Teoría – Tema 1

CCSS - Teoría - 7a - Concepto de función. Ejemplos función exponencial y función logaritmo

Dominio de una función

El dominio de una función $f(x)$ está formado por todos los elementos que poseen imagen.

$$Dom(f)=\{x\in\mathbb{R}/\exists f(x)\}$$

Función polinómica → $Dom(f)=\mathbb{R}$

Función racional → $Dom(f)=\mathbb{R}-\{valores\ \ que\ \ anulan\ \ denominador\}$

Función radical de índice impar → El dominio coincide con el dominio de la función radicando.

Función radical de índice par → El dominio está formado por todos los valores del dominio del radicando que hacen que este sea mayor o igual que cero.

Función logarítmica→ El dominio son todos los valores que cumplen que la función contenida dentro del logaritmo sea mayor que cero.

Función polinómica → $Dom(f)=\mathbb{R}$

Función seno → $Dom(f)=\mathbb{R}$

Función coseno → $Dom(f)=\mathbb{R}$

Función tangente → $Dom(f)=\mathbb{R}-\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}\}$

Función cotangente → $Dom(f)=\mathbb{R}-\{k\cdot\pi; k\in\mathbb{Z}\}$

Función secante → $Dom(f)=\mathbb{R}-\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}\}$

Función cosecante → $Dom(f)=\mathbb{R}-\{k\cdot\pi; k\in\mathbb{Z}\}$

Suma, resta producto de funciones → El dominio es la intersección de los dominios de cada función por separado. Es decir:

$$Dom(f(x)+g(x))=Dom(f(x)-g(x))=Dom(f(x)\cdot g(x))=Dom(f)\cap Dom(g)$$

Cociente de funciones → El dominio es la intersección de los dominios de cada función por separado, menos los valores que anulan al denominador. Es decir:

$$Dom\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=Dom(f)\cap Dom(g)-\{x\in\mathbb{R}/g(x)=0\}$$

Rango o recorrido de una función

El rango, recorrido o imagen de una función es el conjunto de valores que toma la variable $f(x)$.

El recorrido se obtiene observando los valores que toma el eje vertical en la representación gráfica. O bien, si podemos calcular la función inversa $f^{-1}(x)$, estudiando el dominio de esta función inversa.

Simetría

Una función $f(x)$ es simétrica respecto del eje de ordenadas vertical OY si es una función par. Es decir: $f(x)=f(-x)$.

Una función $f(x)$ es simétrica respecto al origen $(0,0)$ si es una función impar. Es decir: $f(x)=-f(-x)$.

Periodicidad

Una función $f(x)$ es periódica de periodo k si verifica:

$$f(x)=f(x+kn), k\in\mathbb{Z}, n=constante$$

Composición de funciones

Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Se define una nueva función que asocia a cada elemento del dominio de $f(x)$ el valor de $g[f(x)]$ y se denota $(g\circ f)(x)\equiv función \quad composición$. Se lee f compuesta con g .

El dominio de $(g\circ f)(x)$ son los valores del dominio de $f(x)$ que cumplen que su imagen $f(x)$ pertenece al dominio de $g(x)$. Es decir:

$$Dom(g\circ f)(x)=\{x\in Dom(f) / f(x)\in Dom(g(x))\}$$

La composición de funciones no es conmutativa: $(g\circ f)(x)\neq(f\circ g)(x)$

La composición de funciones sí es asociativa: $f\circ(g\circ h)(x)\neq(f\circ g)\circ h(x)$

Existe elemento neutro en la composición: $i(x)=x \rightarrow (f\circ i)(x)=(i\circ f)(x)=f(x)$

Función exponencial

Las función exponencial hace corresponder, a cada número real x , la potencia a^x .

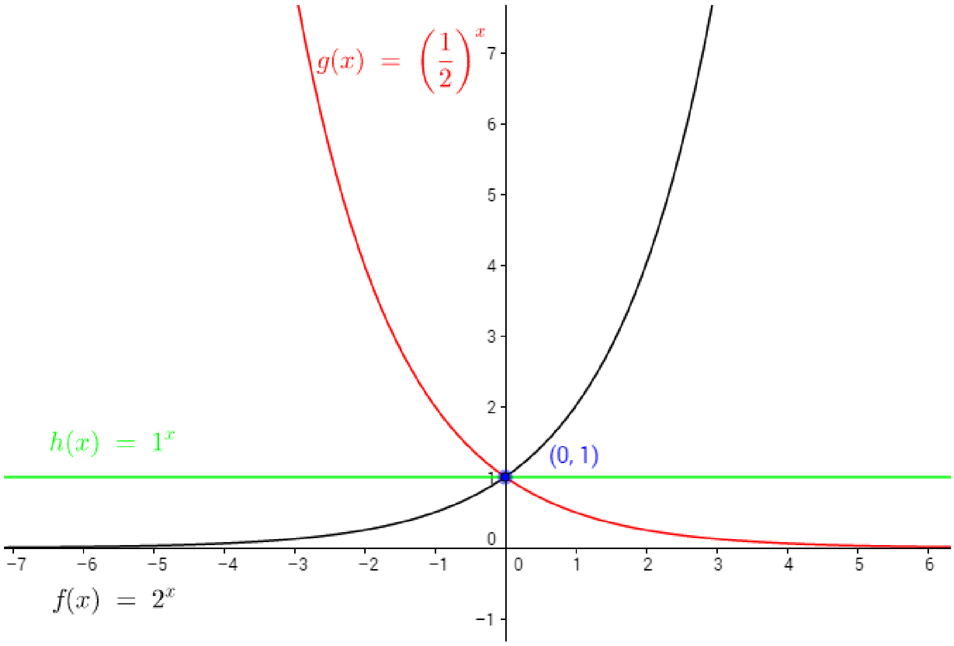
El término a es la base, mientras que x es el exponente.

