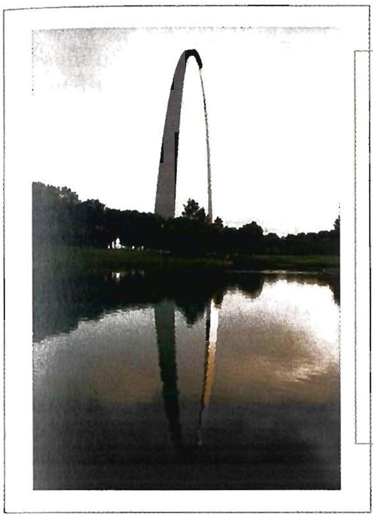
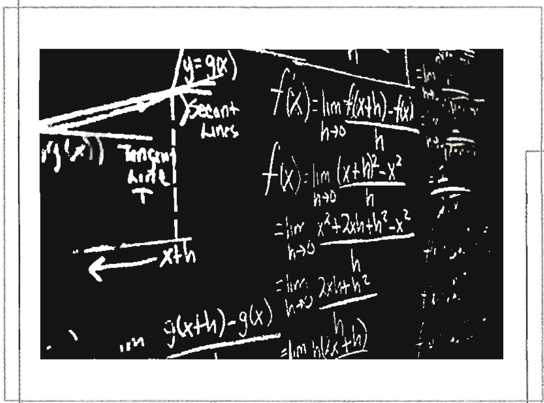
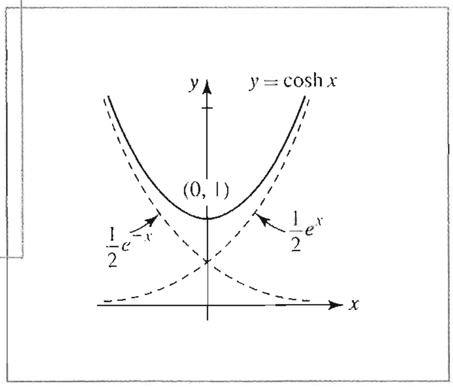
Capítulo 3

La derivada







En este capítulo La palabra *calculus* es una forma diminutiva de la palabra *calx*, que significa "piedra". En civilizaciones antiguas, piedras pequeñas o guijarros se usaban a menudo como medio de reconocimiento. En consecuencia, la palabra *calculus* se refiere a cualquier método sistemático de computación. No obstante, durante los últimos siglos la connotación de la palabra *cálculo* ha evolucionado para significar esa rama de las matemáticas relacionada con el cálculo y la aplicación de entidades conocidas como derivadas e integrales. Así, el tema conocido como **cálculo** se ha dividido en dos áreas amplias pero relacionadas: el **cálculo diferencial** y el **cálculo integral**.

En este capítulo se inicia el estudio del cálculo diferencial.

3.1 La derivada

Introducción En la última sección del capítulo 2 vimos que la recta tangente a una gráfica de una función $y = f(x)$ es la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente dada por

Recuerde que $m_{\tan}$ también se denomina pendiente de la curva en $(a, f(a))$.

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

siempre que el límite exista. Para muchas funciones suele ser posible obtener una fórmula general que proporcione el valor de la pendiente de la recta tangente. Esto se lleva a cabo al calcular

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

para *cualquier* x (para la que existe el límite). Luego sustituimos un valor de x *después* que se ha encontrado el límite.

Una definición El límite del cociente de la diferencia en (1) define una función: una función que se *deriva* de la función original $y = f(x)$. Esta nueva función se denomina **función derivada**, o simplemente la **derivada**, de f y se denota por f'.

Definición 3.1.1 Derivada

La **derivada** de una función $y = f(x)$ en x está dada por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

siempre que el límite exista.

A continuación reconsideraremos los ejemplos 1 y 2 de la sección 2.7.

EJEMPLO 1 Una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = x^2 + 2$.

Solución Así como en el cálculo de $m_{\tan}$ en la sección 2.7, el proceso de encontrar la derivada $f'(x)$ consta de cuatro pasos:

i) $f(x + h) = (x + h)^2 + 2 = x^2 + 2xh + h^2 + 2$

ii) $f(x + h) - f(x) = [x^2 + 2xh + h^2 + 2] - x^2 - 2 = h(2x + h)$

iii) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \dfrac{h(2x + h)}{h} = 2x + h \quad \leftarrow$ las h se cancelan

iv) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} [2x + h] = 2x.$

Por el paso *iv*) vemos que la derivada de $f(x) = x^2 + 2$ es $f'(x) = 2x$. ■

Observe que el resultado $m_{\tan} = 2$ en el ejemplo 1 de la sección 2.7 se obtiene al evaluar la derivada $f'(x) = 2x$ en $x = 1$, es decir, $f'(1) = 2$.

EJEMPLO 2 Valor de la derivada

Para $f(x) = x^2 + 2$, encuentre $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$ y $f'(1)$. Interprete.

Solución Por el ejemplo 1 sabemos que la derivada es $f'(x) = 2x$. Por tanto,

en $x = -2$, $\begin{cases} f(-2) = 6 & \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (-2, 6) \\ f'(-2) = -4 & \leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } (-2, 6) \text{ es } m = -4 \end{cases}$

en $x = 0$, $\begin{cases} f(0) = 2 & \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (0, 2) \\ f'(0) = 0 & \leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } (0, 2) \text{ es } m = 0 \end{cases}$

$$\text{en } x = \tfrac{1}{2}, \quad \begin{cases} f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4} & \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (\frac{1}{2}, \frac{9}{4}) \\ f'(\frac{1}{2}) = 1 & \leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } (\frac{1}{2}, \frac{9}{4}) \text{ es } m = 1 \end{cases}$$

$$\text{en } x = 1, \quad \begin{cases} f(1) = 3 & \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (1, 3) \\ f'(1) = 2. & \leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } (1, 3) \text{ es } m = 2 \end{cases}$$

Recuerde que la pendiente de una recta horizontal es 0. Así, el hecho de que $f'(0) = 0$ significa que la recta tangente es horizontal en $(0, 2)$. ■

Por cierto, si regresa al proceso de cuatro pasos en el ejemplo 1, encontrará que la derivada de $g(x) = x^2$ también es $g'(x) = 2x = f'(x)$. Esto tiene sentido intuitivo: puesto que la gráfica de $f(x) = x^2 + 2$ es una traslación vertical rígida o desplazamiento de la gráfica de $g(x) = x^2$ para un valor dado de x, los puntos de tangencia cambian, pero no así la pendiente de la recta tangente en los puntos. Por ejemplo, en $x = 3$, $g'(3) = 6 = f'(3)$ pero los puntos de tangencia son $(3, g(3)) = (3, 9)$ y $(3, f(3)) = (3, 11)$.

EJEMPLO 3 Una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = x^3$.

Solución Para calcular $f(x + h)$, usamos el teorema del binomio.

i) $f(x + h) = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

ii) $f(x + h) - f(x) = [x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3] - x^3 = h(3x^2 + 3xh + h^2)$

iii) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \dfrac{h[3x^2 + 3xh + h^2]}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$

iv) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} [3x^2 + 3xh + h^2] = 3x^2.$

La derivada de $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$. ■

Recuerde de sus estudios de álgebra que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Luego, a se sustituye por x y b por h.

EJEMPLO 4 Recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ en $x = \frac{1}{2}$.

Solución Por el ejemplo 3 tenemos dos funciones $f(x) = x^3$ y $f'(x) = 3x^2$. Como vimos en el ejemplo 2, cuando estas funciones se evalúan en el mismo número $x = \frac{1}{2}$ se obtiene diferente información:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{8})$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}. \quad \leftarrow \text{la pendiente de la recta tangente en } (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{8}) \text{ es } \tfrac{3}{4}$$

Así, por la ecuación punto-pendiente de una recta,* una ecuación de la recta tangente está dada por

$$y - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{o bien,} \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

La gráfica de la función y la recta tangente se muestran en la FIGURA 3.1.1. ■

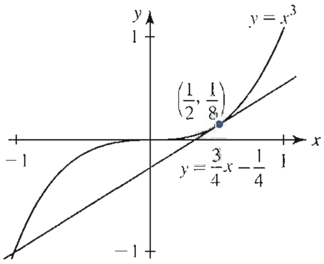


FIGURA 3.1.1 Recta tangente en el ejemplo 4

EJEMPLO 5 Una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = 1/x$.

Solución En este caso usted debe poder demostrar que la diferencia es

$$f(x + h) - f(x) = \frac{1}{x + h} - \frac{1}{x} = \frac{-h}{(x + h)x}. \quad \leftarrow \text{las fracciones se suman usando un común denominador}$$

En consecuencia,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(x + h)x} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x + h)x} = \frac{-1}{x^2}.$$

La derivada de $f(x) = 1/x$ es $f'(x) = -1/x^2$. ■

*N. del RT. También se le conoce como forma punto-pendiente.

Notación A continuación se presenta una lista de la **notación** común usada en la literatura matemática para denotar la derivada de una función:

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad Dy, \quad D_x y.$$

Para una función como $f(x) = x^2$, escribimos $f'(x) = 2x$; si la misma función se escribe $y = x^2$, entonces utilizamos $dy/dx = 2x$, $y' = 2x$ o $D_x y = 2x$. En este texto usaremos las tres primeras formas. Por supuesto, en varias aplicaciones se usan otros símbolos. Por tanto, si $z = t^2$, entonces

$$\frac{dz}{dt} = 2t \qquad \text{o bien,} \qquad z' = 2t.$$

La notación dy/dx tiene su origen en la forma derivada de (3) de la sección 2.7. Al sustituir h por Δx y denotar la diferencia $f(x + h) - f(x)$ por Δy en (2), a menudo la derivada se define como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3}$$

EJEMPLO 6 Una derivada donde se usa (3)

Use (3) para encontrar la derivada de $y = \sqrt{x}$.

Solución En el procedimiento de cuatro pasos, la manipulación algebraica importante tiene lugar en el tercer paso:

i) $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$

ii) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$

iii)
$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\\ &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \quad \leftarrow \text{racionalización del numerador}\\ &= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}\\ &= \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}\end{aligned}$$

iv) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La derivada de $y = \sqrt{x}$ es $dy/dx = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$. ■

Valor de una derivada El **valor** de la derivada en un número a se denota por los símbolos

$$f'(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \quad y'(a), \quad \left.D_x y\right|_{x=a}.$$

EJEMPLO 7 Una derivada

Por el ejemplo 6, el valor de la derivada de $y = \sqrt{x}$ en, por ejemplo, $x = 9$ se escribe

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=9} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=9} = \frac{1}{6}.$$

En forma alterna, para evitar la torpe barra vertical, simplemente escribimos $y'(9) = \frac{1}{6}$. ■

Operadores diferenciación El proceso de encontrar o calcular una derivada se denomina **diferenciación**. Así, la diferenciación es una operación que se lleva a cabo sobre una función

$y = f(x)$. La operación de diferenciación de una función con respecto a la variable x se representa con los símbolos d/dx y D_x. Estos símbolos se denominan **operadores diferenciación.** Por ejemplo, los resultados en los ejemplos 1, 3 y 6 pueden expresarse, a su vez, como

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2) = 2x, \quad \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

El símbolo

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{entonces significa} \quad \frac{d}{dx}y.$$

Diferenciabilidad Si el límite en (2) existe para un número x dado en el dominio de f, se dice que la función es **diferenciable** en x. Si una función f es diferenciable en todo número x en los intervalos abiertos (a, b), $(-\infty, b)$ y (a, ∞), entonces f es **diferenciable sobre el intervalo abierto**. Si f es diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$, entonces se dice que f es **diferenciable en todas partes**. Se dice que una función f es **diferenciable sobre un intervalo cerrado** $[a, b]$ cuando f es diferenciable sobre el intervalo abierto (a, b), y

$$\begin{aligned} f'_+(a) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \\ f'_-(b) &= \lim_{h\to 0^-}\frac{f(b + h) - f(b)}{h} \end{aligned} \tag{4}$$

ambos existen. Los límites en (4) se denominan **derivadas por la derecha** y **por la izquierda**, respectivamente. Una función es diferenciable sobre $[a, \infty)$ cuando es diferenciable sobre (a, ∞) y tiene derivada por la derecha en a. Una definición semejante en términos de una derivada por la izquierda se cumple para diferenciabilidad sobre $(-\infty, b]$. Además, puede demostrarse que:

- Una función es diferenciable en un número c en un intervalo (a, b) si y sólo si $f'_+(c) = f'_-(c)$. (5)

Tangentes horizontales Si $y = f(x)$ es continua en un número a y $f'(a) = 0$, entonces la recta tangente en $(a, f(a))$ es **horizontal**. En los ejemplos 1 y 2 vimos que el valor de la derivada $f'(x) = 2x$ de la función $f(x) = x^2 + 2$ en $x = 0$ es $f'(0) = 0$. Por tanto, la recta tangente a la gráfica es horizontal en $(0, f(0))$ o $(0, 0)$. Se deja como ejercicio (vea el problema 7 en los ejercicios 3.1) comprobar por la definición 3.1.1 que la derivada de la función continua $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ es $f'(x) = -2x + 4$. Observe en este último caso que $f'(x) = 0$ cuando $-2x + 4 = 0$ o $x = 2$. Hay una tangente horizontal en el punto $(2, f(2)) = (2, 5)$.

Dónde *f* no es diferenciable Una función no tiene derivada en $x = a$ si

i) la función es discontinua en $x = a$, o
ii) la gráfica de f tiene un pico en $(a, f(a))$.

Además, puesto que la derivada proporciona la pendiente, f no es diferenciable

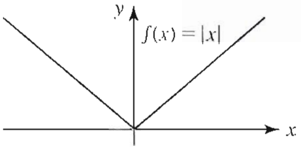
iii) en un punto $(a, f(a))$ en el cual la recta tangente es vertical.

El dominio de la derivada f', definido por (2), es el conjunto de números x para los cuales el límite existe. Por tanto, el dominio de f' necesariamente es un subconjunto del dominio de f.

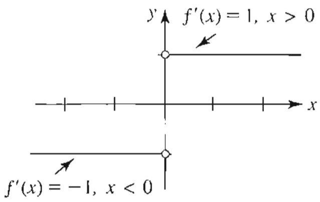
EJEMPLO 8 Diferenciabilidad

a) La función $f(x) = x^2 + 2$ es diferenciable para todos los números reales x; es decir, el dominio de $f'(x) = 2x$ es $(-\infty, \infty)$.

b) Debido a que $f(x) = 1/x$ es discontinua en $x = 0$, f no es diferenciable en $x = 0$ y en consecuencia no es diferenciable sobre cualquier intervalo que contenga 0. ■



a) Función valor absoluto de f



b) Gráfica de la derivada f'

FIGURA 3.1.2 Gráficas de f y f' en el ejemplo 9

EJEMPLO 9 Otro repaso al ejemplo 7 de la sección 2.7

En el ejemplo 7 de la sección 2.7 vimos que la gráfica de $f(x) = |x|$ no tiene tangente en el origen (0, 0). Así, $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$. Pero $f(x) = |x|$ es diferenciable sobre los intervalos abiertos $(0, \infty)$ y $(-\infty, 0)$. En el ejemplo 5 de la sección 2.7 demostramos que la derivada de una función lineal $f(x) = mx + b$ es $f'(x) = m$. Por tanto, para $x > 0$ tenemos $f(x) = |x| = x$ y así $f'(x) = 1$. También, para $x < 0, f(x) = |x| = -x$ y así $f'(x) = -1$. Puesto que la derivada de f es una función definida por partes,

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

que podemos graficar como cualquier función. En la FIGURA 3.1.2*b*) observamos que f' es discontinua en $x = 0$. ∎

Con símbolos diferentes, lo que demostramos en el ejemplo 9 es que $f'_-(0) = -1$ y $f'_+(0)$ $= 1$. Puesto que $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ por (5) se concluye que f no es diferenciable en 0.

Tangentes verticales Sea $y = f(x)$ continua en un número a. Si $\lim_{x\to a} |f'(x)| = \infty$, entonces se dice que la gráfica de f tiene una **tangente vertical** en $(a, f(a))$. Las gráficas de muchas funciones con exponentes radicales tienen tangentes verticales.

En el ejemplo 6 de la sección 2.7 se mencionó que la gráfica de $y = x^{1/3}$ tiene una línea tangente vertical en (0, 0). Verificamos esta afirmación en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10 Tangente vertical

Se deja como ejercicio demostrar que la derivada de $f(x) = x^{1/3}$ está dada por

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

(Vea el problema 55 en los ejercicios 3.1.) Aunque f es continua en 0, resulta evidente que f' no está definida en ese número. En otras palabras, f no es diferenciable en $x = 0$. Además debido a que

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \infty$$

tenemos $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to 0$. Esto es suficiente para afirmar que en $(0, f(0))$ o (0, 0) hay una recta tangente y que es vertical. En la FIGURA 3.1.3 se muestra que las rectas tangentes a la gráfica a cualquier lado del origen se vuelven cada vez más pronunciadas cuando $x \to 0$. ∎

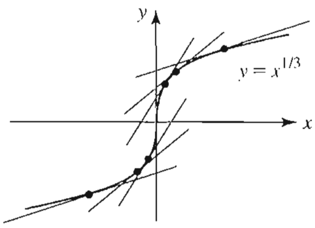


FIGURA 3.1.3 Rectas tangentes a la gráfica de la función en el ejemplo 10

La gráfica de una función f también puede tener una tangente vertical en un punto $(a, f(a))$ si f es diferenciable sólo por un lado de a, es continua por la izquierda (derecha) en a, y se cumple $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to a^-$ o $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to a^+$.

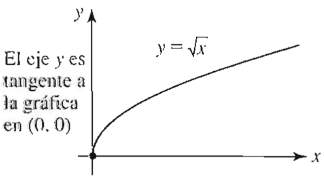


FIGURA 3.1.4 Tangente vertical en el ejemplo 11

EJEMPLO 11 Tangente vertical por un lado

La función $f(x) = \sqrt{x}$ no es diferenciable sobre el intervalo $[0, \infty)$ porque por la derivada $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ observamos que $f'_+(0)$ no existe. La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua sobre $[0, \infty)$ pero diferenciable sobre $(0, \infty)$. Además, debido a que f es continua en 0 y $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ $= \infty$, en el origen (0, 0) hay una tangente vertical. En la FIGURA 3.1.4 vemos que la tangente vertical es el eje y. ∎

Importante ▶

Las funciones $f(x) = |x|$ y $f(x) = x^{1/3}$ son continuas en todas partes. En particular, ambas son continuas en 0 pero ninguna es diferenciable en ese número. En otras palabras, la continuidad en un número a no es suficiente para garantizar que una función sea diferenciable en a. No obstante, si f es diferenciable en a, entonces f debe ser continua en ese número. Este hecho se resume en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1 Diferenciabilidad implica continuidad

Si f es diferenciable en un número a, entonces f es continua en a.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la continuidad de f en un número a, es suficiente demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ o bien, de manera equivalente, que $\lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] = 0$. La hipótesis es que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

existe. Si se hace $x = a + h$, entonces cuando $h \to 0$ tenemos $x \to a$. Por tanto, el límite anterior equivale a

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Luego, puede escribirse

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) && \leftarrow \text{multiplicación por } \frac{x - a}{x - a} = 1 \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a} (x - a) && \leftarrow \text{ambos límites existen} \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

■

Posdata: Un poco de historia Se sabe que **Isaac Newton** (1642-1727), matemático y físico inglés, fue el primero en establecer muchos de los principios básicos del cálculo en manuscritos no publicados sobre el *método de fluxiones*, fechado en 1665. La palabra *fluxión* se originó por el concepto de cantidades que "fluyen"; es decir, cantidades que cambian a cierta razón. Newton usó la notación de punto $\dot{y}$ para representar una fluxión, o como se conoce ahora: la derivada de una función. El símbolo $\dot{y}$ nunca fue popular entre los matemáticos, de modo que en la actualidad lo usan esencialmente los físicos. Debido a razones tipográficas, la así denominada "notación flyspeck" ha sido sustituida por la notación prima. Newton alcanzó fama imperecedera con la publicación de su ley de la gravitación universal en su tratado monumental *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* en 1687. Newton también fue el primero en demostrar, usando el cálculo y su ley de gravitación, las tres leyes empíricas de Johannes Kepler del movimiento planetario, y el primero en demostrar que la luz blanca está compuesta de todos los colores. Newton fue electo al Parlamento, nombrado guardián de la Real Casa de Moneda y nombrado caballero en 1705. Sir Isaac Newton dijo acerca de estos logros: "Si he visto más lejos que otros, es porque me apoyé en los hombros de gigantes."

Newton

El matemático, abogado y filósofo alemán **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) publicó una versión corta de su cálculo en un artículo en un periódico alemán en 1684. La notación dy/dx para la derivada de una función se debe a Leibniz. De hecho, fue Leibniz quien introdujo la palabra *función* en la literatura matemática. Pero, puesto que es bien sabido que los manuscritos de Newton sobre el *método de fluxiones* datan de 1665, Leibniz fue acusado de apropiarse de las ideas de Newton a partir de esta obra no publicada. Alimentado por orgullos nacionalistas, durante muchos años hubo una controversia sobre quién de los dos "inventó" el cálculo. Hoy los historiadores coinciden en que ambos llegaron a muchas de las premisas más importantes del cálculo de manera independiente. Leibniz y Newton se consideran "coinventores" del tema.

Leibniz

$\frac{d}{dx}$ NOTAS DESDE EL AULA

i) En el análisis precedente vimos que la derivada de una función es en sí misma una función que proporciona la pendiente de una recta tangente. La derivada *no es*, sin embargo, una ecuación de una recta tangente. También, afirmar que $y - y_0 = f'(x) \cdot (x - x_0)$ es una ecuación de la tangente en (x_0, y_0) es incorrecto. Recuerde que $f'(x)$ debe evaluarse en x_0 *antes* de usarla en la forma punto-pendiente. Si f es diferenciable en x_0, entonces una ecuación de la recta tangente en (x_0, y_0) es $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

ii) Aunque en esta sección se han recalcado las pendientes, no olvide el análisis sobre razones de cambio promedio y razones de cambio instantáneas en la sección 2.7. La derivada $f'(x)$ también es la **razón de cambio instantánea** de la función $y = f(x)$ con respecto a la variable x. En las secciones que siguen se dirá más sobre estas razones.

iii) Los matemáticos de los siglos XVII al XIX creían que una función continua solía tener una derivada. (En esta sección hemos observado excepciones.) En 1872, el matemático alemán Karl Weierstrass destruyó de manera contundente este principio al publicar un ejemplo de función que es *continua en todas partes pero no es diferenciable en ninguna.*

Ejercicios 3.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-10.

