu-buru, sebuah sekoci dengan kapasitas maksimum 5 ton harus mengangkat barang-barang tersebut. Berapa unit masing-masing sebaiknya diangkut bila kapasitas maksimum harus dipenuhi dan supaya nilai total barang yang diangkut menjadi maksimum?