Si $a>1 \rightarrow f(x)=a^x$ es una función estrictamente creciente.

Si $a=1 \rightarrow f(x)=1^x$ es una recta horizontal $f(x)=1$.

Si $a<1 \rightarrow f(x)=a^x$ es una función estrictamente decreciente.

Por definición, la base a nunca puede ser negativa.



El dominio de cualquier función exponencial son todos los números reales.

El recorrido son los reales positivos $(0,+\infty)$.

La función $f(x)=a^x$ es simétrica de $g(x)=(\frac{1}{a})^x$ respecto al eje vertical OY .

El punto $(0,1)$ siempre pertenece a la gráfica de la función exponencial.

Si $f(x)=a^x$, el punto $(1,a)$ pertenece a la gráfica de la función.

Si $a=e=2,73... \rightarrow f(x)=e^x$ se conoce como función exponencial natural.

Función logaritmo

La función logaritmo es la función inversa de la función exponencial. Es decir:

$\log_a x = y$ → aplicamos exponencial de base a → $x = a^y$

¿Cómo entender la función logaritmo $\log_a x = y$?

Significa "¿A qué valor debemos elevar a para obtener x ?" → $x = a^y$

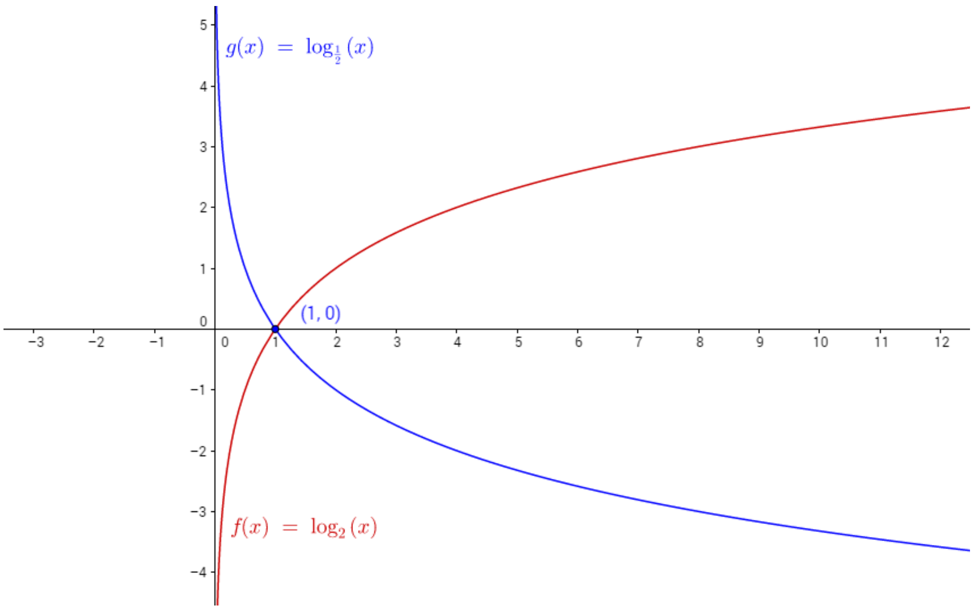
En $f(x) = \log_a x$ el término a es la base del logaritmo.

Si $a > 1$ → $f(x) = \log_a x$ es una función estrictamente creciente.

Si $a = 1$ → No tiene sentido plantearlo, ya que 1 elevado a cualquier número real siempre da 1 .

Si $a < 1$ → $f(x) = \log_a x$ es una función estrictamente decreciente.

Por definición, no existen logaritmos de base negativa. Es decir: $a > 0$.



El dominio de la función logaritmo son todos los reales positivos $(0, +\infty)$.

El punto $(1,0)$ siempre pertenece a la gráfica de la función logaritmo.

Si $f(x) = \log_a x$, el punto $(a, 1)$ pertenece a la gráfica de la función.

La inversa de $f(x) = \log_a x$ es $f^{-1}(x) = a^x$, por lo tanto ambas funciones son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Si $a=e=2{,}73...$ → $f(x)=\log_e x=\ln x$ se conoce como función logaritmo natural o logaritmo neperiano.

Algunas propiedades útiles al trabajar con logaritmos:

$$\log_a a=1$$

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$$

$$\log_a(x^n)=n\cdot\log_a x$$

$$\log_a(a^n)=n$$

$$\log_a(\sqrt[n]{x})=\frac{1}{n}\cdot\log_a x$$

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$ → cambio de base

La función exponencial y la función logaritmo son funciones inversas

La función logaritmo es la inversa de la función exponencial. Por lo tanto:

- El dominio de ln(x) coincide con la imagen de exp(x).
- La imagen de ln(x) coincide con el dominio de exp(x).
- La gráfica de ln(x) se refleja en la gráfica de exp(x) a través de la recta y=x.
- Si componemos ln[exp(x)] el resultado es igual a x.
- Si componemos exp[ln(x)] el resultado es igual a x.