Fundamentos

En los problemas 1-20, use (2) de la definición 3.1.1 para encontrar la derivada de la función dada.

1. $f(x) = 10$
2. $f(x) = x - 1$
3. $f(x) = -3x + 5$
4. $f(x) = \pi x$
5. $f(x) = 3x^2$
6. $f(x) = -x^2 + 1$
7. $f(x) = -x^2 + 4x + 1$
8. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x - 7$
9. $y = (x + 1)^2$
10. $f(x) = (2x - 5)^2$
11. $f(x) = x^3 + x$
12. $f(x) = 2x^3 + x^2$
13. $y = -x^3 + 15x^2 - x$
14. $y = 3x^4$
15. $y = \dfrac{2}{x + 1}$
16. $y = \dfrac{x}{x - 1}$
17. $y = \dfrac{2x + 3}{x + 4}$
18. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$
19. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
20. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

En los problemas 21-24, use (2) de la definición 3.1.1 para encontrar la derivada de la función dada. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor indicado de x.

21. $f(x) = 4x^2 + 7x;\quad x = -1$
22. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 4;\quad x = 0$
23. $y = x - \dfrac{1}{x};\quad x = 1$
24. $y = 2x + 1 + \dfrac{6}{x};\quad x = 2$

En los problemas 25-28, use (2) de la definición 3.1.1 para encontrar la derivada de la función dada. Encuentre uno o varios puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

25. $f(x) = x^2 + 8x + 10$
26. $f(x) = x(x - 5)$
27. $f(x) = x^3 - 3x$
28. $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

En los problemas 29-32, use (2) de la definición 3.1.1 para encontrar la derivada de la función dada. Encuentre uno o varios puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es paralela a la recta dada.

29. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1;\quad 3x - y = 1$
30. $f(x) = x^2 - x;\quad -2x + y = 0$
31. $f(x) = -x^3 + 4;\quad 12x + y = 4$
32. $f(x) = 6\sqrt{x} + 2;\quad -x + y = 2$

En los problemas 33 y 34, demuestre que la función dada no es diferenciable en el valor indicado de x.

33. $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \le 2 \\ 2x - 4, & x > 2 \end{cases};\quad x = 2$

34. $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0 \\ -4x, & x \ge 0 \end{cases};\quad x = 0$

En la demostración del teorema 3.1.1 vimos que un planteamiento alterno de la derivada de una función f en a está dado por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{6}$$

siempre que el límite exista. En los problemas 35-40, use (6) para calcular $f'(a)$.

35. $f(x) = 10x^2 - 3$
36. $f(x) = x^2 - 3x - 1$
37. $f(x) = x^3 - 4x^2$
38. $f(x) = x^4$
39. $f(x) = \dfrac{4}{3 - x}$
40. $f(x) = \sqrt{x}$

41. Encuentre una ecuación de la recta tangente mostrada en rojo en la FIGURA 3.1.5. ¿Cuáles son los valores $f(-3)$ y $f'(-3)$?

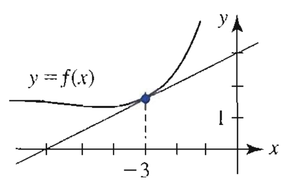


FIGURA 3.1.5 Gráfica del problema 41

42. Encuentre una ecuación de la recta tangente mostrada en rojo en la FIGURA 3.1.6. ¿Cuál es el valor de $f'(3)$? ¿Cuál es la intersección con el eje y de la recta tangente?

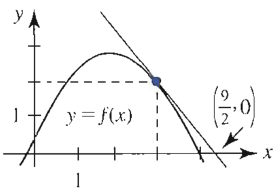


FIGURA 3.1.6 Gráfica del problema 42

En los problemas 43-48, trace la gráfica de f' a partir de la gráfica de f.

43.

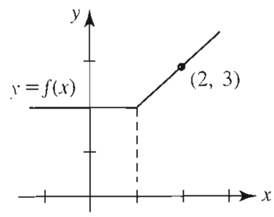


FIGURA 3.1.7 Gráfica del problema 43

44.

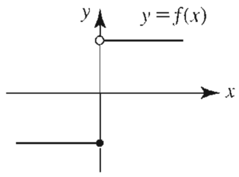


FIGURA 3.1.8 Gráfica del problema 44

45.

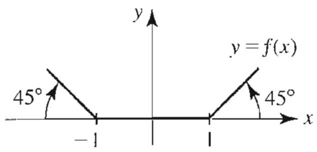


FIGURA 3.1.9 Gráfica del problema 45

46.

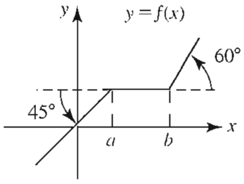


FIGURA 3.1.10 Gráfica del problema 46

47.

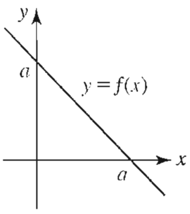


FIGURA 3.1.11 Gráfica del problema 47

48.

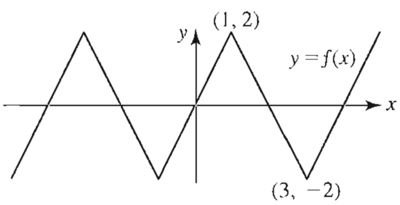
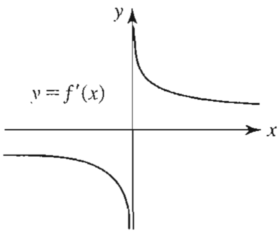


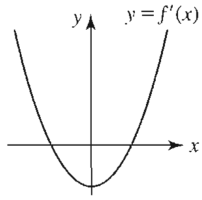
FIGURA 3.1.12 Gráfica del problema 48

En los problemas 49-54, relacione la gráfica de f con una gráfica de f' de *a*)-*f*).

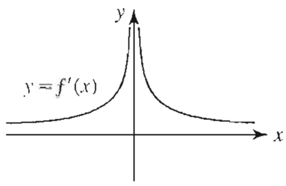
a)



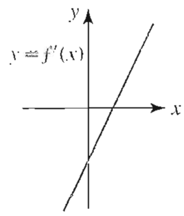
b)



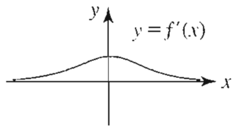
c)



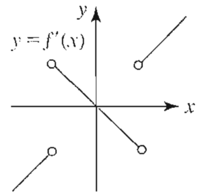
d)



e)



f)



49.

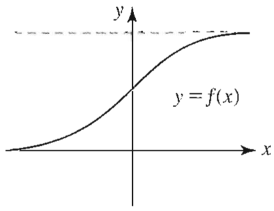


FIGURA 3.1.13 Gráfica del problema 49

50.

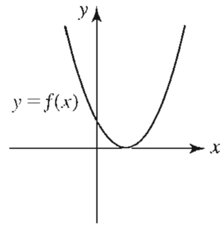


FIGURA 3.1.14 Gráfica del problema 50

51.

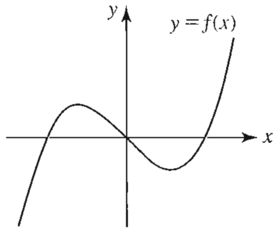


FIGURA 3.1.15 Gráfica del problema 51

52.

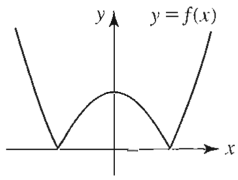


FIGURA 3.1.16 Gráfica del problema 52

53.

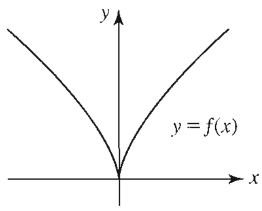


FIGURA 3.1.17 Gráfica del problema 53

54.

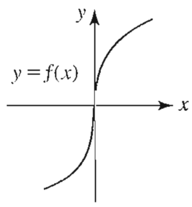


FIGURA 3.1.18 Gráfica del problema 54

Piense en ello

55. Use la definición alterna de la derivada (6) para encontrar la derivada de $f(x) = x^{1/3}$.

[*Sugerencia*: Observe que $x - a = (x^{1/3})^3 - (a^{1/3})^3$.]

56. En los ejemplos 10 y 11 vimos, respectivamente, que las funciones $f(x) = x^{1/3}$ y $f(x) = \sqrt{x}$ tenían tangentes verticales en el origen (0, 0). Conjeture dónde las gráficas de $y = (x - 4)^{1/3}$ y $y = \sqrt{x + 2}$ pueden tener tangentes verticales.

57. Suponga que f es diferenciable en todas partes y que tiene tres propiedades:

i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$, *ii*) $f(0) = 1$,

iii) $f'(0) = 1$.

Use (2) de la definición 3.1.1 para demostrar que $f'(x) = f(x)$ para toda x.

58. *a*) Suponga que f es una función par diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$. Use razonamiento geométrico para explicar por qué $f'(-x) = -f'(x)$; es decir, que f' es una función impar.

b) Suponga que f es una función impar diferenciable sobre $(-\infty, \infty)$. Use razonamiento geométrico para explicar por qué $f'(-x) = f'(x)$; es decir, que f' es una función par.

59. Suponga que f es una función diferenciable sobre $[a, b]$ tal que $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$. Experimente con gráficas para decidir si la siguiente afirmación es falsa o verdadera: hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

60. Trace gráficas de varias funciones f que tengan la propiedad $f'(x) > 0$ para toda x en $[a, b]$. ¿Qué tienen en común éstas?

≡ Problemas con calculadora/SAC

61. Considere la función $f(x) = x^n + |x|$, donde n es un entero positivo. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de f para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. Luego use (2) para demostrar que f no es diferenciable en $x = 0$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. ¿Puede demostrar esto para *cualquier* entero positivo n? ¿Cuáles son $f'_-(0)$ y $f'_+(0)$ para $n > 1$?

3.2 Reglas de potencias y sumas

Introducción La definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

tiene la desventaja evidente de ser más bien molesta y cansada de aplicar. Para encontrar la derivada de la función polinomial $f(x) = 6x^{100} + 4x^{35}$ usando la definición anterior *sólo* es necesario hacer malabares con 137 términos en los desarrollos del binomio de $(x + h)^{100}$ y $(x + h)^{35}$. Hay formas más eficaces para calcular derivadas de una función que usar la definición cada vez. En esta sección, y en las secciones que siguen, veremos que hay algunos atajos o **reglas** generales a partir de las cuales es posible obtener las derivadas de funciones como $f(x) = 6x^{100} + 4x^{35}$ literalmente, con un truco de pluma.

En la última sección vimos que las derivadas de las funciones potencia

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

eran, a su vez,

Vea los ejemplos 3, 5 y 6 en la sección 3.1.

$$f'(x) = 2x, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

Si los miembros derechos de estas cuatro derivadas se escriben

$$2 \cdot x^{2-1}, \quad 3 \cdot x^{3-1}, \quad (-1) \cdot x^{-1-1}, \quad \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1},$$

observamos que cada coeficiente (indicado en rojo) corresponde al exponente original de x en f y que el nuevo exponente de x en f' puede obtenerse a partir del exponente anterior (también indicado en rojo) al restarle 1. En otras palabras, el patrón para la derivada de la función potencia general $f(x) = x^n$ es

el exponente se escribe como múltiplo

$$(\ )x^{(\ )-1}. \tag{2}$$

el exponente disminuye por uno

Derivada de la función potencia En efecto, el patrón ilustrado en (2) se cumple para cualquier exponente que sea un número real n, y este hecho se planteará como un teorema formal, pero en este momento del curso no se cuenta con las herramientas matemáticas necesarias para demostrar su validez completa. Sin embargo, es posible demostrar un caso especial de esta regla de potencias; las partes restantes de la demostración se proporcionarán en las secciones idóneas más adelante.

Teorema 3.2.1 Regla de potencias

Para cualquier número real n,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN La demostración sólo se presenta para el caso donde n es un entero positivo. A fin de calcular (1) para $f(x) = x^n$ usamos el método de cuatro pasos:

$$i)\quad f(x+h) = (x+h)^n = \overbrace{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}^{\text{Teorema general del binomio}}$$

Vea las *Páginas de recursos* para un repaso del teorema del binomio.

$$ii)\quad f(x+h) - f(x) = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n$$

$$= nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n$$

$$= h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]$$

$$iii)\quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h}$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

$$iv)\quad f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}}_{\text{estos términos } \to 0 \text{ cuando } h \to 0}\right] = nx^{n-1}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 1 Regla de potencias

Diferencie

a) $y = x^7$ ***b***) $y = x$ ***c***) $y = x^{-2/3}$ ***d***) $y = x^{\sqrt{2}}$.

Solución Por la regla de potencias (3),

a) con $n = 7$: $\dfrac{dy}{dx} = 7x^{7-1} = 7x^6$,

b) con $n = 1$: $\dfrac{dy}{dx} = 1x^{1-1} = x^0 = 1$,

c) con $n = -\frac{2}{3}$: $\dfrac{dy}{dx} = \left(-\dfrac{2}{3}\right)x^{(-2/3)-1} = -\dfrac{2}{3}x^{-5/3} = -\dfrac{2}{3x^{5/3}}$,

d) con $n = \sqrt{2}$: $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$. ■

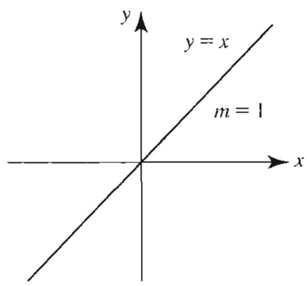


FIGURA 3.2.1 La pendiente de la recta $m = 1$ es consistente con $dy/dx = 1$

Observe en el inciso *b*) del ejemplo 1 que el resultado es consistente con el hecho de que la pendiente de la recta $y = x$ es $m = 1$. Vea la FIGURA 3.2.1.

Teorema 3.2.2 Regla de la función constante

Si $f(x) = c$ es una función constante, entonces $f'(x) = 0$. (4)

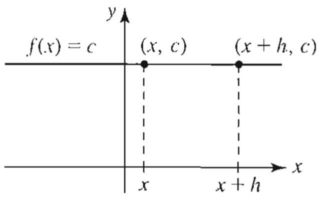


FIGURA 3.2.2 La pendiente de una recta horizontal es 0

DEMOSTRACIÓN Si $f(x) = c$, donde c es cualquier número real, entonces se concluye qu la diferencia es $f(x + h) - f(x) = c - c = 0$. Así, por (1),

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

El teorema 3.2.2 tiene una interpretación geométrica evidente. Como se muestra en l FIGURA 3.2.2, la pendiente de la recta horizontal $y = c$ es, por supuesto, cero. Además, el teo rema 3.2.2 coincide con (3) en el caso donde $x \neq 0$ y $n = 0$.

Teorema 3.2.3 Regla de la multiplicación por constante

Si c es cualquier constante y f es diferenciable en x, entonces cf es diferenciable en x, y

$$\frac{d}{dx} cf(x) = cf'(x). \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $G(x) = cf(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x + h) - G(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x + h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x + h) - f(x)}{h}\right] \\ &= c \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = cf'(x). \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Un múltiplo constante

Diferencie $y = 5x^4$.

Solución Por (3) y (5),

$$\frac{dy}{dx} = 5\frac{d}{dx}x^4 = 5(4x^3) = 20x^3.$$

Teorema 3.2.4 Reglas de suma y diferencia

Si f y g son diferenciables en x, entonces $f + g$ y $f - g$ son diferenciables en x, y

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x), \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x). \tag{7}$$

DEMOSTRACIÓN DE (6) Sea $G(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x + h) - G(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x + h) + g(x + h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x) + g(x + h) - g(x)}{h} \quad \leftarrow \text{reordenando términ} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

puesto que los límites existen, el límite de una suma es la suma de los límites →

El teorema 3.2.4 se cumple para cualquier suma finita de diferenciables. Por ejemplo, si f, g y h son diferenciables en x, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x) + h(x)] = f'(x) + g'(x) + h'(x).$$

Ya que $f - g$ puede escribirse como una suma, $f + (-g)$, no es necesario demostrar (7) puesto que el resultado se concluye de (6) y (5). Por tanto, el teorema 3.2.4 puede plantearse coloquialmente como:

- La derivada de una suma es la suma de las derivadas.

Derivada de un polinomio Como sabemos cómo diferenciar potencias de x y múltiplos constantes de esas potencias, resulta fácil diferenciar sumas de estos múltiplos constantes. La derivada de una función polinomial es particularmente fácil de obtener. Por ejemplo, ahora vemos fácilmente que la derivada de la función polinomial $f(x) = 6x^{100} + 4x^{35}$, mencionada en la introducción de esta sección, es $f'(x) = 600x^{99} + 140x^{34}$.

EJEMPLO 3 Polinomio con seis términos

Diferencie $y = 4x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 13x + 6$.

Solución Al usar (3), (5) y (6) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{d}{dx}x^5 - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}x^4 + 9\frac{d}{dx}x^3 + 10\frac{d}{dx}x^2 - 13\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}6.$$

Puesto que $\frac{d}{dx}6 = 0$ por (4), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 4(5x^4) - \frac{1}{2}(4x^3) + 9(3x^2) + 10(2x) - 13(1) + 0\\ &= 20x^4 - 2x^3 + 27x^2 + 20x - 13.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Recta tangente

Encuentre una ecuación de una recta tangente a la gráfica $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x$ en el punto correspondiente a $x = -1$.

Solución Por la regla de la suma,

$$f'(x) = 3(4x^3) + 2(3x^2) - 7(1) = 12x^3 + 6x^2 - 7.$$

Cuando las f y f' se evalúan en el mismo número $x = -1$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(-1) &= 8 && \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (-1, 8)\\ f'(-1) &= -13. && \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } (-1, 8) \text{ es } -13\end{aligned}$$

Con la ecuación punto-pendiente obtenemos una ecuación de la recta tangente

$$y - 8 = -13(x - (-1)) \quad \text{o bien,} \quad y = -13x - 5.$$

■

Volver a escribir una función En algunas circunstancias, para aplicar una regla de diferenciación de manera eficiente puede ser necesario *volver a escribir* una expresión en una forma alterna. Esta forma alterna a menudo es resultado de algo de manipulación algebraica o una aplicación de las leyes de los exponentes. Por ejemplo, es posible usar (3) para diferenciar las siguientes expresiones, que primero reescribimos usando las leyes de los exponentes

◀ Vale la pena recordar este análisis.

$$\boxed{\frac{4}{x^2}, \quad \frac{10}{\sqrt{x}}, \quad \sqrt{x^3}} \quad \rightarrow \quad \text{las raíces cuadradas se vuelven a escribir como potencias} \rightarrow \quad \frac{4}{x^2}, \quad \frac{10}{x^{1/2}}, \quad (x^3)^{1/2},$$

$$\text{luego se vuelve a escribir usando exponentes negativos} \quad \rightarrow \quad 4x^{-2}, \quad 10x^{-1/2}, \quad x^{3/2},$$

$$\text{la derivada de cada término usando (3)} \quad \rightarrow \quad \boxed{-8x^{-3}, \quad -5x^{-3/2}, \quad \frac{3}{2}x^{1/2}}.$$

Una función como $f(x) = (5x + 2)/x^2$ puede escribirse de nuevo como dos fracciones

$$f(x) = \frac{5x+2}{x^2} = \frac{5x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 5x^{-1} + 2x^{-2}.$$

Por la última forma de f, ahora resulta evidente que la derivada f' es

$$f'(x) = 5(-x^{-2}) + 2(-2x^{-3}) = -\frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}.$$

EJEMPLO 5 Volver a escribir los términos de una función

Diferencie $y = 4\sqrt{x} + \dfrac{8}{x} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} + 10$.

Solución Antes de diferenciar, los tres primeros términos se vuelven a escribir como potencias de x:

$$y = 4x^{1/2} + 8x^{-1} - 6x^{-1/3} + 10.$$

Así,
$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{d}{dx}x^{1/2} + 8\frac{d}{dx}x^{-1} - 6\frac{d}{dx}x^{-1/3} + \frac{d}{dx}10.$$

Por la regla de potencias (3) y (4) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 4\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} + 8\cdot(-1)x^{-2} - 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3} + 0\\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^{4/3}}.\end{aligned}$$

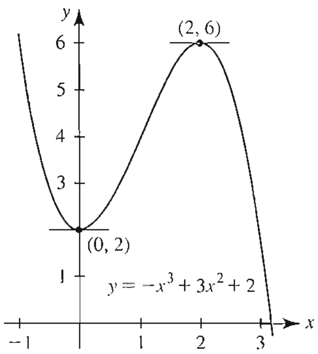


FIGURA 3.2.3 Gráfica de la función en el ejemplo 6

EJEMPLO 6 Tangentes horizontales

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$ donde la recta tangente es horizontal.

Solución En un punto $(x, f(x))$ sobre la gráfica de f donde la tangente es horizontal, debemos tener $f'(x) = 0$. La derivada de f es $f'(x) = -3x^2 + 6x$ y las soluciones de $f'(x) = -3x^2 + 6x = 0$ o $-3x(x-2) = 0$ son $x = 0$ y $x = 2$. Así, los puntos correspondientes son $(0, f(0)) = (0, 2)$ y $(2, f(2)) = (2, 6)$. Vea la FIGURA 3.2.3.

Recta normal Una **recta normal** en un punto P sobre una gráfica es una recta perpendicular a la recta tangente en P.

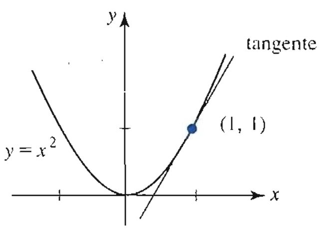


FIGURA 3.2.4 Recta normal en el ejemplo 7

EJEMPLO 7 Ecuación de una recta normal

Encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = x^2$ en $x = 1$.

Solución Puesto que $dy/dx = 2x$, sabemos que $m_{\tan} = 2$ en $(1, 1)$. Por tanto, la pendiente de la recta normal que se muestra en verde en la FIGURA 3.2.4 es el negativo recíproco de la pendiente de la recta tangente; es decir, $m = -\frac{1}{2}$. Por la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, entonces una ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \text{o bien,} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

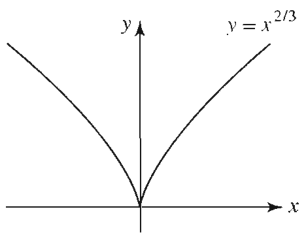


FIGURA 3.2.5 Gráfica de la función en el ejemplo 8

EJEMPLO 8 Tangente vertical

Para la función potencia $f(x) = x^{2/3}$ la derivada es

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}.$$

Observe que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ mientras $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. Puesto que f es continua en $x = 0$ y $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to 0$, concluimos que el eje y es una tangente vertical en $(0, 0)$. Este hecho resulta evidente a partir de la gráfica en la FIGURA 3.2.5.

