Teoría – Tema 1

CCSS - Teoría - 3 - Teorema del resto y Ruffini

Teorema del resto

Sea un polinomio $P(x)$ que dividimos entre $(x-a)$, donde a es un número real. El resultado de la división es igual al cociente $C(x)$, generándose un resto que llamaremos r .

De esta forma, el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto:

$$P(x)=(x-a)\cdot C(x)+r$$

El resto r es un número constante, ya que su grado debe ser menor que el grado de $(x-a)$, que posee grado uno. Si evaluamos la expresión anterior en $x=a$, obtenemos:

$$P(a)=(a-a)\cdot C(a)+r \rightarrow P(a)=0\cdot C(a)+r \rightarrow P(a)=r$$

Es decir: el resto r que resulta de dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x-a)$, es igual al valor del polinomio en $x=a \rightarrow P(a)=r$.

Ejemplo 1 resuelto

Obtener el resto que resulta de dividir $P(x)=2x^3-3x^2-7$ entre $(x-2)$.

Aplicando la conclusión del teorema del resto → $x=2 \rightarrow P(2)=r$

$$P(2)=2\cdot 2^3-3\cdot 2^2-7 \rightarrow P(2)=-3 \rightarrow r=-3$$

Una consecuencia de este teorema es lo que se conoce como corolario del teorema del resto. Este corolario afirma que $x=a$ es una raíz o solución del polinomio $P(x)$ si, y solo si, se cumple la igualdad $P(a)=0$.

Ejemplo 2 resuelto

Comprobar si $x=1, x=-1, x=3, x=-3$ son soluciones del siguiente polinomio de grado tres: $P(x)=x^3+3x^2-x-3$.

$P(1)=0$ → sí es solución

$P(-1)=0$ → sí es solución

$P(3)=48\neq 0$ → no es solución

$P(-3)=0$ → sí es solución

Regla de Ruffini para dividir polinomios

La regla de Ruffini es una forma recurrente muy útil en la división de polinomios de cualquier grado entre polinomios de primer grado de la forma $(x-a)$.

Colocamos los coeficientes del polinomio ordenados en una fila horizontal. Si algún término no existe, su coeficiente es cero.

El valor a de la expresión $(x-a)$ se coloca a la izquierda. Y se opera de manera recurrente de la siguiente forma: bajar primer término, multiplicarlo por a , colocar el resultado en la segunda columna y sumarlo al segundo coeficiente, y así sucesivamente. El último resultado erá el resto de la división.

Por ejemplo, dividamos $P(x)=x^4-3x^2+2$ entre $(x-3)$.

	1	**0**	**-3**	**0**	**2**
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

El resto de la división resulta $r=56=P(3)$, que coincide con el valor del polinomio evaluado en $x=3$.

$$x^4-3x^2+2=(x-3)(x^3+3x^2+6x+18)+56$$

Fíjate cómo queda el cociente → $C(x)=(x^3+3x^2+6x+18)$ → cuyos coeficientes coinciden con los que se obtiene de aplicar la regla de Ruffini, reduciendo en un grado respecto al polinomio de partida $P(x)$.

Con esto, contamos con una regla para buscar las raíces de un polinomio (siempre que sean resultados sencillos). Aplicar Ruffini una y otra vez hasta obtener, si es posible, tantas raíces como grado tenga el polinomio $P(x)$.

¿Qué valores tomar para a en la regla de Ruffini?

Suele funcionar (repito, si las soluciones son sencillas) tomar los divisores del término independiente del polinomio $P(x)$. Y en los casos con raíces no enteras, suele funcionar tomar los divisores del término independiente dividido entre los divisores del término con mayor grado.

Dos ideas finales. Las raíces pueden ser múltiples, por lo que a veces deberemos probar más de una vez con un mismo valor a .

Si al terminar de aplicar Ruffini, el coeficiente que queda tras el proceso de factorización es distinto de la unidad, no debemos olvidar colocarlo si deseamos expresar correctamente el polinomio $P(x)$ factorizado.

Con un ejemplo completo, comprenderemos todos los casos posibles.

Ejemplo 3 resuelto

Factorizar $P(x)=2x^4+x^3-8x^2-x+6$.

	2	**1**	**-8**	**-1**	**6**
1		2	3	-5	-6
	2	3	-5	-6	0
-1		-2	-1	6	
	2	1	-6	0	
-2		-4	6		
	2	-3	0		
3/2		3			
	2	0			

$$P(x)=2x^4+x^3-8x^2-x+6=2\cdot(x-1)(x+1)(x+2)(x-\frac{3}{2})$$

¿Por qué tiene esa forma tan peculiar el método de Ruffini? Vamor a razonarlo a partir de un polinomio de grado dos.

$P(x)=ax^2+bx+c$ → sacamos factor común → $P(x)=x(ax+b)+c$

Si evaluamos el polinomio en $x=x_0$ → $P(x_0)=x_0(ax_0+b)+c$

Es decir, multiplicamos el factor x_0 por el coeficiente líder a , y el resultado lo sumamos a b . Para posteriormente volver a multiplicar por x_0 . Finalmente, sumamos todo al término independiente c .

Esta secuancia es justo la que se produce en el método de Ruffini.

	a	b	c
x_0		ax_0	$x_0(ax_0+b)$
	a	ax_0+b	$x_0(ax_0+b)+c$

Si el resultado $x_0(ax_0+b)$ es igual a cero, significa que el valor $x=x_0$ anula al polinomio y será una raíz de $P(x)=ax^2+bx+c$.