Cúspide Se dice que la gráfica de $f(x) = x^{2/3}$ en el ejemplo 8 tiene una **cúspide** en el origen. En general, la gráfica de una función $y = f(x)$ tiene una cúspide en un punto $(a, f(a))$ si f es continua en a, $f'(x)$ tiene signos opuestos a cualquier lado de a, y $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to a$.

Derivadas de orden superior Hemos visto que la derivada $f'(x)$ es una función derivada de $y = f(x)$. Al diferenciar la primera derivada obtenemos otra función denominada **segunda derivada**, que se denota por $f''(x)$. En términos del símbolo de operación d/dx, la segunda derivada con respecto a x la definimos como la función que se obtiene al diferenciar dos veces consecutivas a $y = f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

La segunda derivada suele denotarse por los símbolos

$$f''(x), \quad y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x), \quad D^2, \quad D_x^2.$$

EJEMPLO 9 Segunda derivada

Encuentre la segunda derivada de $y = \dfrac{1}{x^3}$.

Solución Primero se simplifica la ecuación al escribirla como $y = x^{-3}$. Luego, por la regla de potencias (3) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}.$$

La segunda derivada se obtiene al diferenciar la primera derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-3x^{-4}) = -3(-4x^{-5}) = 12x^{-5} = \frac{12}{x^5}. \quad \blacksquare$$

Si se supone que todas las derivadas existen, es posible diferenciar una función $y = f(x)$ tantas veces como se quiera. La **tercera derivada** es la derivada de la segunda derivada; la **cuarta derivada** es la derivada de la tercera derivada; y así sucesivamente. Las derivadas tercera y cuarta se denotan por d^3y/dx^3 y d^4y/dx^4, y se definen como

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \quad \text{y} \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right).$$

En general, si n es un entero positivo, entonces la **n-ésima derivada** se define como

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Otras notaciones para las primeras derivadas n son

$$\begin{array}{l}
f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \quad f^{(4)}(x), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x),\\
y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{(4)}, \quad \ldots, \quad y^{(n)},\\
\dfrac{d}{dx}f(x), \quad \dfrac{d^2}{dx^2}f(x), \quad \dfrac{d^3}{dx^3}f(x), \quad \dfrac{d^4}{dx^4}f(x), \quad \ldots, \quad \dfrac{d^n}{dx^n}f(x),\\
D, \quad D^2, \quad D^3, \quad D^4, \quad \ldots, \quad D^n,\\
D_x, \quad D_x^2, \quad D_x^3, \quad D_x^4, \quad \ldots, \quad D_x^n.
\end{array}$$

Observe que la notación "prima" se usa para denotar sólo las tres primeras derivadas; después de eso se usa el supraíndice $y^{(4)}$, $y^{(5)}$, y así sucesivamente. El **valor de la n-ésima derivada** de una función $y = f(x)$ en un número a se denota por

$$f^{(n)}(a), \qquad y^{(n)}(a) \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=a}.$$

EJEMPLO 10 Quinta derivada

Encuentre las cinco primeras derivadas de $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 5x$.

Solución Tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^3 - 18x^2 + 14x + 5 \\ f''(x) &= 24x^2 - 36x + 14 \\ f'''(x) &= 48x - 36 \\ f^{(4)}(x) &= 48 \\ f^{(5)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Después de reflexionar un momento, usted debe convencerse que al derivar la $(n + 1)$ veces una función polinomial de grado n el resultado es cero.

$\frac{d}{dx}$ NOTAS DESDE EL AULA

i) En los diversos contextos de ciencias, ingeniería y negocios, las funciones a menudo se expresan en otras variables distintas a x y y. De manera correspondiente, la notación de la derivada debe adaptarse a los nuevos símbolos. Por ejemplo,

Función	*Derivada*
$v(t) = 32t$	$v'(t) = \frac{dv}{dt} = 32$
$A(r) = \pi r^2$	$A'(r) = \frac{dA}{dr} = 2\pi r$
$r(\theta) = 4\theta^2 - 3\theta$	$r'(\theta) = \frac{dr}{d\theta} = 8\theta - 3$
$D(p) = 800 - 129p + p^2$	$D'(p) = \frac{dD}{dp} = -129 + 2p.$

ii) Quizá se pregunte qué interpretación puede darse a las derivadas de orden superior. Si piensa en términos de gráficas, entonces f'' proporciona la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la función f'; f''' proporciona la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la función f'', y así sucesivamente. Además, si f es diferenciable, entonces la primera derivada f' proporciona la razón de cambio instantánea de f. En forma semejante, si f' es diferenciable, entonces f'' proporciona la razón de cambio instantánea de f'.

Ejercicios 3.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-10.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-8, encuentre dy/dx.

1. $y = -18$

2. $y = \pi^6$

3. $y = x^9$

4. $y = 4x^{12}$

5. $y = 7x^2 - 4x$

6. $y = 6x^3 + 3x^2 - 10$

7. $y = 4\sqrt{x} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$

8. $y = \dfrac{x - x^2}{\sqrt{x}}$

En los problemas 9-16, encuentre $f'(x)$. Simplifique.

9. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + 9x^2 + 1$

10. $f(x) = -\frac{2}{3}x^6 + 4x^5 - 13x^2 + 8x + 2$

11. $f(x) = x^3(4x^2 - 5x - 6)$

12. $f(x) = \dfrac{2x^5 + 3x^4 - x^3 + 2}{x^2}$

13. $f(x) = x^2(x^2 + 5)^2$ 14. $f(x) = (x^3 + x^2)^3$

15. $f(x) = (4\sqrt{x} + 1)^2$ 16. $f(x) = (9 + x)(9 - x)$

En los problemas 17-20, encuentre la derivada de la función dada.

17. $h(u) = (4u)^3$ 18. $p(t) = (2t)^{-4} - (2t^{-1})^2$

19. $g(r) = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r^3} + \dfrac{1}{r^4}$ 20. $Q(t) = \dfrac{t^5 + 4t^2 - 3}{6}$

En los problemas 21-24, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

21. $y = 2x^3 - 1;\ x = -1$ 22. $y = -x + \dfrac{8}{x};\ x = 2$

23. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x};\ x = 4$ 24. $f(x) = -x^3 + 6x^2;\ x = 1$

En los problemas 25-28, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

25. $y = x^2 - 8x + 5$ 26. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

27. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ 28. $f(x) = x^4 - 4x^3$

En los problemas 29-32, encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

29. $y = -x^2 + 1;\ x = 2$ 30. $y = x^3;\ x = 1$

31. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2;\ x = 4$ 32. $f(x) = x^4 - x;\ x = -1$

En los problemas 33-38, encuentre la segunda derivada de la función dada.

33. $y = -x^2 + 3x - 7$ 34. $y = 15x^2 - 24\sqrt{x}$

35. $y = (-4x + 9)^2$ 36. $y = 2x^5 + 4x^3 - 6x^2$

37. $f(x) = 10x^{-2}$ 38. $f(x) = x + \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^3$

En los problemas 39 y 40, encuentre la derivada de orden superior indicada.

39. $f(x) = 4x^6 + x^5 - x^3;\quad f^{(4)}(x)$

40. $y = x^4 - \dfrac{10}{x};\quad d^5y/dx^5$

En los problemas 41 y 42, determine intervalos para los cuales $f'(x) > 0$ e intervalos para los cuales $f'(x) < 0$.

41. $f(x) = x^2 + 8x - 4$ 42. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

En los problemas 43 y 44, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de f donde $f''(x) = 0$.

43. $f(x) = x^3 + 12x^2 + 20x$ 44. $f(x) = x^4 - 2x^3$

En los problemas 45 y 46, determine intervalos para los cuales $f''(x) > 0$ e intervalos para los cuales $f''(x) < 0$.

45. $f(x) = (x - 1)^3$ 46. $f(x) = x^3 + x^2$

Una ecuación que contiene una o más derivadas de una función desconocida $y(x)$ se denomina **ecuación diferencial**. En los problemas 47 y 48, demuestre que la función satisface la ecuación diferencia dada.

47. $y = x^{-1} + x^4;\quad x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$

48. $y = x + x^3 + 4;\quad x^2y'' - 3xy' + 3y = 12$

49. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ donde la pendiente de la recta tangente es 5.

50. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = x^2 - x$ donde la recta tangente es $3x - 9y - 4 = 0$.

51. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = x^2 - x$ donde la pendiente de la recta normal es 2.

52. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$ donde la recta tangente es paralela a la recta $3x - 2y + 1 = 0$.

53. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ en el punto donde el valor de la segunda derivada es cero.

54. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^4$ en el punto donde el valor de la tercera derivada es 12.

Aplicaciones

55. El volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre el área superficial S de la esfera si S es la razón de cambio instantánea del volumen con respecto al radio.

56. Según el físico francés Jean Louis Poiseuille (1799-1869), la velocidad v del flujo sanguíneo en una arteria cuya sección transversal circular es constante de radio R es $v(r) = (P/4\nu l)(R^2 - r^2)$, donde P, ν y l son constantes. ¿Cuál es la velocidad del flujo sanguíneo en el valor de r para el cual $v'(r) = 0$?

57. La energía potencial de un sistema masa-resorte cuando el resorte se estira una distancia de x unidades es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, donde k es la constante del resorte. La fuerza ejercida sobre la masa es $F = -dU/dx$. Encuentre la fuerza si la constante del resorte es 30 N/m y la cantidad de estiramiento es $\frac{1}{2}$ m.

58. La altura s por arriba del nivel del suelo de un proyectil en el instante t está dada por

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0,$$

donde g, v_0 y s_0 son constantes. Encuentre la razón de cambio instantánea de s con respecto a t en $t = 4$.

Piense en ello

En los problemas 59 y 60, el símbolo n representa un entero positivo. Encuentre una fórmula para la derivada dada.

59. $\dfrac{d^n}{dx^n}x^n$ 60. $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{x}$

61. A partir de las gráficas de f y g en la FIGURA 3.2.6, determine qué función es la derivada de la otra. Explique verbalmente su decisión.

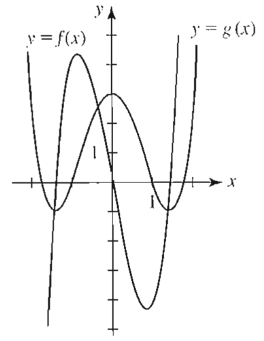


FIGURA 3.2.6 Gráficas para el problema 61

62. A partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ dada en la FIGURA 3.2.7, trace la gráfica de f'.

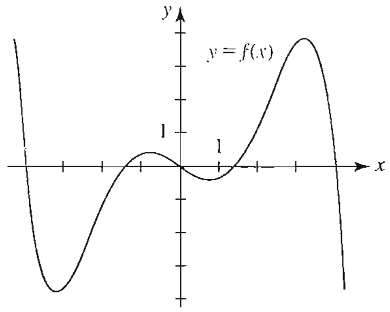


FIGURA 3.2.7 Gráfica para el problema 62

63. Encuentre una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(-1) = -11$, $f'(-1) = 7$ y $f''(-1) = -4$.
64. Se dice que las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son **ortogonales** si las rectas tangentes a cada gráfica son perpendiculares en cada punto de intersección. Demuestre que las gráficas de $y = \frac{1}{8}x^2$ y $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ son ortogonales.
65. Encuentre los valores de b y c de modo que la gráfica de $f(x) = x^2 + bx$ tenga la recta tangente $y = 2x + c$ en $x = -3$.
66. Encuentre una ecuación de la(s) recta(s) que pasa(n) por $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ y es(son) tangente(s) a la gráfica de $f(x) = x^2 + 2x + 2$.
67. Encuentre los puntos de la gráfica de $f(x) = x^2 - 5$ tal que la línea tangente a los puntos interseque al eje en x $(-3, 0)$.
68. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $f(x) = x^2$ tal que la recta tangente interseque al eje y en $(0, -2)$.
69. Explique por qué la gráfica de $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3$ no tiene recta tangente con pendiente -1.
70. Encuentre coeficientes A y B de modo que la función $y = Ax^2 + Bx$ satisfaga la ecuación diferencial $2y'' + 3y' = x - 1$.
71. Encuentre valores de a y b tales que la pendiente de la tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx$ en $(1, 4)$ sea -5.
72. Encuentre las pendientes de todas las rectas normales a la gráfica de $f(x) = x^2$ que pasan por el punto $(2, 4)$. [*Sugerencia*: Elabore una figura y observe que *en* $(2, 4)$ sólo hay una recta normal.]
73. Encuentre un punto sobre la gráfica de $f(x) = x^2 + x$ y un punto sobre la gráfica de $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ donde las rectas tangentes son paralelas.
74. Encuentre un punto sobre la gráfica de $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 2x$ donde la recta tangente tiene la menor pendiente posible.
75. Encuentre las condiciones sobre los coeficientes a, b y c de modo que la gráfica de la función polinomial

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga exactamente una tangente horizontal. Exactamente dos tangentes horizontales. Ninguna tangente horizontal.
76. Sea f una función diferenciable. Si $f'(x) > 0$ para toda x en el intervalo (a, b), trace gráficas posibles de f sobre el intervalo. Describa verbalmente el comportamiento de la gráfica de f sobre el intervalo. Repita si $f'(x) < 0$ para toda x en el intervalo (a, b).
77. Suponga que f es una función diferenciable tal que $f'(x) - f(x) = 0$. Encuentre $f^{(100)}(x)$.
78. Las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2 + 2x - 3$ dada por la FIGURA 3.2.8 muestran que hay dos rectas L_1 y L_2 que son simultáneamente tangentes a ambas gráficas. Encuentre los puntos de tangencia de ambas gráficas. Encuentre una ecuación para cada recta tangente.

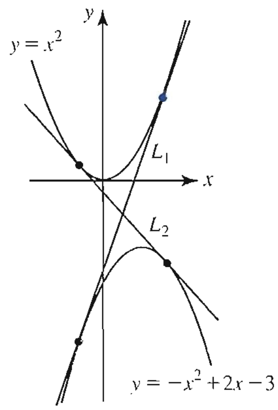


FIGURA 3.2.8 Gráficas para el problema 78

≡ Problemas con calculadora/SAC

79. *a*) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 2$.
b) Evalúe $f''(x)$ en $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$.
c) A partir de los datos del inciso *b*), ¿observa alguna relación entre la forma de la gráfica de f y los signos algebraicos de f''?
80. Use una calculadora o un sistema algebraico computacional para obtener la gráfica de las funciones dadas. Por inspección de las gráficas, indique dónde cada función puede no ser diferenciable. Encuentre $f'(x)$ para todos los puntos donde f es diferenciable.
a) $f(x) = |x^2 - 2x|$ *b*) $f(x) = |x^3 - 1|$

3.3 Reglas de productos y cocientes

▌Introducción Hasta el momento sabemos que la derivada de una función constante y una potencia de x son, a su vez:

$$\frac{d}{dx}c = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \tag{1}$$

También sabemos que para funciones diferenciables f y g:

$$\frac{d}{dx}cf(x) = cf'(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x). \tag{2}$$

Aunque los resultados en (1) y (2) nos permiten diferenciar rápidamente funciones algebraicas (como polinomios), ni (1) ni (2) constituyen una ayuda inmediata para encontrar la derivada de funciones como $y = x^4\sqrt{x^2+4}$ o $y = x/(2x+1)$. Se requieren reglas adicionales para diferenciar productos fg y cocientes f/g.

Regla del producto Las reglas de diferenciación y las derivadas de funciones surgen en última instancia de la definición de la derivada. La regla de la suma en (2), que se obtuvo en la sección precedente, se concluye de la definición y del hecho de que el límite de una suma es la suma de los límites siempre que los límites existan. También sabemos que cuando los límites existen, el límite de un producto es el producto de los límites. Al razonar por analogía, parecería plausible que la derivada de un producto de dos funciones es el producto de las derivadas. Lamentablemente, la regla del producto que se presenta a continuación *no es* tan simple.

Teorema 3.3.1 Regla del producto

Si f y g son funciones diferenciables en x, entonces fg es diferenciable en x, y

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $G(x) = f(x)g(x)$. Entonces por la definición de la derivada junto con algo de manipulación algebraica:

$$G'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) \overbrace{-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)}^{\text{cero}} - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0}g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Debido a que f es diferenciable en x, es continua ahí y entonces $\lim_{h\to 0}f(x+h) = f(x)$. Además, $\lim_{h\to 0}g(x) = g(x)$. Por tanto, la última ecuación se vuelve

$$G'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \qquad \blacksquare$$

La regla del producto se memoriza mejor en palabras:

- La primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.

EJEMPLO 1 Regla del producto

Diferencie $y = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$.

Solución De la regla del producto (3),

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{(x^3-2x^2+3)}^{\text{primera}}\cdot\overbrace{\frac{d}{dx}(7x^2-4x)}^{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la segunda}}} + \overbrace{(7x^2-4x)}^{\text{segunda}}\cdot\overbrace{\frac{d}{dx}(x^3-2x^2+3)}^{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la primera}}}$$

$$= (x^3-2x^2+3)(14x-4) + (7x^2-4x)(3x^2-4x)$$

$$= 35x^4 - 72x^3 + 24x^2 + 42x - 12.$$

Solución alterna Los dos términos en la función dada pueden multiplicarse para obtener un polinomio de quinto grado. Luego, la derivada puede obtenerse usando la regla de la suma. ■

EJEMPLO 2 Recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = (1 + \sqrt{x})(x - 2)$ en $x = 4$.

Solución Antes de tomar la derivada, $\sqrt{x}$ volvemos a escribirla como $x^{1/2}$. Luego, por la regla del producto (3),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (1 + x^{1/2})\frac{d}{dx}(x - 2) + (x - 2)\frac{d}{dx}(1 + x^{1/2})\\ &= (1 + x^{1/2}) \cdot 1 + (x - 2) \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}\\ &= \frac{3x + 2\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Al evaluar la función dada y su derivada en $x = 4$ obtenemos:

$$\begin{aligned} y(4) &= (1 + \sqrt{4})(4 - 2) = 6 && \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (4, 6)\\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} &= \frac{12 + 2\sqrt{4} - 2}{2\sqrt{4}} = \frac{7}{2}. && \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } (4, 6) \text{ es } \tfrac{7}{2}\end{aligned}$$

Por la forma punto-pendiente, la recta tangente es

$$y - 6 = \frac{7}{2}(x - 4) \qquad \text{o bien,} \qquad y = \frac{7}{2}x - 8.$$ ■

Aunque (3) se ha planteado sólo para el producto de dos funciones, puede aplicarse a funciones con un mayor número de factores. La idea consiste en agrupar dos (o más) funciones y tratar este agrupamiento como una función. El siguiente ejemplo ilustra la técnica.

EJEMPLO 3 Producto de tres funciones

Diferencie $y = (4x + 1)(2x^2 - x)(x^3 - 8x)$.

Solución Los dos primeros factores se identifican como la "primera función":

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{(4x + 1)(2x^2 - x)}^{\text{primera}}\overbrace{\frac{d}{dx}(x^3 - 8x)}^{\text{derivada de la segunda}} + \overbrace{(x^3 - 8x)}^{\text{segunda}}\overbrace{\frac{d}{dx}(4x + 1)(2x^2 - x)}^{\text{derivada de la primera}}.$$

Observe que para encontrar la derivada de la primera función es necesario aplicar la regla del producto por segunda ocasión:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (4x + 1)(2x^2 - x) \cdot (3x^2 - 8) + (x^3 - 8x) \cdot \overbrace{[(4x + 1)(4x - 1) + (2x^2 - x) \cdot 4]}^{\text{De nuevo la regla del producto}}\\ &= (4x + 1)(2x^2 - x)(3x^2 - 8) + (x^3 - 8x)(16x^2 - 1) + 4(x^3 - 8x)(2x^2 - x).\end{aligned}$$ ■

Regla del cociente A continuación se presenta la derivada del cociente de dos funciones f y g.

Teorema 3.3.2 Regla del cociente

Si f y g son funciones diferenciables en x y $g(x) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable en x, y

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \qquad (4)$$

DEMOSTRACIÓN Sea $G(x) = f(x)/g(x)$. Entonces

$$G'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h)\overbrace{-g(x)f(x)+g(x)f(x)}^{\text{cero}}-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0}g(x)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}f(x)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0}g(x+h)\cdot\lim\limits_{h\to 0}g(x)}.$$

Puesto que se supone que todos los límites existen, la última línea es lo mismo que

$$G'(x) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$ ■

En palabras, la regla del cociente empieza con el denominador:

- El denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el denominador al cuadrado.

EJEMPLO 4 Regla del cociente

Diferencie $y = \dfrac{3x^2-1}{2x^3+5x^2+7}$.

Solución Por la regla del cociente (4),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overbrace{(2x^3+5x^2+7)}^{\text{denominador}}\cdot\overbrace{\frac{d}{dx}(3x^2-1)}^{\text{derivada del numerador}}-\overbrace{(3x^2-1)}^{\text{numerador}}\cdot\overbrace{\frac{d}{dx}(2x^3+5x^2+7)}^{\text{derivada del denominador}}}{\underbrace{(2x^3+5x^2+7)^2}_{\text{cuadrado del denominador}}}$$

$$= \frac{(2x^3+5x^2+7)\cdot 6x-(3x^2-1)\cdot(6x^2+10x)}{(2x^3+5x^2+7)^2} \quad \leftarrow \text{se multiplica por el numerador}$$

$$= \frac{-6x^4+6x^2+52x}{(2x^3+5x^2+7)^2}.$$ ■

EJEMPLO 5 Reglas del producto y el cociente

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $y = \dfrac{(x^2+1)(2x^2+1)}{3x^2+1}$ donde la recta tangente es horizontal.

Solución Se empieza con la regla del cociente y luego se usa la regla del producto al diferenciar el numerador:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2+1)\cdot \overbrace{\frac{d}{dx}[(x^2+1)(2x^2+1)]}^{\text{Regla del producto aquí}} - (x^2+1)(2x^2+1)\cdot \frac{d}{dx}(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(3x^2+1)[(x^2+1)4x + (2x^2+1)2x] - (x^2+1)(2x^2+1)6x}{(3x^2+1)^2} \quad \leftarrow \text{se multiplica por el numerador}$$

$$= \frac{12x^5+8x^3}{(3x^2+1)^2}.$$

En un punto donde la recta tangente es horizontal, debe tenerse $dy/dx = 0$. La derivada que acaba de encontrarse sólo puede ser 0 cuando el numerador satisface

Por supuesto, los valores de x que hacen cero al numerador *no* deben hacer simultáneamente cero al denominador.

$$12x^5 + 8x^3 = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad x^3(12x^2+8) = 0. \tag{5}$$

En (5), debido a que $12x^2 + 8 \neq 0$ para todos los números reales x, debe tenerse $x = 0$. Al sustituir este número en la función obtenemos $y(0) = 1$. La recta tangente es horizontal en la intersección con el eje y, el punto $(0, 1)$. ■

Posdata: Otro repaso a la regla de potencias Recuerde que en la sección 3.2 establecimos que la regla de potencias, $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$, es válida para todos los números reales exponentes n. Ahora ya nos es posible demostrar la regla cuando el exponente es un entero negativo $-m$. Puesto que, por definición $x^{-m} = 1/x^m$, donde m es un entero positivo, la derivada de x^{-m} puede obtenerse por medio de la regla del cociente y las leyes de los exponentes:

$$\frac{d}{dx}x^{-m} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{x^m \cdot \frac{d}{dx}1 - 1\cdot\frac{d}{dx}x^m}{(x^m)^2} = -\frac{\overset{\substack{\text{se restan los exponentes}\\ \downarrow}}{mx^{m-1}}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}.$$

$\frac{d}{dx}$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Las reglas del producto y del cociente suelen conducir a expresiones que demandan simplificación. Si su respuesta a un problema no se parece a la que se proporciona en la sección de respuestas del texto, quizá no ha realizado suficientes simplificaciones. No quede contento con sólo llevar a cabo las partes mecánicas de las diversas reglas de diferenciación; siempre resulta una buena idea poner en práctica sus habilidades algebraicas.

ii) Algunas veces, la regla del cociente se usa cuando no es necesario. Aunque es posible usar esta regla para diferenciar funciones como

$$y = \frac{x^5}{6} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{10}{x^3},$$

es más simple (y rápido) volver a escribir las funciones como $y = \frac{1}{6}x^5$ y $y = 10x^{-3}$, y luego usar las reglas del múltiplo constante y de potencias:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}\frac{d}{dx}x^5 = \frac{5}{6}x^4 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = 10\frac{d}{dx}x^{-3} = -30x^{-4}.$$

Ejercicios 3.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-10.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre dy/dx.

1. $y = (x^2 - 7)(x^3 + 4x + 2)$

2. $y = (7x + 1)(x^4 - x^3 - 9x)$

3. $y = \left(4\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\left(2x - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)$

4. $y = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$

5. $y = \dfrac{10}{x^2 + 1}$
6. $y = \dfrac{5}{4x - 3}$
7. $y = \dfrac{3x + 1}{2x - 5}$
8. $y = \dfrac{2 - 3x}{7 - x}$
9. $y = (6x - 1)^2$
10. $y = (x^4 + 5x)^2$

En los problemas 11-20, encuentre $f'(x)$.

11. $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x^3}\right)(x^3 - 5x - 1)$
12. $f(x) = (x^2 - 1)\left(x^2 - 10x + \dfrac{2}{x^2}\right)$
13. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x^2 + x + 1}$
14. $f(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 2}{x(x^2 - 1)}$
15. $f(x) = (x + 1)(2x + 1)(3x + 1)$
16. $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - x)(3x^4 + 2x - 1)$
17. $f(x) = \dfrac{(2x + 1)(x - 5)}{3x + 2}$
18. $f(x) = \dfrac{x^5}{(x^2 + 1)(x^3 + 4)}$
19. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)\left(\dfrac{x + 1}{x + 3}\right)$
20. $f(x) = (x + 1)\left(x + 1 - \dfrac{1}{x + 2}\right)$

En los problemas 21-24, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

21. $y = \dfrac{x}{x - 1}$; $x = \dfrac{1}{2}$
22. $y = \dfrac{5x}{x^2 + 1}$; $x = 2$
23. $y = (2\sqrt{x} + x)(-2x^2 + 5x - 1)$; $x = 1$
24. $y = (2x^2 - 4)(x^3 + 5x + 3)$; $x = 0$

En los problemas 25-28, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

25. $y = (x^2 - 4)(x^2 - 6)$
26. $y = x(x - 1)^2$
27. $y = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$
28. $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x}$

En los problemas 29 y 30, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente tiene la pendiente indicada.

29. $y = \dfrac{x + 3}{x + 1}$; $m = -\dfrac{1}{8}$
30. $y = (x + 1)(2x + 5)$; $m = -3$

En los problemas 31 y 32, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente tiene la propiedad indicada.

31. $y = \dfrac{x + 4}{x + 5}$; perpendicular a $y = -x$
32. $y = \dfrac{x}{x + 1}$; paralela a $y = \dfrac{1}{4}x - 1$
33. Encuentre el valor de k tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (k + x)/x^2$ tiene pendiente 5 en $x = 2$.
34. Demuestre que la tangente a la gráfica de $f(x) = (x^2 + 14)/(x^2 + 9)$ en $x = 1$ es perpendicular a la tangente de la gráfica de $g(x) = (1 + x^2)(1 + 2x)$ en $x = 1$.

En los problemas 35-40, f y g son funciones diferenciables. Encuentre $F'(1)$ si $f(1) = 2$, $f'(1) = -3$ y $g(1) = 6$, $g'(1) = 2$.

35. $F(x) = 2f(x)g(x)$
36. $F(x) = x^2 f(x)g(x)$
37. $F(x) = \dfrac{2g(x)}{3f(x)}$
38. $F(x) = \dfrac{1 + 2f(x)}{x - g(x)}$
39. $F(x) = \left(\dfrac{4}{x} + f(x)\right)g(x)$
40. $F(x) = \dfrac{xf(x)}{g(x)}$
41. Suponga que $F(x) = \sqrt{x}f(x)$, donde f es una función diferenciable. Encuentre $F''(4)$ si $f(4) = -16$, $f'(4) = 2$ y $f''(4) = 3$.
42. Suponga que $F(x) = xf(x) + xg(x)$, donde f y g son funciones diferenciables. Encuentre $F''(0)$ si $f'(0) = -1$ y $g'(0) = 6$.
43. Suponga que $F(x) = f(x)/x$, donde f es una función diferenciable. Encuentre $F''(x)$.
44. Suponga que $F(x) = x^3 f(x)$, donde f es una función diferenciable. Encuentre $F'''(x)$.

En los problemas 45-48, determine intervalos para los cuales $f'(x) > 0$ e intervalos para los cuales $f'(x) < 0$.

45. $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 2x}$
46. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$
47. $f(x) = (-2x + 6)(4x + 7)$
48. $f(x) = (x - 2)(4x^2 + 8x + 4)$

≡ Aplicaciones

49. La ley de gravitación universal establece que la fuerza F entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados por una distancia r es $F = km_1m_2/r^2$, donde k es constante. ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de F con respecto a r cuando $r = \frac{1}{2}$ km?
50. La energía potencial U entre dos átomos en una molécula diatómica está dada por $U(x) = q_1/x^{12} - q_2/x^6$, donde q_1 y q_2 son constantes positivas y x es la distancia entre los átomos. La fuerza entre los átomos se define como $F(x) = -U'(x)$. Demuestre que $F\left(\sqrt[6]{2q_1/q_2}\right) = 0$.
51. La **ecuación de estado de Van der Waals** para un gas ideal es
$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$
donde P es la presión, V es el volumen por mol, R es la constante universal de los gases, T es la temperatura y a y b son constantes que dependen del gas. Encuentre dP/dV en el caso donde T es constante.
52. Para una lente convexa, la distancia focal f está relacionada con la distancia al objeto p y la distancia a la imagen q por la **ecuación de la lente**
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$
Encuentre la razón de cambio instantánea de q con respecto a p en el caso donde f es constante. Explique el significado del signo negativo en su respuesta. ¿Qué ocurre a q cuando p crece?

≡ Piense en ello

53. *a*) Grafique la función racional $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$.

b) Encuentre todos los puntos sobre la gráfica de f tales que las rectas normales pasen por el origen.

54. Suponga que $y = f(x)$ es una función diferenciable.

a) Encuentre dy/dx para $y = [f(x)]^2$.

b) Encuentre dy/dx para $y = [f(x)]^3$.

c) Conjeture una regla para encontrar la derivada de $y = [f(x)]^n$, donde n es un entero positivo.

d) Use su conjetura en el inciso *c*) para encontrar la derivada de $y = (x^2 + 2x - 6)^{500}$.

55. Suponga que $y_1(x)$ satisface la ecuación diferencial $y' + P(x)y = 0$, donde P es una función conocida. Demuestre que $y = u(x)y_1(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$y' + P(x)y = f(x)$$

siempre que $u(x)$ satisface $du/dx = f(x)/y_1(x)$.

3.4 Funciones trigonométricas

Introducción En esta sección desarrollaremos las derivadas de las seis funciones trigonométricas. Una vez que se han encontrado las derivadas de sen x y cos x es posible determinar las derivadas de tan x, cot x, sec x y csc x usando la regla del cociente encontrada en la sección precedente. De inmediato veremos que la derivada de sen x usa los dos siguientes resultados de límites

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \tag{1}$$

que se encontraron en la sección 2.4.

Derivadas del seno y coseno Para encontrar la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ se usa la definición básica de la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

y el proceso de cuatro pasos introducido en las secciones 2.7 y 3.1. En el primer paso usamos la fórmula de la suma para la función seno,

$$\operatorname{sen}(x_1 + x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2, \tag{3}$$

pero donde x y h desempeñan las partes de los símbolos x_1 y x_2.

i) $f(x + h) = \operatorname{sen}(x + h) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h$ ← por (3)

ii) $f(x + h) - f(x) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x$ ← se factoriza sen x de los términos primero y tercero

$= \operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h$

Como observamos en la línea siguiente, no es posible cancelar las h en el cociente diferencial, aunque es posible volver a escribir la expresión para usar los resultados sobre límites en (1).

iii)
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h}$$
$$= \operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

iv) En esta línea, el símbolo h desempeña la parte del símbolo x en (1):

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

A partir de los resultados sobre límites en (1), la última línea es lo mismo que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Por tanto,
$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x. \tag{4}$$

De manera semejante es posible demostrar que

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\text{sen } x. \tag{5}$$

Vea el problema 50 en los ejercicios 3.4.

EJEMPLO 1 Ecuación de una recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \text{sen } x$ en $x = 4\pi/3$.

Solución A partir de (4) la derivada de $f(x) = \text{sen } x$ es $f'(x) = \cos x$. Cuando éstas se evalúan en el mismo número $x = 4\pi/3$ obtenemos:

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \text{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } \left(\tfrac{4\pi}{3}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}. \quad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } \left(\tfrac{4\pi}{3}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ es } -\tfrac{1}{2}$$

A partir de la forma punto-pendiente de una recta, una ecuación de la recta tangente es

$$y + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) \quad \text{o bien,} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La tangente se muestra en rojo en la FIGURA 3.4.1. ■

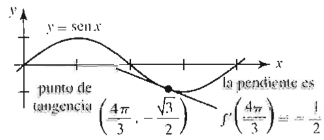


FIGURA 3.4.1 Recta tangente en el ejemplo 1

Otras funciones trigonométricas Los resultados en (4) y (5) pueden usarse junto con las reglas de diferenciación para encontrar las derivadas de la tangente, cotangente, secante y cosecante.

Para diferenciar $\tan x = \text{sen } x/\cos x$ se usa la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}\text{sen } x - \text{sen } x \dfrac{d}{dx}\cos x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x\,(\cos x) - \text{sen } x\,(-\text{sen } x)}{(\cos x)^2} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}^{\text{esto es igual a 1}}}{\cos^2 x}.$$

Al usar la identidad pitagórica fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y el hecho de que $1/\cos^2 x = (1/\cos x)^2 = \sec^2 x$, la última ecuación se simplifica a

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x. \tag{6}$$

La fórmula de la derivada para la cotangente

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x \tag{7}$$

se obtiene en forma análoga y se deja como ejercicio. Vea el problema 51 en los ejercicios 3.4.

Así, $\sec x = 1/\cos x$. En consecuencia, es posible usar otra vez la regla del cociente para encontrar la derivada de la función secante:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}1 - 1 \cdot \dfrac{d}{dx}\cos x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{0 - (-\text{sen } x)}{(\cos x)^2} = \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}. \tag{8}$$

Al escribir $\quad \dfrac{\text{sen } x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \sec x \tan x$

podemos expresar (8) como

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x. \qquad (9$$

El resultado final también se concluye de inmediato a partir de la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x. \qquad (10$$

Vea el problema 52 en los ejercicios 3.4.

EJEMPLO 2 Regla del producto

Diferencie $y = x^2$ sen x.

Solución La regla del producto junto con (4) da

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx} x^2 \\ &= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Regla del producto

Diferencie $y = \cos^2 x$.

Solución Una forma de diferenciar esta función es reconocerla como un producto: $y =$ $(\cos x)(\cos x)$. Luego, por la regla del producto y (5),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \cos x \frac{d}{dx}\cos x + \cos x \frac{d}{dx}\cos x \\ &= \cos x(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(-\operatorname{sen} x) \\ &= -2 \operatorname{sen} x \cos x.\end{aligned}$$

En la siguiente sección veremos que hay un procedimiento alterno para diferenciar una potencia de una función.

EJEMPLO 4 Regla del cociente

Diferencie $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \sec x}$.

Solución Por la regla del cociente, (4) y (9),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(2 + \sec x)\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(2 + \sec x)}{(2 + \sec x)^2} \\ &= \frac{(2 + \sec x)\cos x - \operatorname{sen} x\,(\sec x \tan x)}{(2 + \sec x)^2} \quad \leftarrow \begin{array}{l}\sec x \cos x = 1 \text{ y} \\ \operatorname{sen} x(\sec x \tan x) = \operatorname{sen}^2 x/\cos^2 x\end{array} \\ &= \frac{1 + 2\cos x - \tan^2 x}{(2 + \sec x)^2}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Segunda derivada

Encuentre la segunda derivada de $f(x) = \sec x$.

Solución Por (9), la primera derivada es

$$f'(x) = \sec x \tan x.$$

Para obtener la segunda derivada, ahora es necesario usar la regla del producto junto con (6) y (9):

$$\begin{aligned}f''(x) &= \sec x \frac{d}{dx}\tan x + \tan x \frac{d}{dx}\sec x \\ &= \sec x(\sec^2 x) + \tan x(\sec x \tan x) \\ &= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x.\end{aligned}$$

Para referencia futura, a continuación se resumen las fórmulas de derivadas presentadas en esta sección.

Teorema 3.4.1 Derivadas de funciones trigonométricas

Las derivadas de las seis funciones trigonométricas son

$$\frac{d}{dx}\,\text{sen}\,x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\text{sen}\,x, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x, \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x. \tag{13}$$

$\frac{d}{dx}$ NOTAS DESDE EL AULA

Cuando trabaje los problemas en los ejercicios 3.4, puede que no obtenga la misma respuesta que la proporcionada en la sección de respuestas al final del libro. Esto se debe a que hay muchas identidades trigonométricas cuyas respuestas pueden expresarse en una forma más breve. Por ejemplo, la respuesta en el ejemplo 3:

$$\frac{dy}{dx} = -2\,\text{sen}\,x\cos x \quad \text{es la misma que} \quad \frac{dy}{dx} = -\text{sen}\,2x$$

por la fórmula del ángulo doble para la función seno. Intente resolver las diferencias entre su respuesta y la respuesta proporcionada.

Ejercicios 3.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-10.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-12, encuentre dy/dx.

1. $y = x^2 - \cos x$
2. $y = 4x^3 + x + 5\,\text{sen}\,x$
3. $y = 1 + 7\,\text{sen}\,x - \tan x$
4. $y = 3\cos x - 5\cot x$
5. $y = x\,\text{sen}\,x$
6. $y = (4\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x})\cos x$
7. $y = (x^3 - 2)\tan x$
8. $y = \cos x \cot x$
9. $y = (x^2 + \text{sen}\,x)\sec x$
10. $y = \csc x \tan x$
11. $y = \cos^2 x + \text{sen}^2 x$
12. $y = x^3 \cos x - x^3\,\text{sen}\,x$

En los problemas 13-22, encuentre $f'(x)$. Simplifique.

13. $f(x) = (\csc x)^{-1}$
14. $f(x) = \dfrac{2}{\cos x \cot x}$
15. $f(x) = \dfrac{\cot x}{x + 1}$
16. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{1 + \cos x}$
17. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2\tan x}$
18. $f(x) = \dfrac{2 + \text{sen}\,x}{x}$
19. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,x}{1 + \cos x}$
20. $f(x) = \dfrac{1 + \csc x}{1 + \sec x}$
21. $f(x) = x^4\,\text{sen}\,x \tan x$
22. $f(x) = \dfrac{1 + \text{sen}\,x}{x \cos x}$

En los problemas 23-26, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

23. $f(x) = \cos x;\ x = \pi/3$
24. $f(x) = \tan x;\ x = \pi$
25. $f(x) = \sec x;\ x = \pi/6$
26. $f(x) = \csc x;\ x = \pi/2$

En los problemas 27-30, considere la gráfica de la función dada sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. Encuentre las coordenadas x del o de los puntos sobre la gráfica de la función donde la recta tangente es horizontal.

27. $f(x) = x + 2\cos x$
28. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,x}{2 - \cos x}$
29. $f(x) = \dfrac{1}{x + \cos x}$
30. $f(x) = \text{sen}\,x + \cos x$

En los problemas 31-34, encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

31. $f(x) = \text{sen}\,x;\ x = 4\pi/3$
32. $f(x) = \tan^2 x;\ x = \pi/4$
33. $f(x) = x\cos x;\ x = \pi$
34. $f(x) = \dfrac{x}{1 + \text{sen}\,x};\ x = \pi/2$

En los problemas 35 y 36, use una identidad trigonométrica idónea para encontrar la derivada de la función dada.

35. $f(x) = \text{sen}\,2x$
36. $f(x) = \cos^2\dfrac{x}{2}$

En los problemas 37-42, encuentre la segunda derivada de la función dada.

37. $f(x) = x\,\text{sen}\,x$
38. $f(x) = 3x - x^2\cos x$
39. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,x}{x}$
40. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \cos x}$
41. $y = \csc x$
42. $y = \tan x$

En los problemas 43 y 44, C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

43. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x \cos x; \quad y'' + y = \operatorname{sen} x$

44. $y = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}; \quad x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$

≡ Aplicaciones

45. Cuando el ángulo de elevación del Sol es θ, un poste telefónico de 40 pies de altura proyecta una sombra de longitud s como se muestra en la FIGURA 3.4.2. Encuentre la razón de cambio de s con respecto a θ cuando $\theta = \pi/3$ radianes. Explique el significado del signo menos en la respuesta.

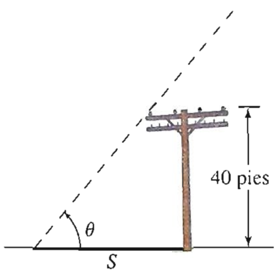


FIGURA 3.4.2 Sombra en el problema 45

46. Los dos extremos de una tabla de 10 pies de longitud se sujetan a rieles perpendiculares como se muestra en la FIGURA 3.4.3, de modo que el punto P puede desplazarse con libertad sobre la vertical y el punto R puede moverse libremente en dirección horizontal.

a) Exprese el área A del triángulo PQR como una función del ángulo θ indicado.

b) Encuentre la razón de cambio de A con respecto a θ.

c) Al inicio la tabla está en posición plana sobre el riel horizontal. Suponga que luego el punto R se mueve en dirección del punto Q, obligando así al punto P a moverse hacia arriba sobre el riel vertical. Al principio el área del triángulo es $0\ (\theta = 0)$, pero luego aumenta durante un instante a medida que θ crece y después disminuye cuando R tiende a Q. Cuando la tabla está vertical, el área del triángulo es $0\ (\theta = \pi/2)$ de nuevo. Grafique la derivada $dA/d\theta$. Interprete la gráfica para encontrar valores de θ para los cuales A es creciente y los valores de θ para los cuales A es decreciente. Luego compruebe su interpretación de la gráfica de la derivada al graficar $A(\theta)$.

d) Use las gráficas en el inciso *c*) para encontrar el valor de θ para el cual el área del triángulo es máxima.

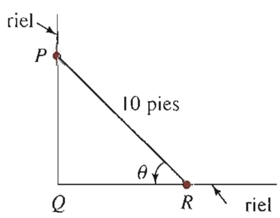


FIGURA 3.4.3 Tabla en el problema 46

≡ Piense en ello

47. *a*) Encuentre todos los enteros positivos n tales que

$$\frac{d^n}{dx^n} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x; \quad \frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos x;$$
$$\frac{d^n}{dx^n} \cos x = \operatorname{sen} x; \quad \frac{d^n}{dx^n} \operatorname{sen} x = \cos x.$$

b) Use los resultados en el inciso *a*) como ayuda para encontrar

$$\frac{d^{21}}{dx^{21}} \operatorname{sen} x, \quad \frac{d^{30}}{dx^{30}} \operatorname{sen} x, \quad \frac{d^{40}}{dx^{40}} \cos x \quad \text{y} \quad \frac{d^{67}}{dx^{67}} \cos x.$$

48. Encuentre dos puntos distintos P_1 y P_2 sobre la gráfica de $y = \cos x$ de modo que la recta tangente en P_1 sea perpendicular a la recta tangente en P_2.

49. Encuentre dos puntos distintos P_1 y P_2 sobre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ de modo que la recta tangente en P_1 sea paralela a la recta tangente en P_2.

50. Use (1), (2) y la fórmula de la suma para el coseno para demostrar que

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x.$$

51. Use (4) y (5) y la regla del cociente para demostrar que

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x.$$

52. Use (4) y la regla del cociente para demostrar que

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x.$$

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 53 y 54, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada. Por inspección de la gráfica, indique dónde la función puede no ser diferenciable.

53. $f(x) = 0.5(\operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|)$ **54.** $f(x) = |x + \operatorname{sen} x|$

55. Como se muestra en la FIGURA 3.4.4, un joven jala un trineo donde va sentada su hermana. Si el peso total del trineo y la chica es de 70 lb, y si el coeficiente de fricción de suelo cubierto por nieve es 0.2, entonces la magnitud F de la fuerza (medida en libras) necesaria para mover el trineo es

$$F = \frac{70(0.2)}{0.2 \operatorname{sen} \theta + \cos \theta},$$

donde θ es el ángulo que la cuerda forma con la horizontal.

a) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de F sobre el intervalo $[-1, 1]$.

b) Encuentre la derivada $dF/d\theta$.

c) Encuentre el ángulo (en radianes) para el que $dF/d\theta = 0$.

d) Encuentre el valor de F correspondiente al ángulo encontrado en el inciso *c*).

e) Use la gráfica en el inciso *a*) como ayuda para interpretar los resultados encontrados en los incisos *c*) y *d*).

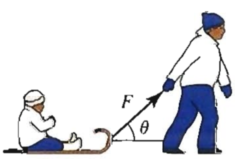


FIGURA 3.4.4 Trineo en el problema 55

3.5 Regla de la cadena

Introducción Como se analizó en la sección 3.2, la regla de potencias

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

es válida para todos los números reales exponentes n. En esta sección veremos que una regla semejante se cumple para la derivada de una potencia de una función $y = [g(x)]^n$. Antes de plantear el resultado formal, se considerará un ejemplo cuando n es un entero positivo.

Suponga que queremos diferenciar

$$y = (x^5 + 1)^2. \tag{1}$$

Al escribir (1) como $y = (x^5 + 1) \cdot (x^5 + 1)$, podemos encontrar la derivada al usar la regla del producto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^5 + 1)^2 &= (x^5 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x^5 + 1) + (x^5 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x^5 + 1) \\ &= (x^5 + 1) \cdot 5x^4 + (x^5 + 1) \cdot 5x^4 \\ &= 2(x^5 + 1) \cdot 5x^4. \end{aligned} \tag{2}$$

En forma semejante, para diferenciar la función $y = (x^5 + 1)^3$, es posible escribirla como $y = (x^5 + 1)^2 \cdot (x^5 + 1)$ y usar la regla del producto y el resultado que se proporciona en (2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^5 + 1)^3 &= \frac{d}{dx}(x^5 + 1)^2 \cdot (x^5 + 1) \\ &= (x^5 + 1)^2 \cdot \frac{d}{dx}(x^5 + 1) + (x^5 + 1) \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(x^5 + 1)^2}^{\text{sabemos esto por (2)}} \\ &= (x^5 + 1)^2 \cdot 5x^4 + (x^5 + 1) \cdot 2(x^5 + 1) \cdot 5x^4 \\ &= 3(x^5 + 1)^2 \cdot 5x^4. \end{aligned} \tag{3}$$

Asimismo, al escribir $y = (x^5 + 1)^4$ como $y = (x^5 + 1)^3 \cdot (x^5 + 1)$ es posible demostrar con facilidad mediante la regla del producto y (3) que

$$\frac{d}{dx}(x^5 + 1)^4 = 4(x^5 + 1)^3 \cdot 5x^4. \tag{4}$$

Regla de potencias para funciones La inspección de (2), (3) y (4) revela un patrón para diferenciar una potencia de una función g. Por ejemplo, en (4) vemos

el exponente se escribe como múltiplo
↓ ↓ derivada de la función entre paréntesis
$$4(x^5 + 1)^3 \cdot 5x^4$$
↑
disminuir el exponente por 1

Para recalcar lo anterior, si la función diferenciable se denota por [ ], resulta evidente que

$$\frac{d}{dx}[\ ]^n = n[\ ]^{n-1}\frac{d}{dx}[\ ].$$

El análisis anterior sugiere el resultado que se plantea en el siguiente teorema.

Teorema 3.5.1 Regla de potencias para funciones

Si n es cualquier número real y $u = g(x)$ es diferenciable en x, entonces

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x), \tag{5}$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{6}$$

El teorema 3.5.1 constituye en sí un caso especial de un teorema más general, denominado **regla de la cadena**, que se presentará después de considerar algunos ejemplos de esta nueva regla de potencias.

EJEMPLO 1 Regla de potencias para funciones

Diferencie $y = (4x^3 + 3x + 1)^7$.

Solución Con la identificación de que $u = g(x) = 4x^3 + 3x + 1$, por (6) vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{7}^{n}\overbrace{(4x^3 + 3x + 1)^6}^{u^{n-1}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(4x^3 + 3x + 1)}^{du/dx} = 7(4x^3 + 3x + 1)^6(12x^2 + 3).$$

EJEMPLO 2 Regla de potencias para funciones

Para diferenciar $y = 1/(x^2 + 1)$, podríamos, por supuesto, usar la regla del cociente. No obstante, al volver a escribir la función como $y = (x^2 + 1)^{-1}$, también es posible usar la regla de potencias para funciones con $n = -1$:

$$\frac{dy}{dx} = (-1)(x^2 + 1)^{-2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = (-1)(x^2 + 1)^{-2}\, 2x = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

EJEMPLO 3 Regla de potencias para funciones

Diferencie $y = \dfrac{1}{(7x^5 - x^4 + 2)^{10}}$.

Solución Escribimos la función dada como $y = (7x^5 - x^4 + 2)^{-10}$. Se identifica $u = 7x^5 - x^4 + 2$, $n = -10$ y se usa la regla de potencias (6):

$$\frac{dy}{dx} = -10(7x^5 - x^4 + 2)^{-11} \cdot \frac{d}{dx}(7x^5 - x^4 + 2) = \frac{-10(35x^4 - 4x^3)}{(7x^5 - x^4 + 2)^{11}}.$$

EJEMPLO 4 Regla de potencias para funciones

Diferencie $y = \tan^3 x$.

Solución Para recalcar, primero volvemos a escribir la función como $y = (\tan x)^3$ y luego se usa (6) con $u = \tan x$ y $n = 3$:

$$\frac{dy}{dx} = 3(\tan x)^2 \cdot \frac{d}{dx}\tan x.$$

Recuerde por (6) de la sección 3.4 que $(d/dx)\tan x = \sec^2 x$. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = 3\tan^2 x\sec^2 x.$$

EJEMPLO 5 Regla del cociente y luego regla de potencias

Diferencie $y = \dfrac{(x^2 - 1)^3}{(5x + 1)^8}$.

Solución Empezamos con la regla del cociente seguida por dos aplicaciones de la regla de potencias para:

Regla de potencias para funciones

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5x + 1)^8 \cdot \frac{d}{dx}(x^2 - 1)^3 - (x^2 - 1)^3 \cdot \frac{d}{dx}(5x + 1)^8}{(5x + 1)^{16}}$$

$$= \frac{(5x + 1)^8 \cdot 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x - (x^2 - 1)^3 \cdot 8(5x + 1)^7 \cdot 5}{(5x + 1)^{16}}$$

$$= \frac{6x(5x+1)^8(x^2-1)^2 - 40(5x+1)^7(x^2-1)^3}{(5x+1)^{16}}$$
$$= \frac{(x^2-1)^2(-10x^2+6x+40)}{(5x+1)^9}.$$ ■

EJEMPLO 6 Regla de potencias y luego regla del cociente

Diferencie $y = \sqrt{\dfrac{2x-3}{8x+1}}$.

Solución Al volver a escribir la función como

$$y = \left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{1/2} \quad \text{podemos identificarla} \quad u = \frac{2x-3}{8x+1}$$

y $n = \frac{1}{2}$. Por tanto, para calcular du/dx en (6) es necesario usar la regla del cociente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{(8x+1)\cdot 2 - (2x-3)\cdot 8}{(8x+1)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{8x+1}\right)^{-1/2} \cdot \frac{26}{(8x+1)^2}.$$

Por último, se simplifica usando las leyes de los exponentes:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{13}{(2x-3)^{1/2}(8x+1)^{3/2}}.$$ ■

Regla de la cadena Una potencia de una función puede escribirse como una función compuesta. Si identificamos $f(x) = x^n$ y $u = g(x)$, entonces $f(u) = f(g(x)) = [g(x)]^n$. La regla de la cadena constituye un mecanismo para diferenciar cualquier composición $f \circ g$ de dos funciones diferenciables f y g.

Teorema 3.5.2 Regla de la cadena

Si la función f es diferenciable en $u = g(x)$ y la función g es diferenciable en x, entonces la composición $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ es diferenciable en x y

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{7}$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}. \tag{8}$$

DEMOSTRACIÓN PARA $\Delta u \neq 0$ En esta demostración parcial resulta conveniente usar la forma de la definición de la derivada proporcionada en (3) de la sección 3.1. Para $\Delta x \neq 0$,

$$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x) \tag{9}$$

o bien, $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta u = u + \Delta u$. Además,

$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u) = f(g(x+\Delta x)) - f(g(x)).$$

Cuando x y $x + \Delta x$ están en algún intervalo abierto para el que $\Delta u \neq 0$, es posible escribir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Puesto que se supone que g es diferenciable, es continua. En consecuencia, cuando $\Delta x \to 0$, $g(x + \Delta x) \to g(x)$, y así por (9) vemos que $\Delta u \to 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\ &= \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right). \quad \leftarrow \text{observe que } \Delta u \to 0 \text{ en el primer término} \end{aligned}$$

Por la definición de derivada, (3) de la sección 3.1, se concluye que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

■

Se supone que $\Delta u \neq 0$ sobre algunos intervalos no se cumple para toda función diferenciable g. Aunque el resultado proporcionado en (7) sigue siendo válido cuando $\Delta u = 0$, la demostración precedente no.

Para comprender la derivada de una composición $y = f(g(x))$ podría ser de utilidad considerar a f como la *función externa* y a $u = g(x)$ como la *función interna*. Así, la derivada de $y = f(g(x)) = f(u)$ es el *producto de la derivada de la función externa* (evaluada en la función interna) *y la derivada de la función interna* (evaluada en x):

$$\frac{d}{dx} f(u) = \overset{\text{derivada de la función externa}}{\overset{\downarrow}{f'(u)}} \cdot \underset{\text{derivada de la función interna}}{\underset{\uparrow}{u'}}. \tag{10}$$

El resultado en (10) lo escribimos de varias formas. Puesto que $y = f(u)$, tenemos $f'(u) = dy/du$, y, por supuesto, $u' = du/dx$. El producto de las derivadas en (10) es el mismo que en (8). Por otra parte, si los símbolos u y u' en (10) los sustituimos por $g(x)$ y $g'(x)$, obtenemos (7).

Demostración de la regla de potencias para funciones Como ya se observó, una potencia de una función puede escribirse como una composición $(f \circ g)(x)$ donde la función externa es $y = f(x) = x^n$ y la función interna es $u = g(x)$. La derivada de la función interna $y = f(u) = u^n$ es $\dfrac{dy}{dx} = nu^{n-1}$ y la derivada de la función externa es $\dfrac{du}{dx}$. Así, el producto de estas derivadas es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x).$$

Ésta es la regla de potencias para funciones proporcionada en (5) y (6).

Funciones trigonométricas Las derivadas de las funciones trigonométricas compuestas con una función diferenciable g se obtienen como una consecuencia directa de la regla de la cadena. Por ejemplo, si $y = \operatorname{sen} u$, donde $u = g(x)$, entonces la derivada de y con respecto a la variable u es

$$\frac{dy}{du} = \cos u.$$

Por tanto, (8) da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

o bien, de manera equivalente,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}[\ ] = \cos[\ ]\frac{d}{dx}[\ ].$$

En forma semejante, si $y = \tan u$ donde $u = g(x)$, entonces $dy/du = \sec^2 u$ y así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}.$$

A continuación se resumen los resultados de la regla de la cadena para las seis funciones trigonométricas.

Teorema 3.5.3 Derivadas de funciones trigonométricas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}. \tag{13}$$

EJEMPLO 7 Regla de la cadena

Diferencie $y = \cos 4x$.

Solución La función es $\cos u$ con $u = 4x$. Por la segunda fórmula en (11) del teorema 3.5.3, la derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{-\operatorname{sen} 4x}^{\frac{dy}{du}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}4x}^{\frac{du}{dx}} = -4\operatorname{sen} 4x.$$ ■

EJEMPLO 8 Regla de la cadena

Diferencie $y = \tan(6x^2 + 1)$.

Solución La función es $\tan u$ con $u = 6x^2 + 1$. Por la segunda fórmula en (12) del teorema 3.5.3, la derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{\sec^2(6x^2+1)}^{\sec^2 u} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(6x^2+1)}^{\frac{du}{dx}} = 12x\sec^2(6x^2+1).$$ ■

EJEMPLO 9 Reglas del producto, de potencias y de la cadena

Diferencie $y = (9x^3 + 1)^2 \operatorname{sen} 5x$.

Solución Primero se usa la regla del producto:

$$\frac{dy}{dx} = (9x^3+1)^2 \cdot \frac{d}{dx}\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 5x \cdot \frac{d}{dx}(9x^3+1)^2$$

seguida de la regla de potencias (6) y la primera fórmula (11) del teorema 3.5.3,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (9x^3+1)^2 \cdot \overset{\text{por (11)}}{\overset{\downarrow}{\cos 5x}} \cdot \frac{d}{dx}5x + \operatorname{sen} 5x \cdot \overset{\text{por (6)}}{\overset{\downarrow}{2(9x^3+1)}} \cdot \frac{d}{dx}(9x^3+1)\\ &= (9x^3+1)^2 \cdot 5\cos 5x + \operatorname{sen} 5x \cdot 2(9x^3+1)\cdot 27x^2\\ &= (9x^3+1)(45x^3\cos 5x + 5\cos 5x + 54x^2\operatorname{sen} 5x).\end{aligned}$$ ■

En las secciones 3.2 y 3.3 vimos que aun cuando las reglas de la suma y el producto se plantearon en términos de dos funciones f y g, son válidas para cualquier número finito de funciones diferenciables. De este modo, también se planteó la regla de la cadena para la composición de dos funciones f y g, aunque es posible aplicarla a la composición de tres (o más) funciones diferenciables. En el caso de las tres, f, g y h, (7) se vuelve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(g(h(x))) &= f'(g(h(x))) \cdot \frac{d}{dx}g(h(x))\\ &= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).\end{aligned}$$

EJEMPLO 10 Uso repetido de la regla de la cadena

Diferencie $y = \cos^4(7x^3 + 6x - 1)$.

Solución Para recalcar, primero escribimos la función dada como $y = [\cos(7x^3 + 6x - 1]^4$. Observe que esta función es la composición $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ donde $f(x) = x^4$, $g(x) = \cos x$ y $h(x) = 7x^3 + 6x - 1$. Primero aplicamos la regla de la cadena en la forma de regla de potencias (6) seguida por la segunda fórmula en (11):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 4[\cos(7x^3 + 6x - 1)]^3 \cdot \frac{d}{dx}\cos(7x^3 + 6x - 1) && \leftarrow \text{primera regla de la cadena: diferenciar la potencia} \\ &= 4\cos^3(7x^3 + 6x - 1) \cdot \left[-\operatorname{sen}(7x^3 + 6x - 1) \cdot \frac{d}{dx}(7x^3 + 6x - 1)\right] && \leftarrow \text{segunda regla de la cadena: diferenciar el coseno} \\ &= -4(21x^2 + 6)\cos^3(7x^3 + 6x - 1)\operatorname{sen}(7x^3 + 6x - 1). \end{aligned}$$

En el ejemplo final, la función dada es una composición de cuatro funciones. ■

EJEMPLO 11 Uso repetido de la regla de la cadena

Diferencie $y = \operatorname{sen}\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right)$.

Solución La función es $f(g(h(k(x))))$, donde $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \tan x$, $h(x) = \sqrt{x}$, y $k(x) = 3x^2 + 4$. En este caso se aplica la regla de la cadena tres veces consecutivas como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \frac{d}{dx}\tan\sqrt{3x^2 + 4} && \leftarrow \text{primera regla de la cadena: diferenciar el seno} \\ &= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{3x^2 + 4} && \leftarrow \text{segunda regla de la cadena: diferenciar la tangente} \\ &= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 + 4)^{1/2} && \leftarrow \text{se vuelve a escribir la potencia} \\ &= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 + 4)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 + 4) && \leftarrow \text{tercera regla de la cadena: diferenciar la potencia} \\ &= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2 + 4} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 + 4)^{-1/2} \cdot 6x && \leftarrow \text{simplificar} \\ &= \frac{3x\cos\left(\tan\sqrt{3x^2 + 4}\right) \cdot \sec^2\sqrt{3x^2 + 4}}{\sqrt{3x^2 + 4}}. \end{aligned}$$

■

Por supuesto, usted debe volverse tan apto en aplicar la regla de la cadena que al final ya no piense en el número de funciones presentes en la composición que se trate.

$\frac{d}{dx}$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Quizás el error más frecuente es olvidar efectuar la segunda parte de la regla de la cadena; a saber: la derivada de la función interna. Ésta es la parte du/dx en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Por ejemplo, la derivada de $y = (1 - x)^{57}$ no es $dy/dx = 57(1 - x)^{56}$ puesto que $57(1 - x)^{56}$ es sólo la parte dy/du. Podría ser útil usar de manera consistente el símbolo de operación d/dx:

$$\frac{d}{dx}(1 - x)^{57} = 57(1 - x)^{56} \cdot \frac{d}{dx}(1 - x) = 57(1 - x)^{56} \cdot (-1).$$

ii) Un error menos común, pero tal vez más grave que el primero, consiste en diferenciar dentro la función dada. En su examen, un estudiante escribió que la derivada de $y = \cos(x^2 + 1)$ era $dy/dx = -\text{sen}(2x)$; es decir, que la derivada del coseno es el negativo del seno y que la derivada de $x^2 + 1$ es $2x$. Ambas observaciones son correctas, pero la forma donde se escribieron juntas es incorrecta. Tenga en cuenta que la derivada de la función interna es un múltiplo de la derivada de la función externa. De nuevo, podría ser de ayuda usar el símbolo de operación d/dx. La derivada correcta de $y = \cos(x^2 + 1)$ es el producto de dos derivadas.

$$\frac{dy}{dx} = -\text{sen}(x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = -2x\,\text{sen}(x^2 + 1).$$

Ejercicios 3.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-11.

Fundamentos

En los problemas 1-20, encuentre dy/dx.

1. $y = (-5x)^{30}$
2. $y = (3/x)^{14}$
3. $y = (2x^2 + x)^{200}$
4. $y = \left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)^5$
5. $y = \dfrac{1}{(x^3 - 2x^2 + 7)^4}$
6. $y = \dfrac{10}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$
7. $y = (3x - 1)^4(-2x + 9)^5$
8. $y = x^4(x^2 + 1)^6$
9. $y = \text{sen}\sqrt{2x}$
10. $y = \sec x^2$
11. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$
12. $y = \dfrac{3x - 4}{(5x + 2)^3}$
13. $y = [x + (x^2 - 4)^3]^{10}$
14. $y = \left[\dfrac{1}{(x^3 - x + 1)^2}\right]^4$
15. $y = x(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3})^{-4}$
16. $y = (2x + 1)^3\sqrt{3x^2 - 2x}$
17. $y = \text{sen}(\pi x + 1)$
18. $y = -2\cos(-3x + 7)$
19. $y = \text{sen}^3 5x$
20. $y = 4\cos^2\sqrt{x}$

En los problemas 21-38, encuentre $f'(x)$.

21. $f(x) = x^3 \cos x^3$
22. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,5x}{\cos 6x}$
23. $f(x) = (2 + x\,\text{sen}\,3x)^{10}$
24. $f(x) = \dfrac{(1 - \cos 4x)^2}{(1 + \text{sen}\,5x)^3}$
25. $f(x) = \tan(1/x)$
26. $f(x) = x\cot(5/x^2)$
27. $f(x) = \text{sen}\,2x\cos 3x$
28. $f(x) = \text{sen}^2 2x\cos^3 3x$
29. $f(x) = (\sec 4x + \tan 2x)^5$
30. $f(x) = \csc^2 2x - \csc 2x^2$
31. $f(x) = \text{sen}(\text{sen}\,2x)$
32. $f(x) = \tan\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$
33. $f(x) = \cos\left(\text{sen}\sqrt{2x + 5}\right)$
34. $f(x) = \tan(\tan x)$
35. $f(x) = \text{sen}^3(4x^2 - 1)$
36. $f(x) = \sec(\tan^2 x^4)$
37. $f(x) = (1 + (1 + (1 + x^3)^4)^5)^6$
38. $f(x) = \left[x^2 - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-4}\right]^2$

En los problemas 39-42, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

39. $y = (x^2 + 2)^3;\quad x = -1$
40. $y = \dfrac{1}{(3x + 1)^2};\quad x = 0$
41. $y = \text{sen}\,3x + 4x\cos 5x;\quad x = \pi$
42. $y = 50x - \tan^3 2x;\quad x = \pi/6$

En los problemas 43-46, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

43. $y = \left(\dfrac{x}{x + 1}\right)^2;\quad x = -\dfrac{1}{2}$
44. $y = x^2(x - 1)^3;\quad x = 2$
45. $y = \tan 3x;\quad x = \pi/4$
46. $y = (-1 + \cos 4x)^3;\quad x = \pi/8$

En los problemas 47 y 48, encuentre una ecuación de la recta normal a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

47. $y = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6x}\right)\cos(\pi x^2);\quad x = \dfrac{1}{2}$
48. $y = \text{sen}^3\dfrac{x}{3};\quad x = \pi$

En los problemas 49-52, encuentre la derivada indicada.

49. $f(x) = \text{sen}\,\pi x;\quad f'''(x)$
50. $y = \cos(2x + 1);\quad d^5y/dx^5$
51. $y = x\,\text{sen}\,5x;\quad d^3y/dx^3$
52. $f(x) = \cos x^2;\quad f''(x)$
53. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $f(x) = x/(x^2 + 1)^2$ donde la recta tangente es horizontal. La gráfica de f, ¿tiene alguna tangente vertical?
54. Determine los valores de t en los que la razón de cambio instantánea de $g(t) = \text{sen}\,t + \frac{1}{2}\cos 2t$ es cero.
55. Si $f(x) = \cos(x/3)$, ¿cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f' en $x = 2\pi$?
56. Si $f(x) = (1 - x)^4$, ¿cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f'' en $x = 2$?

≡ Aplicaciones

57. La función $R = (v_0^2/g)\text{sen } 2\theta$ proporciona el rango de un proyectil disparado a un ángulo θ con respecto a la horizontal con una velocidad inicial v_0. Si v_0 y g son constantes, encuentre los valores de θ con los cuales $dR/d\theta = 0$.

58. El volumen de un globo esférico de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. El radio es una función del tiempo t y aumenta a razón constante de 5 pulg/min. ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de V con respecto a r?

59. Suponga que un globo esférico se infla a razón constante $dV/dt = 10$ pulg^3/min. ¿A qué ritmo aumenta su radio cuando $r = 2$ pulg?

60. Considere una masa sobre un resorte como se muestra en la FIGURA 3.5.1. En ausencia de fuerzas de amortiguación, el desplazamiento (o distancia dirigida) de la masa, medido desde una posición denominada **posición de equilibrio**, está dado por la función

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \text{sen } \omega t,$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$, k es la constante del resorte (un indicador de la rigidez del resorte), m es la masa (medida en slugs o kilogramos), y_0 es el desplazamiento inicial de la masa (medido por arriba o por debajo de la posición de equilibrio), v_0 es la velocidad inicial de la masa y t es el tiempo medido en segundos.

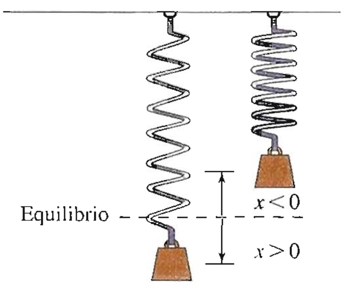


FIGURA 3.5.1 Masa en un resorte en el problema 60

a) Compruebe que $x(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

b) Compruebe que $x(t)$ satisface las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$.

≡ Piense en ello

61. Sea F una función diferenciable. ¿Qué es $\frac{d}{dx}F(3x)$?

62. Sea G una función diferenciable. ¿Qué es $\frac{d}{dx}[G(-x^2)]^2$?

63. Suponga $\frac{d}{du}f(u) = \frac{1}{u}$. ¿Qué es $\frac{d}{dx}f(-10x + 7)$?

64. Suponga $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$. ¿Qué es $\frac{d}{dx}f(x^3)$?

En los problemas 65 y 66, el símbolo n representa un entero positivo. Encuentre una fórmula para la derivada dada.

65. $\frac{d^n}{dx^n}(1 + 2x)^{-1}$

66. $\frac{d^n}{dx^n}\sqrt{1 + 2x}$

67. Suponga que $g(t) = h(f(t))$, donde $f(1) = 3$, $f'(1) = 6$, y $h'(3) = -2$. ¿Qué es $g'(1)$?

68. Suponga que $g(1) = 2$, $g'(1) = 3$, $g''(1) - 1$, $f'(2) = 4$, y $f''(2) = 3$. ¿Qué es $\left.\frac{d^2}{dx^2}f(g(x))\right|_{x=1}$?

69. Dado que f es una función impar diferenciable, use la regla de la cadena para demostrar que f' es una función par.

70. Dado que f es una función par diferenciable, use la regla de la cadena para demostrar que f' es una función impar.

3.6 Diferenciación implícita

▮ Introducción Las gráficas de las diversas ecuaciones que se estudian en matemáticas no son las gráficas de funciones. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 = 4 \tag{1}$$

describe un círculo de radio 2 con centro en el origen. La ecuación (1) no es una función, puesto que para cualquier elección de x que satisfaga $-2 < x < 2$ corresponden dos valores de y. Vea la FIGURA 3.6.1*a*). A pesar de ello, las gráficas de ecuaciones como (1) pueden tener rectas tangentes en varios puntos (x, y). La ecuación (1) define *por lo menos* dos funciones f y g sobre el intervalo $[-2, 2]$. Gráficamente, las funciones evidentes son la mitad superior y la mitad inferior del círculo. A fin de obtener fórmulas para éstas, se despeja y de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ en términos de x:

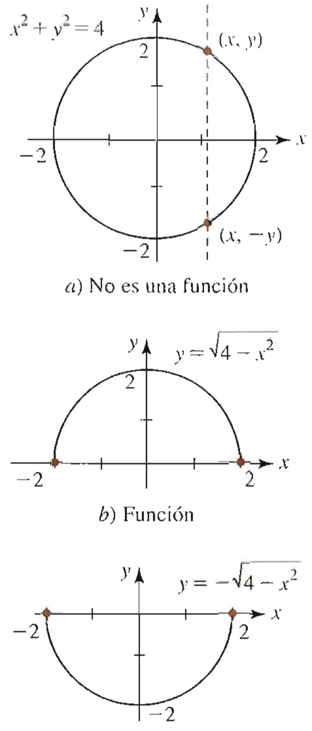
$$y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad \leftarrow \text{semicírculo superior} \tag{2}$$

y

$$y = g(x) = -\sqrt{4 - x^2}. \quad \leftarrow \text{semicírculo inferior} \tag{3}$$

Vea las figuras 3.6.1*b*) y *c*). Ahora ya es posible encontrar pendientes de las rectas tangentes para $-2 < x < 2$ al diferenciar (2) y (3) con la regla de potencias para funciones.

En esta sección veremos cómo obtener la derivada dy/dx para (1), así como para ecuaciones más complicadas $F(x, y) = 0$, sin necesidad de resolver la ecuación para la variable y.



a) No es una función

b) Función

c) Función

FIGURA 3.6.1 La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ determina por lo menos dos funciones

Funciones implícitas y explícitas Se dice que una función donde la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente x, a saber, $y = f(x)$, es una **función explícita**. Por ejemplo, $y = \frac{1}{2}x^3 - 1$ es una función explícita. Por otra parte, se dice que una ecuación equivalente $2y - x^3 + 2 = 0$ define **implícitamente** la función, o que y es una **función implícita** de x. Acabamos de ver que la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ define implícitamente las dos funciones $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$.

En general, si una ecuación $F(x, y) = 0$ define implícitamente una función en algún intervalo, entonces $F(x, f(x)) = 0$ es una identidad sobre el intervalo. La gráfica de f es una porción o un arco (o toda) de la gráfica de la ecuación $F(x, y) = 0$. En el caso de las funciones en (2) y (3), observe que ambas ecuaciones

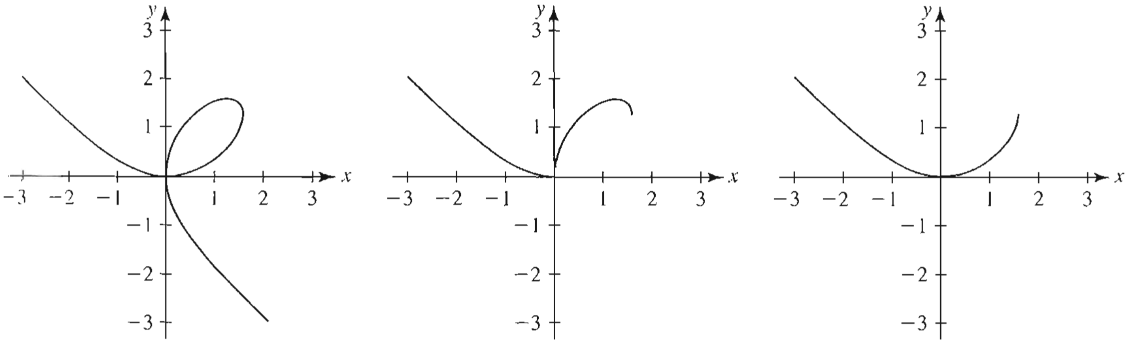
$$x^2 + [f(x)]^2 = 4 \quad \text{y} \quad x^2 + [g(x)]^2 = 4$$

son identidades sobre el intervalo $[-2, 2]$.

La gráfica de la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$ que se muestra en la FIGURA 3.6.2*a*) es una curva famosa denominada **hoja de Descartes**. Con ayuda de un SAC como *Mathematica* o *Maple*, encontramos que una de las funciones implícitas definidas por $x^3 + y^3 = 3xy$ es

$$y = \frac{2x}{\sqrt[3]{-4x^3 + 4\sqrt{x^6 - 4x^3}}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-4x^3 + 4\sqrt{x^6 - 4x^3}}. \tag{4}$$

La gráfica de esta función es el arco rojo que observamos en la figura 3.6.2*b*). En la figura 3.6.2*c*) se proporciona la gráfica de otra función implícita definida por $x^3 + y^3 = 3xy$.



a) Hoja *b*) Función *c*) Función

FIGURA 3.6.2 Las porciones de la gráfica en *a*) que se muestran en rojo en *b*) y *c*) son gráficas de dos funciones implícitas de x

Diferenciación implícita A partir del análisis anterior, no salte a la conclusión de que siempre es posible resolver una ecuación $F(x, y) = 0$ para una función implícita de x como se hizo en (2), (3) y (4). Por ejemplo, resolver una ecuación como

$$x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + y \tag{5}$$

Aunque no es posible resolver ciertas ecuaciones para una función explícita, sigue siendo posible graficar la ecuación con ayuda de un SAC. Así, es posible *ver* las funciones como se hizo en la figura 3.6.2.

para y en términos de x es más que un ejercicio en algún desafío algebraico o una lección sobre el uso de la sintaxis correcta en un SAC. ¡Es *imposible*! Sin embargo, (5) puede determinar varias funciones implícitas sobre un intervalo restringido del eje x. A pesar de ello, *podemos* determinar la derivada dy/dx por medio de un proceso denominado **diferenciación implícita**. Este proceso consiste en diferenciar ambos miembros de una ecuación con respecto a x, usando las reglas de diferenciación y luego resolviendo para dy/dx. Puesto que se considera que y está determinada por la ecuación dada como una función diferenciable de x, la regla de la cadena, en forma de la regla de potencias para funciones, proporciona el resultado útil

$$\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}, \tag{6}$$

donde n es cualquier número real. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \qquad \text{mientras} \qquad \frac{d}{dx}y^2 = 2y\frac{dy}{dx}.$$

En forma semejante, si y es una función de x, entonces por la regla del producto

$$\frac{d}{dx}xy = x\frac{d}{dx}y + y\frac{d}{dx}x = x\frac{dy}{dx} + y,$$

y por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 5y = \cos 5y \cdot \frac{d}{dx}5y = 5\cos 5y\frac{dy}{dx}.$$

Directrices para diferenciación implícita

i) Al diferenciar con respecto a x ambos miembros de la ecuación, use las reglas de diferenciación y considere a y como una función diferenciable de x. Para potencias del símbolo y, use (6).

ii) Agrupe todos los términos donde aparece dy/dx en el miembro izquierdo de la ecuación diferenciada. Mueva todos los otros términos al miembro derecho de la ecuación.

iii) Factorice dy/dx en todos los términos donde aparezca este término. Luego, despeje dy/dx.

En los siguientes ejemplos se supondrá que la ecuación dada determina por lo menos una función diferenciable implícitamente.

EJEMPLO 1 Uso de la diferenciación implícita

Encuentre dy/dx si $x^2 + y^2 = 4$.

Solución Se diferencian ambos miembros de la ecuación y luego se usa (6):

$$\frac{d}{dx}x^2 + \overset{\text{use la regla de potencias (6) aquí}}{\overset{\downarrow}{\frac{d}{dx}y^2}} = \frac{d}{dx}4$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Al despejar la derivada obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{7}$$ ■

Como se ilustra en (7) del ejemplo 1, la diferenciación implícita suele producir una derivada que depende de ambas variables x y y. En el análisis introductorio vimos que la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ define dos funciones que pueden diferenciarse implícitamente sobre el intervalo abierto $-2 < x < 2$. El simbolismo $dy/dx = -x/y$ representa la derivada de cualquiera de las funciones sobre el intervalo. Observe que esta derivada indica con claridad que las funciones (2) y (3) no son diferenciables en $x = -2$ y $x = 2$ puesto que $y = 0$ para estos valores de x. En general, la diferenciación implícita produce la derivada de cualquier función que puede derivarse implícitamente definida por una ecuación $F(x, y) = 0$.

EJEMPLO 2 La pendiente de una recta tangente

Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ en los puntos correspondientes a $x = 1$.

Solución Al sustituir $x = 1$ en la ecuación dada obtenemos $y^2 = 3$ o $y = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, hay rectas tangentes en $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$. Aunque $(1, \sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$ son puntos sobre la gráfica de dos funciones que pueden diferenciarse implícitamente, indicadas con colores diferentes en la FIGURA 3.6.3, (7) en el ejemplo 1 proporciona la pendiente correcta en cada número en el intervalo $(-2, 2)$. Tenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\sqrt{3})} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-\sqrt{3})} = -\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$ ■

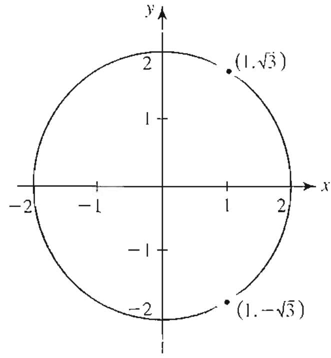


FIGURA 3.6.3 Las rectas tangentes en el ejemplo 2 se muestran en verde

EJEMPLO 3 Uso de diferenciación implícita

Encuentre dy/dx si $x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1$.

Solución En este caso, usamos (6) y la regla del producto:

regla del producto aquí ↓ regla de potencias (6) aquí ↓

$$\frac{d}{dx}x^4 + \frac{d}{dx}x^2y^3 - \frac{d}{dx}y^5 = \frac{d}{dx}2x + \frac{d}{dx}1$$

$$4x^3 + x^2 \cdot 3y^2\frac{dy}{dx} + 2xy^3 - 5y^4\frac{dy}{dx} = 2$$ ← factorice dy/dx de los términos segundo y cuarto

$$(3x^2y^2 - 5y^4)\frac{dy}{dx} = 2 - 4x^3 - 2xy^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 4x^3 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 5y^4}.$$ ■

Derivadas de orden superior Por medio de diferenciación implícita determinamos dy/dx. Al diferenciar dy/dx con respecto a x obtenemos la segunda derivada d^2y/dx^2. Si la primera derivada contiene a y, entonces d^2y/dx^2 de nuevo contiene el símbolo dy/dx; esa cantidad puede eliminarse al sustituir su valor conocido. El siguiente ejemplo ilustra el método.

EJEMPLO 4 Segunda derivada

Encuentre d^2y/dx^2 si $x^2 + y^2 = 4$.

Solución Por el ejemplo 1, ya sabemos que la primera derivada es $dy/dx = -x/y$. La segunda derivada es la derivada de dy/dx, de modo que por la regla del cociente:

↓ al sustituir por dy/dx ↓

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y \cdot 1 - x \cdot \frac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

Al observar que $x^2 + y^2 = 4$, es posible volver a escribir la segunda derivada como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{y^3}.$$ ■

EJEMPLO 5 Reglas de la cadena y del producto

Encuentre dy/dx si $\operatorname{sen} y = y\cos 2x$.

Solución Por la regla de la cadena y la regla del producto obtenemos

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} y = \frac{d}{dx}y\cos 2x$$

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = y(-\operatorname{sen} 2x \cdot 2) + \cos 2x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$(\cos y - \cos 2x)\frac{dy}{dx} = -2y\operatorname{sen} 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y\operatorname{sen} 2x}{\cos y - \cos 2x}.$$ ■

Posdata: Otro repaso a la regla de potencias Hasta el momento se ha demostrado la regla de potencias $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$ para todos los enteros exponentes n. La diferenciación implícita constituye un mecanismo para demostrar esta regla cuando el exponente es un número racional p/q, donde p y q son enteros y $q \neq 0$. En el caso donde $n = p/q$, la función

$$y = x^{p/q} \quad \text{proporciona} \quad y^q = x^p.$$

Luego, para $y \neq 0$, la diferenciación implícita

$$\frac{d}{dx}y^q = \frac{d}{dx}x^p \quad \text{produce} \quad qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}.$$

Al despejar dy/dx en la última ecuación y simplificar con las leyes de los exponentes obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} = \frac{p}{q}x^{p/q-1}.$$

Al examinar el último resultado observamos que se trata de (3) de la sección 3.2 con $n = p/q$.

Ejercicios 3.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-11.

Fundamentos

En los problemas 1-4, suponga que y es una función diferenciable de x. Encuentre la derivada indicada.

1. $\dfrac{d}{dx}x^2y^4$

2. $\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^2}{y^2}$

3. $\dfrac{d}{dx}\cos y^2$

4. $\dfrac{d}{dx}y \text{ sen } 3y$

En los problemas 5-24, suponga que la ecuación dada define por lo menos una función diferenciable implícita. Use diferenciación implícita para encontrar dy/dx.

5. $y^2 - 2y = x$

6. $4x^2 + y^2 = 8$

7. $xy^2 - x^2 + 4 = 0$

8. $(y - 1)^2 = 4(x + 2)$

9. $3y + \cos y = x^2$

10. $y^3 - 2y + 3x^3 = 4x + 1$

11. $x^3y^2 = 2x^2 + y^2$

12. $x^5 - 6xy^3 + y^4 = 1$

13. $(x^2 + y^2)^6 = x^3 - y^3$

14. $y = (x - y)^2$

15. $y^{-3}x^6 + y^6x^{-3} = 2x + 1$

16. $y^4 - y^2 = 10x - 3$

17. $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$

18. $\dfrac{x + y}{x - y} = x$

19. $y^2 = \dfrac{x - 1}{x + 2}$

20. $\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y^2}{x} = 5$

21. $xy = \text{sen}(x + y)$

22. $x + y = \cos(xy)$

23. $x = \sec y$

24. $x \text{ sen } y - y \cos x = 1$

En los problemas 25 y 26, use diferenciación implícita para encontrar la derivada indicada.

25. $r^2 = \text{sen } 2\theta$; $dr/d\theta$

26. $\pi r^2 h = 100$; dh/dr

En los problemas 27 y 28, encuentre dy/dx en el punto indicado.

27. $xy^2 + 4y^3 + 3x = 0$; $(1, -1)$

28. $y = \text{sen } xy$; $(\pi/2, 1)$

En los problemas 29 y 30, encuentre dy/dx en los puntos que corresponden al número indicado.

29. $2y^2 + 2xy - 1 = 0$; $x = \frac{1}{2}$

30. $y^3 + 2x^2 = 11y$; $y = 1$

En los problemas 31-34, encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto o número indicado.

31. $x^4 + y^3 = 24$; $(-2, 2)$

32. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$; $x = 3$

33. $\tan y = x$; $y = \pi/4$

34. $3y + \cos y = x^2$; $(1, 0)$

En los problemas 35 y 36, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la ecuación dada donde la recta tangente es horizontal.

35. $x^2 - xy + y^2 = 3$

36. $y^2 = x^2 - 4x + 7$

37. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ donde la pendiente de la tangente es $\frac{1}{2}$.

38. Encuentre el punto donde se cortan las rectas tangentes a la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ en $(-3, 4)$ y $(-3, -4)$.

39. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $y^3 = x^2$ donde la recta tangente es perpendicular a la recta $y + 3x - 5 = 0$.

40. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de $x^2 - xy + y^2 = 27$ donde la recta tangente es paralela a la recta $y = 5$.

En los problemas 41-48, encuentre d^2y/dx^2.

41. $4y^3 = 6x^2 + 1$

42. $xy^4 = 5$

43. $x^2 - y^2 = 25$

44. $x^2 + 4y^2 = 16$

45. $x + y = \text{sen } y$

46. $y^2 - x^2 = \tan 2x$

47. $x^2 + 2xy - y^2 = 1$

48. $x^3 + y^3 = 27$

En los problemas 49-52, primero use diferenciación implícita para encontrar dy/dx. Luego despeje y explícitamente en términos de x y diferencie. Demuestre que las dos respuestas son equivalentes.

49. $x^2 - y^2 = x$

50. $4x^2 + y^2 = 1$

51. $x^3y = x + 1$

52. $y \text{ sen } x = x - 2y$

En los problemas 53-56, determine una función implícita a partir de la ecuación dada tal que su gráfica sea la curva azul en la figura.

53. $(y-1)^2 = x - 2$

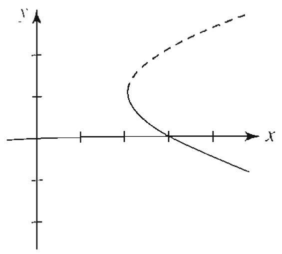


FIGURA 3.6.4 Gráfica para el problema 53

54. $x^2 + xy + y^2 = 4$

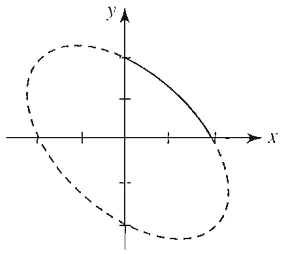


FIGURA 3.6.5 Gráfica para el problema 54

55. $x^2 + y^2 = 4$

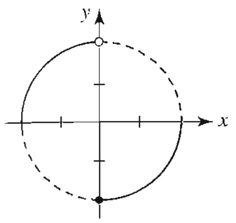


FIGURA 3.6.6 Gráfica para el problema 55

56. $y^2 = x^2(2 - x)$

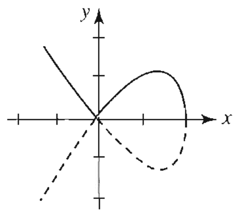


FIGURA 3.6.7 Gráfica para el problema 56

En los problemas 57 y 58, suponga que tanto x como y son diferenciables de una variable t. Encuentre dy/dt en términos de x, y y dx/dt.

57. $x^2 + y^2 = 25$

58. $x^2 + xy + y^2 - y = 9$

59. La gráfica de la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$ es la hoja de Descartes proporcionada en la figura 3.6.2*a*).

a) Encuentre una ecuación para la recta tangente en el punto en el primer cuadrante donde la hoja corta la gráfica de $y = x$.

b) Encuentre el punto en el primer cuadrante donde la recta tangente es horizontal.

60. La gráfica de la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ mostrada en la FIGURA 3.6.8 se denomina **lemniscata**.

a) Encuentre los puntos sobre la gráfica que corresponden a $x = 1$.

b) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica en cada punto encontrado en el inciso *a*).

c) Encuentre los puntos sobre la gráfica en los que la tangente es horizontal.

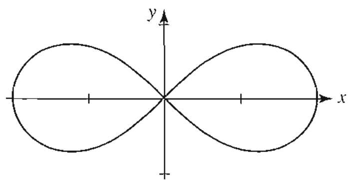


FIGURA 3.6.8 Lemniscata en el problema 60

En los problemas 61 y 62, demuestre que las gráficas de las ecuaciones dadas son ortogonales en el punto de intersección indicado. Vea el problema 64 en los ejercicios 3.2.

61. $y^2 = x^3, \quad 2x^2 + 3y^2 = 5; \quad (1, 1)$

62. $y^3 + 3x^2y = 13, \quad 2x^2 - 2y^2 = 3x; \quad (2, 1)$

Si todas las curvas de una familia de curvas $G(x, y) = c_1$, c_1 una constante, cortan ortogonalmente a todas las curvas de otra familia $H(x, y) = c_2$, c_2 una constante, entonces se dice que las familias tienen **trayectorias ortogonales** entre sí. En los problemas 63 y 64, demuestre que las familias de curvas tienen trayectorias ortogonales entre sí. Trace las dos familias de curvas.

63. $x^2 - y^2 = c_1, \quad xy = c_2$

64. $x^2 + y^2 = c_1, \quad y = c_2x$

≡ Aplicaciones

65. Una mujer conduce hacia una señal en la carretera como se muestra en la FIGURA 3.6.9. Sea θ su ángulo de visión de la señal y sea x su distancia (medida en pies) a esa señal.

a) Si el nivel de sus ojos está a 4 pies de la superficie de la carretera, demuestre que

$$\tan\theta = \frac{4x}{x^2 + 252}.$$

b) Encuentre la razón a la que cambia θ con respecto a x.

c) ¿A qué distancia se cumple que la razón del inciso *b*) es igual a cero?

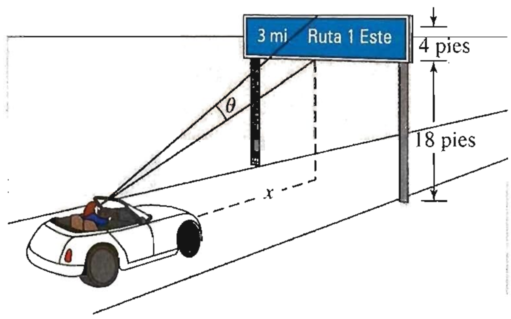


FIGURA 3.6.9 Automóvil en el problema 65

66. Un avión caza describe un círculo de 1 km de radio como se muestra en la FIGURA 3.6.10. Suponga que se escoge un sistema de coordenadas rectangulares de modo que el origen está en el centro del círculo. La nave dispara un misil que describe una trayectoria rectilínea tangente al círculo e impacta en un blanco sobre el suelo cuyas coordenadas son $(2, -2)$.

a) Determine el punto sobre el círculo donde fue disparado el misil.

b) Si un misil se dispara en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sobre el círculo, ¿en qué punto choca contra el suelo?

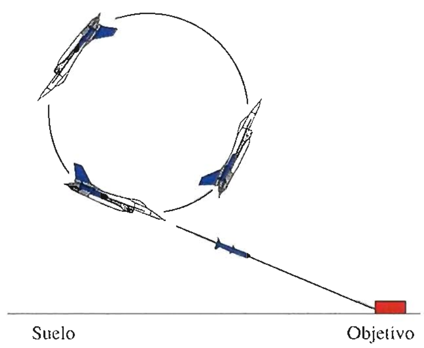


FIGURA 3.6.10 Avión caza en el problema 66

≡ Piense en ello

67. El ángulo θ $(0 < \theta < \pi)$ entre dos curvas se define como el ángulo entre sus rectas tangentes en el punto P de intersección. Si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas tangentes en P, es posible demostrar que $\tan\theta = (m_1 - m_2)/(1 + m_1 m_2)$. Determine el ángulo entre las gráficas de $x^2 + y^2 + 4y = 6$ y $x^2 + 2x + y^2 = 4$ en $(1, 1)$.

68. Demuestre que una ecuación de la recta tangente a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en el punto (x_0, y_0) está dada por
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

69. Considere la ecuación $x^2 + y^2 = 4$. Establezca otra fun ción implícita $h(x)$ definida por esta ecuación par $-2 \le x \le 2$ diferente de la proporcionada en (2), (3) el problema 55.

70. Para $-1 < x < 1$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$, la ecuación $x =$ sen y define una función implícita diferenciable.
   a) Encuentre dy/dx en términos de y.
   b) Encuentre dy/dx en términos de x.

3.7 Derivadas de funciones inversas

Introducción En la sección 1.5 vimos que las gráficas de una función f uno a uno y s inversa f^{-1} son **reflexiones** entre sí en la recta $y = x$. Como una consecuencia, si (a, b) es u punto sobre la gráfica de f, entonces (b, a) es un punto sobre la gráfica de f^{-1}. En esta sec ción también veremos que las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de una funció diferenciable f están relacionadas con las pendientes de tangentes a la gráfica de f^{-1}.

Empezamos con dos teoremas sobre la continuidad de f y f^{-1}.

Continuidad de f^{-1} Aunque los dos teoremas siguientes se plantean sin demostración, s validez se concluye a partir del hecho de que f^{-1} es una reflexión de la gráfica de f en la rect $y = x$.

Teorema 3.7.1 Continuidad de la función inversa

Sea f una función continua uno a uno sobre su dominio X. Entonces f^{-1} es continua sobre su dominio.

Funciones crecientes-decrecientes Suponga que $y = f(x)$ es una función definida sobr un intervalo I, y que x_1 y x_2 son dos números cualesquiera en el intervalo tales que $x_1 < x_2$ Entonces por la sección 1.3 y la figura 1.3.4, recuerde que se dice que f es

- **creciente** sobre el intervalo si $f(x_1) < f(x_2)$, y (1)
- **decreciente** sobre el intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$. (2)

Los dos teoremas siguientes establecen una relación entre el concepto de creciente/decre ciente y la existencia de una función inversa.

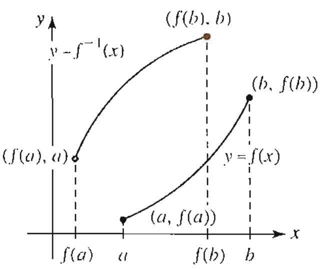


FIGURA 3.7.1 f (curva azul) y f^{-1} (curva roja) son continuas y crecientes

Teorema 3.7.2 Existencia de una función inversa

Sea f una función continua y creciente sobre un intervalo $[a, b]$. Entonces f^{-1} existe y es continua y creciente sobre $[f(a), f(b)]$.

El teorema 3.7.2 también se cumple cuando sustituimos la palabra *creciente* por la pal bra *decreciente* y el intervalo en la conclusión se reemplaza por $[f(b), f(a)]$. Vea la FIGURA 3.7. Además, por el teorema 3.7.2 concluimos que si f es continua y creciente sobre un interval $(-\infty, \infty)$, entonces f^{-1} existe y es continua y creciente sobre su dominio de inspección. A analizar las figuras 1.3.4 y 3.7.1 también observamos que si f en el teorema 3.7.2 es una fu ción diferenciable sobre (a, b), entonces

f creciente y diferenciable significa que las rectas tangentes tienen pendiente positiva.

- f es creciente sobre el intervalo $[a, b]$ si $f'(x) > 0$ sobre (a, b), y
- f es decreciente sobre el intervalo $[a, b]$ si $f'(x) < 0$ sobre (a, b).

Estas afirmaciones se demostrarán en el siguiente capítulo.

Teorema 3.7.3 Diferenciabilidad de una función inversa

Suponga que f es una función diferenciable sobre un intervalo abierto (a, b). Si $f'(x) > 0$ sobre el intervalo o $f'(x) < 0$ sobre el intervalo, entonces f es uno a uno. Además, f^{-1} es diferenciable para toda x en el rango de f.

EJEMPLO 1 Existencia de una inversa

Demuestre que $f(x) = 5x^3 + 8x - 9$ tiene una inversa.

Solución Puesto que f es una función polinomial, es diferenciable en todas partes; es decir, f es diferenciable sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. También, $f'(x) = 15x^2 + 8 > 0$ para toda x implica que f es creciente sobre $(-\infty, \infty)$. Por el teorema 3.7.3 se concluye que f es uno a uno y entonces f^{-1} existe. ■

Derivada de f^{-1} Si f es diferenciable sobre un intervalo I y es uno a uno sobre ese intervalo, entonces para a en I el punto (a, b) sobre la gráfica de f y el punto (b, a) sobre la gráfica de f^{-1} son imágenes especulares entre sí en la recta $y = x$. Como veremos a continuación, las pendientes de las rectas tangentes en (a, b) y (b, a) también están relacionadas.

EJEMPLO 2 Derivada de una inversa

En el ejemplo 5 de la sección 1.5 se demostró que la inversa de una función uno a uno $f(x) = x^2 + 1, x \geq 0$ es $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$. En $x = 2$,

$$f(2) = 5 \quad \text{y} \quad f^{-1}(5) = 2.$$

Luego, por

$$f'(x) = 2x \quad \text{y} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 1}}$$

Observamos que $f'(2) = 4$ y $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{4}$. Esto muestra que la pendiente de la tangente a la gráfica de f en $(2, 5)$ y la pendiente de la tangente a la gráfica de f^{-1} en $(5, 2)$ son recíprocos:

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(2)} \quad \text{o} \quad (f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(5))}.$$

Vea la FIGURA 3.7.2. ■

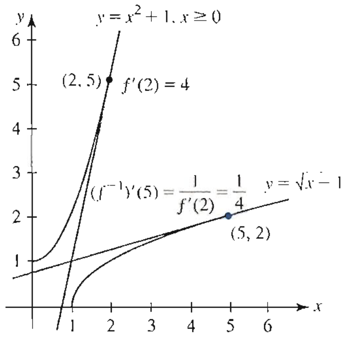


FIGURA 3.7.2 Rectas tangentes en el ejemplo 2

El siguiente teorema muestra que el resultado en el ejemplo 2 no es una coincidencia.

Teorema 3.7.4 Derivada de una función inversa

Suponga que f es diferenciable sobre un intervalo I y que $f'(x)$ nunca es cero sobre I. Si f tiene una inversa f^{-1} sobre I, entonces f^{-1} es diferenciable en un número x y

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN Como vimos en (5) de la sección 1.5, $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}. Por diferenciación implícita y la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = \frac{d}{dx} x \quad \text{o} \quad f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1.$$

Al despejar $\frac{d}{dx} f^{-1}(x)$ en la última ecuación obtenemos (3). ■

Resulta evidente que la ecuación (3) muestra que para encontrar la función derivada para f^{-1} es necesario conocer de manera explícita $f^{-1}(x)$. Para una función uno a uno $y = f(x)$, resolver la ecuación $x = f(y)$ para y algunas veces es difícil y a menudo imposible. En este caso resulta conveniente volver a escribir (3) usando otra notación. De nuevo, por diferencia ción implícita,

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}f(y) \qquad \text{proporciona} \qquad 1 = f'(y) \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Al despejar dy/dx en la última ecuación y escribir $dx/dy = f'(y)$ obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}. \qquad (4)$$

Si (a, b) es un punto conocido sobre la gráfica de f, el resultado en (4) permite evaluar derivada de f^{-1} en (b, a) sin contar con una ecuación que defina $f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 3 Derivada de una inversa

En el ejemplo 1 se indicó que la función polinomial $f(x) = 5x^3 + 8x - 9$ es diferenciab sobre $(-\infty, \infty)$ y por tanto es continua sobre el intervalo. Puesto que el comportamiento fin de f es el de la función polinomial con un solo término $y = 5x^3$, podemos concluir que rango de f también es $(-\infty, \infty)$. Además, puesto que $f'(x) = 15x^2 + 8 > 0$ para toda x, f creciente sobre su dominio $(-\infty, \infty)$. Entonces, por el teorema 3.7.3, f tiene una inversa dif renciable f^{-1} con dominio $(-\infty, \infty)$. Al intercambiar x y y, la inversa se define por la ecu ción $x = 5y^3 + 8y - 9$, pero resolver esta ecuación para y en términos de x es difícil (requiere la fórmula cúbica). No obstante, al usar $dx/dy = 15y^2 + 8$, se encuentra que la de vada de la función inversa está dada por (4):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{15y^2 + 8}. \qquad (5)$$

Por ejemplo, puesto que $f(1) = 4$, sabemos que $f^{-1}(4) = 1$. Entonces, la pendiente de la rec tangente a la gráfica de f^{-1} en $(4, 1)$ está dada por (5):

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} = \left.\frac{1}{15y^2 + 8}\right|_{y=1} = \frac{1}{23}.$$

Lea otra vez este párrafo.

En el ejemplo 3, la derivada de la función inversa también puede obtenerse directamer a partir de $x = 5y^3 + 8y - 9$ usando diferenciación implícita:

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}(5y^3 + 8y - 9) \qquad \text{proporciona} \qquad 1 = 15y^2\frac{dy}{dx} + 8\frac{dy}{dx}.$$

Al resolver la ecuación para dy/dx obtenemos (5). Como una consecuencia de esta obser ción, es posible usar diferenciación implícita para encontrar la derivada de una función inve con el mínimo esfuerzo. En el siguiente análisis se encontrarán las derivadas de las funcior trigonométricas inversas.

Derivadas de funciones trigonométricas inversas Un repaso de las figuras 1.5.15 1.5.17*a*) revela que la tangente inversa y la cotangente inversa son diferenciables para toda No obstante, las cuatro funciones trigonométricas restantes no son diferenciables en $x =$ o $x = 1$. Centraremos la atención en obtener las fórmulas de las derivadas del seno inver la tangente inversa y la secante inversa, y la obtención de las otras se dejan como ejercici

Seno inverso: $y = \text{sen}^{-1} x$ si y sólo si $x = \text{sen}\, y$, donde $-1 \leq x \leq 1$ y $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. consecuencia, la diferenciación implícita

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\text{sen}\, y \qquad \text{proporciona} \qquad 1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$$

y así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

Para la restricción dada sobre la variable y, $\cos y \geq 0$ y así $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 -}$ Al sustituir esta cantidad en (6), hemos demostrado que

$$\frac{d}{dx}\text{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Como habíamos pronosticado, observe que (7) no está definida en $x = -1$ o $x = 1$. La función seno inverso o arcsen es diferenciable sobre el intervalo abierto $(-1, 1)$.

Tangente inversa: $y = \tan^{-1} x$ si y sólo si $x = \tan y$, donde $-\infty < x < \infty$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$. Por tanto,

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\tan y \quad \text{proporciona} \quad 1 = \sec^2 y \cdot \frac{dy}{dx}$$

o bien,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}. \tag{8}$$

Debido a la identidad $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, (8) se vuelve

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{9}$$

Secante inversa: Para $|x| > 1$ y $0 \leq y < \pi/2$ o $\pi/2 < y \leq \pi$,

$$y = \sec^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \sec y.$$

Al diferenciar implícitamente la última ecuación obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}. \tag{10}$$

Debido a las restricciones sobre y, tenemos $\tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, $|x| > 1$. Por tanto, (10) se vuelve

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{11}$$

Es posible deshacernos del signo $\pm$ en (11) al observar en la figura 1.5.17*b*) que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \sec^{-1} x$ es positiva para $x < 1$ y positiva para $x > 1$. Así, (11) es equivalente a

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \begin{cases} -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, & x < -1 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, & x > 1. \end{cases} \tag{12}$$

El resultado en (12) puede volver a escribirse en forma más breve usando el símbolo de valor absoluto:

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{13}$$

La derivada de la composición de una función trigonométrica inversa con una función diferenciable $u = g(x)$ se obtiene a partir de la regla de la cadena.

Teorema 3.7.5 Funciones trigonométricas inversas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}}\frac{du}{dx}, \tag{14}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1 + u^2}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cot^{-1} u = \frac{-1}{1 + u^2}\frac{du}{dx}, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\csc^{-1} u = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}. \tag{16}$$

En las fórmulas en (14) debe tenerse $|u| < 1$, mientras que en las fórmulas en (16) debe tenerse $|u| > 1$.

EJEMPLO 4 Derivada del seno inverso

Diferencie $y = \operatorname{sen}^{-1} 5x$.

Solución Con $u = 5x$, por la primera fórmula en (14) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (5x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}5x = \frac{5}{\sqrt{1 - 25x^2}}.$$

EJEMPLO 5 Derivada de la tangente inversa

Diferencie $y = \tan^{-1}\sqrt{2x + 1}$.

Solución Con $u = \sqrt{2x + 1}$, por la primera fórmula en (15) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1 + \left(\sqrt{2x + 1}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}(2x + 1)^{1/2}\\ &= \frac{1}{1 + (2x + 1)} \cdot \frac{1}{2}(2x + 1)^{-1/2} \cdot 2\\ &= \frac{1}{(2x + 2)\sqrt{2x + 1}}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Derivada de la secante inversa

Diferencie $y = \sec^{-1} x^2$.

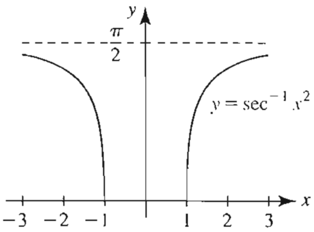


FIGURA 3.7.3 Gráfica de la función en el ejemplo 6

Solución Para $x^2 > 1 > 0$, por la primera fórmula en (16) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{|x^2|\sqrt{(x^2)^2 - 1}} \cdot \frac{d}{dx}x^2\\ &= \frac{2x}{x^2\sqrt{x^4 - 1}} = \frac{2}{x\sqrt{x^4 - 1}}.\end{aligned} \tag{17}$$

Con ayuda de un dispositivo para graficar obtenemos la gráfica de $y = \sec^{-1} x^2$ que se muestra en la FIGURA 3.7.3. Observe que (17) proporciona una pendiente positiva para $x > 1$ y una negativa para $x < -1$.

EJEMPLO 7 Recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 \cos^{-1} x$ en $x = -\frac{1}{2}$.

Solución Por la regla del producto y la segunda fórmula en (14):

$$f'(x) = x^2\left(\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) + 2x \cos^{-1} x.$$

Puesto que $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi/3$, al evaluar las dos funciones f y f' en $x = -\frac{1}{2}$ obtenemos:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\pi}{6}\right)$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}. \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\pi}{6}\right) \text{ es } -\tfrac{1}{2\sqrt{3}} - \tfrac{2\pi}{3}$$

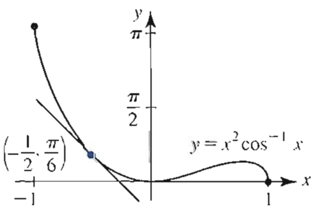


FIGURA 3.7.4 Recta tangente en el ejemplo 7

Por la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, la ecuación sin simplificar de la recta tangente es

$$y - \frac{\pi}{6} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Puesto que el dominio de $\cos^{-1} x$ es el intervalo $[-1, 1]$, el dominio de f es $[-1, 1]$. El rango correspondiente es $[0, \pi]$. La FIGURA 3.7.4 se obtuvo con ayuda de un dispositivo para graficar.

Ejercicios 3.7 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-11.

Fundamentos

En los problemas 1-4, sin graficar determine si la función f dada tiene una inversa.

1. $f(x) = 10x^3 + 8x + 12$

2. $f(x) = -7x^5 - 6x^3 - 2x + 17$

3. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$

4. $f(x) = x^4 - 2x^2$

En los problemas 5 y 6, use (3) para encontrar la derivada de f^{-1} en el punto indicado.

5. $f(x) = 2x^3 + 8; \quad \left(f(\frac{1}{2}), \frac{1}{2}\right)$

6. $f(x) = -x^3 - 3x + 7; \quad (f(-1), -1)$

En los problemas 7 y 8, encuentre f^{-1}. Use (3) para encontrar $(f^{-1})'$ y luego compruebe este resultado por diferenciación directa de f^{-1}.

7. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$

8. $f(x) = (5x + 7)^3$

En los problemas 9-12, sin encontrar la inversa, encuentre, en el valor indicado de x, el punto correspondiente sobre la gráfica de f^{-1}. Luego use (4) para encontrar una ecuación de la recta tangente en este punto.

9. $y = \frac{1}{3}x^3 + x - 7; \quad x = 3$

10. $y = \dfrac{2x+1}{4x-1}; \quad x = 0$

11. $y = (x^5 + 1)^3; \quad x = 1$

12. $y = 8 - 6\sqrt[3]{x+2}; \quad x = -3$

En los problemas 13-32, encuentre la derivada de la función dada.

13. $y = \operatorname{sen}^{-1}(5x - 1)$

14. $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{x+1}{3}\right)$

15. $y = 4\cot^{-1}\dfrac{x}{2}$

16. $y = 2x - 10\sec^{-1} 5x$

17. $y = 2\sqrt{x}\tan^{-1}\sqrt{x}$

18. $y = (\tan^{-1} x)(\cot^{-1} x)$

19. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} 2x}{\cos^{-1} 2x}$

20. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\operatorname{sen} x}$

21. $y = \dfrac{1}{\tan^{-1} x^2}$

22. $y = \dfrac{\sec^{-1} x}{x}$

23. $y = 2\operatorname{sen}^{-1} x + x\cos^{-1} x$

24. $y = \cot^{-1} x - \tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

25. $y = \left(x^2 - 9\tan^{-1}\dfrac{x}{3}\right)^3$

26. $y = \sqrt{x - \cos^{-1}(x+1)}$

27. $F(t) = \arctan\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)$

28. $g(t) = \arccos\sqrt{3t+1}$

29. $f(x) = \operatorname{arcsen}(\cos 4x)$

30. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{2}\right)$

31. $f(x) = \tan(\operatorname{sen}^{-1} x^2)$

32. $f(x) = \cos(x\operatorname{sen}^{-1} x)$

En los problemas 33 y 34, use diferenciación implícita para encontrar dy/dx.

33. $\tan^{-1} y = x^2 + y^2$

34. $\operatorname{sen}^{-1} y - \cos^{-1} x = 1$

En los problemas 35 y 36, demuestre que $f'(x) = 0$. Interprete el resultado.

35. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x$

36. $f(x) = \tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x)$.

En los problemas 37 y 38, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

37. $y = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{2}; \quad x = 1$

38. $y = (\cos^{-1} x)^2; \quad x = 1/\sqrt{2}$

En los problemas 39 y 40, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de x.

39. $f(x) = x\tan^{-1} x; \quad x = 1$

40. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x - 1); \quad x = \dfrac{1}{2}$

41. Encuentre los puntos sobre la gráfica de $f(x) = 5 - 2\operatorname{sen} x$, $0 \le x \le 2\pi$, donde la recta tangente es paralela a la recta $y = \sqrt{3}x + 1$.

42. Encuentre todas las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = \arctan x$ cuya pendiente es $\frac{1}{4}$.

Piense en ello

43. Si f y $(f^{-1})'$ son diferenciables, use (3) para encontrar una fórmula para $(f^{-1})''(x)$.

3.8 Funciones exponenciales

Introducción En la sección 1.6 vimos que la función exponencial $f(x) = b^x$, $b > 0$, $b \neq 1$, está definida para todos los números reales; es decir, el dominio de f es $(-\infty, \infty)$. Al revisar la figura 1.6.2 observamos que f es continua en todas partes. Resulta que una función exponencial también es diferenciable en todas partes. En esta sección desarrollaremos la derivada de $f(x) = b^x$.

Derivada de una función exponencial Para encontrar la derivada de una función exponencial $f(x) = b^x$ usamos la definición de la derivada proporcionada en (2) de la definición 3.1.1. Primero calculamos el cociente diferencial

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

en tres pasos. Para la función exponencial $f(x) = b^x$, tenemos

i) $f(x+h) = b^{x+h} = b^x b^h$ ← leyes de los exponentes

ii) $f(x+h) - f(x) = b^{x+h} - b^x = b^x b^h - b^x = b^x(b^h - 1)$ ← leyes de los exponentes y factorización

iii) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{b^x(b^h - 1)}{h} = b^x \cdot \dfrac{b^h - 1}{h}.$

En el cuarto paso, el paso de cálculo, hacemos $h \to 0$ pero en forma semejante a las derivadas de sen x y cos x en la sección 3.4, no hay forma evidente de cancelar la h en el cociente diferencial *iii)*. No obstante, la derivada de $f(x) = b^x$ es

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} b^x \cdot \frac{b^h - 1}{h}. \tag{2}$$

Debido a que b^x no depende de la variable h, (2) puede escribirse como

$$f'(x) = b^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h}. \tag{3}$$

A continuación se presentan algunos resultados sorprendentes. Puede demostrarse que el límite en (3),

$$\lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h}, \tag{4}$$

existe para toda base positiva b. No obstante, como sería de esperar, para cada base b obtenemos una respuesta diferente. Así, por conveniencia, la expresión en (4) se denotará por el símbolo $m(b)$. Entonces, la derivada de $f(x) = b^x$ es

$$f'(x) = b^x m(b). \tag{5}$$

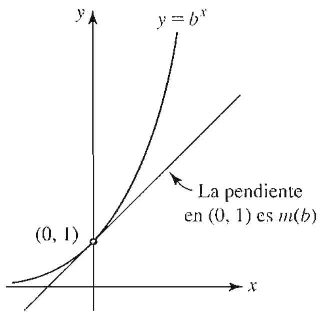


FIGURA 3.8.1 Encuentre una base b de modo que la pendiente $m(b)$ de la recta tangente en (0, 1) sea 1

Se solicita al lector aproximar el valor de $m(b)$ en los cuatro casos $b = 1.5$, 2, 3 y 5 en los problemas 57-60 de los ejercicios 3.8. Por ejemplo, puede demostrar que $m(10) \approx 2.302585\ldots$ y como una consecuencia, si $f(x) = 10^x$, entonces

$$f'(x) = (2.302585\ldots)10^x. \tag{6}$$

Es posible que comprenda mejor lo que evalúa $m(b)$ al evaluar (5) en $x = 0$. Puesto que $b^0 = 1$, tenemos $f'(0) = m(b)$. En otras palabras, $m(b)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = b^x$ en $x = 0$; es decir, en la intersección y (0, 1). Vea la FIGURA 3.8.1. Dado que es necesario calcular una $m(b)$ diferente para cada base b, y que es probable que $m(b)$ sea un número "espantoso" como en (6), con el tiempo la siguiente pregunta surge de manera *natural*:

- ¿Hay alguna base b para la cual $m(b) = 1$? (7)

Derivada de la función exponencial natural Para contestar la pregunta planteada en (7), es necesario volver a las definiciones de e proporcionadas en la sección 1.6. En específico, (4) de la sección 1.6,

$$e = \lim_{h\to 0} (1 + h)^{1/h} \tag{8}$$

constituye el mecanismo para responder la pregunta planteada en (7). Sabemos que, a nivel intuitivo, la igualdad en (8) significa que cuando h se aproxima cada vez más a 0 entonces $(1 + h)^{1/h}$ puede hacerse arbitrariamente próximo al número e. Así, para valores de h cercanos a 0, tenemos la aproximación $(1 + h)^{1/h} \approx e$ y así se concluye que $1 + h \approx e^h$. La última expresión escrita en la forma

$$\frac{e^h - 1}{h} \approx 1 \tag{9}$$

sugiere que

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1. \tag{10}$$

Puesto que el miembro izquierdo de (10) es $m(e)$, tenemos la respuesta a la pregunta planteada en (7):

- La base b para la cual $m(b) = 1$ es $b = e$. (11)

Además, por (3) hemos descubierto un resultado maravillosamente simple. La derivada de $f(x) = e^x$ es e^x. En resumen,

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x. \tag{12}$$

El resultado en (12) es el mismo que $f'(x) = f(x)$. Además, si $c \neq 0$ es una constante, entonces la otra función diferente de cero f en cálculo cuya derivada es igual a sí misma es $y = ce^x$ puesto que por la regla del múltiplo constante de la sección 3.2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}ce^x = c\frac{d}{dx}e^x = ce^x = y.$$

Otro repaso a la derivada de $f(x) = b^x$ En el análisis precedente vimos que $m(e) = 1$, pero se dejó sin contestar la pregunta de si $m(b)$ tiene un valor exacto para todo $b > 0$. Tiene más. A partir de la identidad $e^{\ln b} = b$, $b > 0$, podemos escribir cualquier función exponencial $f(x) = b^x$ en términos de la base e:

$$f(x) = b^x = (e^{\ln b})^x = e^{x(\ln b)}.$$

Por la regla de la cadena, la derivada de b^x es

$$f'(x) = \frac{d}{dx}e^{x(\ln b)} = e^{x(\ln b)} \cdot \frac{d}{dx}x(\ln b) = e^{x(\ln b)}(\ln b).$$

Volviendo a $b^x = e^{x(\ln b)}$, la línea precedente muestra que

$$\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b). \tag{13}$$

Al relacionar el resultado en (5) con el de (13) concluimos que $m(b) = \ln b$. Por ejemplo, la derivada de $f(x) = 10^x$ es $f'(x) = 10^x(\ln 10)$. Debido a que $\ln 10 \approx 2.302585$ observamos que $f'(x) = 10^x(\ln 10)$ es lo mismo que el resultado en (6).

A continuación se proporcionan las formas de los resultados de la regla de la cadena en (12) y (13).

Teorema 3.8.1 Derivadas de funciones exponenciales

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}, \tag{14}$$

y

$$\frac{d}{dx}b^u = b^u(\ln b)\frac{du}{dx}. \tag{15}$$

EJEMPLO 1 Regla de la cadena

Diferencie

a) $y = e^{-x}$ *b)* $y = e^{1/x^3}$ *c)* $y = 8^{5x}$.

Solución

a) Con $u = -x$, por (14) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = e^{-x}(-1) = -e^{-x}.$$

b) Al volver a escribir $u = 1/x^3$ como $u = x^{-3}$, por (14) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = e^{1/x^3} \cdot \frac{d}{dx} x^{-3} = e^{1/x^3}(-3x^{-4}) = -3\,\frac{e^{1/x^3}}{x^4}.$$

c) Con $u = 5x$, por (15) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 8^{5x} \cdot (\ln 8) \cdot \frac{d}{dx} 5x = 5 \cdot 8^{5x}(\ln 8).$$

EJEMPLO 2 Reglas del producto y de la cadena

Encuentre los puntos sobre la gráfica de $y = 3x^2e^{-x^2}$ donde la recta tangente es horizontal.

Solución Se usa la regla del producto junto con (14):

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3x^2 \cdot \frac{d}{dx} e^{-x^2} + e^{-x^2} \cdot \frac{d}{dx} 3x^2\\ &= 3x^2(-2xe^{-x^2}) + 6xe^{-x^2}\\ &= e^{-x^2}(-6x^3 + 6x).\end{aligned}$$

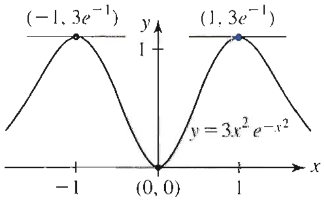


FIGURA 3.8.2 Gráfica de la función en el ejemplo 2

Puesto que $e^{-x^2} \neq 0$ para todos los números reales x, $\dfrac{dy}{dx} = 0$ cuando $-6x^3 + 6x = 0$. Al factorizar la última ecuación obtenemos $x(x + 1)(x - 1) = 0$ y así $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$. Así, los puntos correspondientes sobre la gráfica de la función dada son $(0, 0)$, $(-1, 3e^{-1})$ y $(1, 3e^{-1})$. La gráfica de $y = 3x^2e^{-x^2}$ junto con las tres rectas tangentes (en rojo) se muestran en la FIGURA 3.8.2.

En el ejemplo siguiente se recuerda el hecho de que una ecuación exponencial puede escribirse en una forma logarítmica equivalente. En particular, se usa (9) de la sección 1.6 en la forma

$$y = e^x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \ln y. \tag{16}$$

EJEMPLO 3 Recta tangente paralela a una recta

Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x) = 2e^{-x}$ donde la recta tangente es paralela a $y = -4x - 2$.

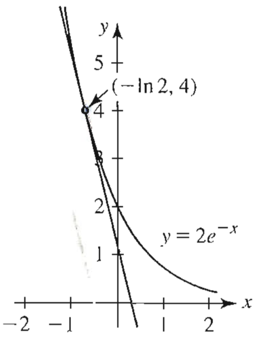


FIGURA 3.8.3 Gráfica de la función y rectas en el ejemplo 3

Solución Sea $(x_0, f(x_0)) = (x_0, 2e^{-x_0})$ el punto desconocido sobre la gráfica de $f(x) = 2e^{-x}$ donde la recta tangente es paralela a $y = -4x - 2$. Entonces, a partir de la derivada $f'(x) = -2e^{-x}$, la pendiente de la recta tangente en este punto es $f'(x_0) = -2e^{-x_0}$. Puesto que $y = -4x - 2$ y la recta tangente es paralela en ese punto, las pendientes son iguales:

$$f'(x_0) = -4 \qquad \text{o bien,} \qquad -2e^{-x_0} = -4 \qquad \text{o bien,} \qquad e^{-x_0} = 2.$$

A partir de (16), la última ecuación proporciona $-x_0 = \ln 2$ o $x_0 = -\ln 2$. Por tanto, el punto es $(-\ln 2, 2e^{\ln 2})$. Puesto que $e^{\ln 2} = 2$, el punto es $(-\ln 2, 4)$. En la FIGURA 3.8.3, la línea proporcionada se muestra en verde y la recta tangente en rojo.

$\dfrac{d}{dx}$ NOTAS DESDE EL AULA

Los números e y π son **trascendentes**, así como irracionales. Un número trascendente es un número que *no* es raíz de una ecuación polinomial con coeficientes enteros. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es irracional pero no trascendente, puesto que es una raíz de la ecuación polinomial $x^2 - 2 = 0$. El hecho de que el número e sea trascendente fue demostrado por el matemático francés **Charles Hermite** (1822-1901) en 1873, mientras que el matemático alemán **Ferdinand Lindemann** (1852-1939) demostró nueve años después que π es trascendente. Esta última demostración evidenció de manera concluyente que resolver la "cuadratura del círculo" con regla y compás era imposible.

Ejercicios 3.8

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-11.

Fundamentos

En los problemas 1-26, encuentre la derivada de la función dada.

1. $y = e^{-x}$
2. $y = e^{2x+3}$
3. $y = e^{\sqrt{x}}$
4. $y = e^{\text{sen } 10x}$
5. $y = 5^{2x}$
6. $y = 10^{-3x^2}$
7. $y = x^3e^{4x}$
8. $y = e^{-x} \text{ sen } \pi x$
9. $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x}$
10. $f(x) = \dfrac{xe^x}{x + e^x}$
11. $y = \sqrt{1 + e^{-5x}}$
12. $y = (e^{2x} - e^{-2x})^{10}$
13. $y = \dfrac{2}{e^{x/2} + e^{-x/2}}$
14. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
15. $y = \dfrac{e^{7x}}{e^{-x}}$
16. $y = e^{2x}e^{3x}e^{4x}$
17. $y = (e^3)^{x-1}$
18. $y = \left(\dfrac{1}{e^x}\right)^{100}$
19. $f(x) = e^{x^{1/3}} + (e^x)^{1/3}$
20. $f(x) = (2x + 1)^3e^{-(1-x)^4}$
21. $f(x) = e^{-x} \tan e^x$
22. $f(x) = \sec e^{2x}$
23. $f(x) = e^{x\sqrt{x^2+1}}$
24. $y = e^{\frac{x+2}{x-2}}$
25. $y = e^{e^{x^2}}$
26. $y = e^x + e^{x+e^{-x}}$

27. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = (e^x + 1)^2$ en $x = 0$.

28. Encuentre la pendiente de la recta normal a la gráfica de $y = (x - 1)e^{-x}$ en $x = 0$.

29. Encuentre el punto sobre la gráfica de $y = e^x$ donde la recta tangente es paralela a $3x - y = 7$.

30. Encuentre el punto sobre la gráfica de $y = 5x + e^{2x}$ donde la recta tangente es paralela a $y = 6x$.

En los problemas 31 y 32, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal. Use un dispositivo para graficar y obtenga la gráfica de cada función.

31. $f(x) = e^{-x} \text{ sen } x$
32. $f(x) = (3 - x^2)e^{-x}$

En los problemas 33-36, encuentre la derivada de orden superior indicada.

33. $y = e^{x^2}; \quad \dfrac{d^3y}{dx^3}$
34. $y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}; \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$
35. $y = \text{sen } e^{2x}; \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$
36. $y = x^2e^x; \quad \dfrac{d^4y}{dx^4}$

En los problemas 37 y 38, C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

37. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}; \quad y'' + y' - 6y = 0$

38. $y = C_1e^{-x}\cos 2x + C_2e^{-x}\text{sen } 2x; \quad y'' + 2y' + 5y = 0$

39. Si C y k son constantes reales, demuestre que la función $y = Ce^{kx}$ satisface la ecuación diferencial $y' = ky$.

40. Use el problema 39 para encontrar una función que satisfaga las condiciones dadas.
   a) $y' = -0.01y$ y $y(0) = 100$
   b) $\dfrac{dP}{dt} - 0.15P = 0$ y $P(0) = P_0$

En los problemas 41-46, use diferenciación implícita para encontrar dy/dx.

41. $y = e^{x+y}$
42. $xy = e^y$
43. $y = \cos e^{xy}$
44. $y = e^{(x+y)^2}$
45. $x + y^2 = e^{x/y}$
46. $e^x + e^y = y$

47. *a*) Trace la gráfica de $f(x) = e^{-|x|}$.
   b) Encuentre $f'(x)$.
   c) Trace la gráfica de f'.
   d) ¿La función es diferenciable en $x = 0$?

48. *a*) Demuestre que la función $f(x) = e^{\cos x}$ es periódica con periodo 2π.
   b) Encuentre todos los puntos sobre la gráfica de f donde la tangente es horizontal.
   c) Trace la gráfica de f.

Aplicaciones

49. La función logística
$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}},$$
donde a y b son constantes positivas, a menudo sirve como modelo matemático para una población en crecimiento pero limitada.
   a) Demuestre que $P(t)$ satisface la ecuación diferencial
$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP).$$
   b) La gráfica de $P(t)$ se denomina **curva logística**, donde $P(0) = P_0$ es la población inicial. Considere el caso donde $a = 2$, $b = 1$ y $P_0 = 1$. Encuentre asíntotas horizontales para la gráfica de $P(t)$ al determinar los límites $\lim_{t\to-\infty} P(t)$ y $\lim_{t\to\infty} P(t)$.
   c) Grafique $P(t)$.
   d) Encuentre el o los valores de t para los cuales $P''(t) = 0$.

50. El **modelo matemático de Jenss** (1937) constituye una de las fórmulas empíricas más precisas para pronosticar la estatura h (en centímetros) en términos de la edad t (en años) para niños en edad preescolar (de 3 meses a 6 años):
$$h(t) = 79.04 + 6.39t - e^{3.26 - 0.99t}.$$
   a) ¿Qué estatura pronostica este modelo para un niño de 2 años?
   b) ¿Cuán rápido crece en estatura un niño de 2 años?
   c) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de h sobre el intervalo $[\frac{1}{4}, 6]$.
   d) Use la gráfica del inciso *c*) para estimar la edad de un niño en edad preescolar que mide 100 cm de estatura.

☰ Piense en ello

51. Demuestre que la intersección con el eje x de la recta tangente a la gráfica de $y = e^{-x}$ en $x = x_0$ está una unidad a la derecha de x_0.
52. ¿Cómo está relacionada la recta tangente a la gráfica de $y = e^x$ en $x = 0$ con la recta tangente a la gráfica de $y = e^{-x}$ en $x = 0$?
53. Explique por qué sobre la gráfica de $y = e^x$ no hay ningún punto donde la recta tangente sea paralela a $2x + y = 1$.
54. Encuentre todas las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = e^x$ que pasan por el origen.

En los problemas 55 y 56, el símbolo n representa un entero positivo. Encuentre una fórmula para la derivada dada.

55. $\dfrac{d^n}{dx^n}\sqrt{e^x}$
56. $\dfrac{d^n}{dx^n}xe^{-x}$

☰ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 57-60, use una calculadora para estimar el valor $m(b) = \lim_{h\to 0} \dfrac{b^h - 1}{h}$ para $b = 1.5$, $b = 2$, $b = 3$ y $b = 5$ al llenar la tabla siguiente.

57.

$h \to 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\dfrac{(1.5)^h - 1}{h}$						

58.

$h \to 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\dfrac{2^h - 1}{h}$						

59.

$h \to 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\dfrac{3^h - 1}{h}$						

60.

$h \to 0$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\dfrac{5^h - 1}{h}$						

61. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Demuestre que f es diferenciable para toda x. Use la definición de la derivada para calcular $f'(0)$.

3.9 Funciones logarítmicas

Introducción Debido a que la inversa de la función exponencial $y = b^x$ es la función logarítmica $y = \log_b x$, la derivada de la segunda función puede encontrarse de tres maneras: (3) de la sección 3.7, diferenciación implícita o a partir de la definición fundamental (2) en la sección 3.1. Demostraremos los dos últimos métodos.

Derivada de la función logaritmo natural Por (9) de la sección 1.6 sabemos que $y = \ln x$ es lo mismo que $x = e^y$. Por diferenciación implícita, la regla de la cadena y (14) de la sección 3.8,

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}e^y \quad \text{proporciona} \quad 1 = e^y\frac{dy}{dx}.$$

En consecuencia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}.$$

Al sustituir e^y por x, obtenemos el siguiente resultado:

Así como en las funciones trigonométricas inversas, la derivada de la inversa de la función exponencial natural es una función algebraica.

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Derivada de $f(x) = \log_b x$ Precisamente de la misma manera en que se obtuvo (1), la derivada de $y = \log_b x$ puede obtenerse al diferenciar implícitamente $x = b^y$.

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}b^y \quad \text{proporciona} \quad 1 = b^y(\ln b)\frac{dy}{dx}.$$

En consecuencia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b^y(\ln b)}.$$

Al sustituir b^y por x, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{x(\ln b)}. \tag{2}$$

Puesto que $\ln e = 1$, (2) se vuelve (1) cuando $b = e$.

EJEMPLO 1 Regla del producto

Diferencie $f(x) = x^2 \ln x$.

Solución Por la regla del producto y (1) tenemos

$$f'(x) = x^2 \cdot \frac{d}{dx}\ln x + (\ln x)\cdot\frac{d}{dx}x^2 = x^2\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)\cdot 2x$$

o bien,

$$f'(x) = x + 2x\ln x.$$

■

EJEMPLO 2 Pendiente de una recta tangente

Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \log_{10} x$ en $x = 2$.

Solución Por (2), la derivada de $y = \log_{10} x$ es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(\ln 10)}.$$

Con ayuda de una calculadora, la pendiente de la recta tangente en $(2, \log_{10} 2)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{1}{2\ln 10} \approx 0.2171.$$

■

Los resultados en (1) y (2) se resumen en forma de regla de la cadena.

Teorema 3.9.1 Derivadas de funciones logarítmicas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \tag{3}$$

y

$$\frac{d}{dx}\log_b u = \frac{1}{u(\ln b)}\frac{du}{dx}. \tag{4}$$

EJEMPLO 3 Regla de la cadena

Diferencie

a) $f(x) = \ln(\cos x)$ y *b*) $y = \ln(\ln x)$.

Solución

a) Por (3), con $u = \cos x$ tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{d}{dx}\cos x = \frac{1}{\cos x}\cdot(-\operatorname{sen} x)$$

o bien,

$$f'(x) = -\tan x.$$

b) Al usar de nuevo (3), ahora con $u = \ln x$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x}.$$

■

EJEMPLO 4 Regla de la cadena

Diferencie $f(x) = \ln x^3$.

Solución Debido a que x^3 debe ser positiva, se entiende que $x > 0$. Así, por (3), con $u = x^3$, tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{d}{dx} x^3 = \frac{1}{x^3} \cdot (3x^2) = \frac{3}{x}.$$

Solución alterna: Por *iii*) de las leyes de los logaritmos (teorema 1.6.1), $\ln N^c = c \ln N$ y así es posible volver a escribir $y = \ln x^3$ como $y = 3 \ln x$ y después diferenciar:

$$f(x) = 3 \frac{d}{dx} \ln x = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}.$$ ■

Aunque el dominio del logaritmo natural $y = \ln x$ es el conjunto $(0, \infty)$, el dominio de $y = \ln|x|$ se extiende al conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Para los números en este último dominio,

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} &\text{para } x > 0, \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \\ &\text{para } x < 0, \quad \frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{5}$$

Las derivadas en (5) prueban que para $x \neq 0$,

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}. \tag{6}$$

Así, el resultado en (6) se generaliza por la regla de la cadena. Para una función diferenciable $u = g(x)$, $u \neq 0$,

$$\frac{d}{dx} \ln|u| = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}. \tag{7}$$

EJEMPLO 5 Uso de (6)

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln|x|$ en $x = -2$ y $x = 2$.

Solución Puesto que (6) proporciona $dy/dx = 1/x$, tenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Debido a que $\ln|-2| = \ln 2$, (8) proporciona, respectivamente, las pendientes de las rectas tangentes en los puntos $(-2, \ln 2)$ y $(2, \ln 2)$. Observe en la FIGURA 3.9.1 que la gráfica de $y = \ln|x|$ es simétrica con respecto al eje y; las rectas tangentes se muestran en rojo. ■

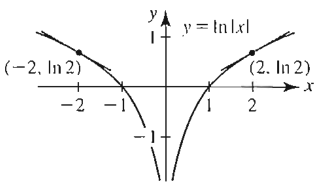


FIGURA 3.9.1 Gráficas de las rectas tangentes y función en el ejemplo 5

EJEMPLO 6 Uso de (7)

Diferencie

a) $y = \ln(2x - 3)$ y *b*) $y = \ln|2x - 3|$.

Solución

a) Para $2x - 3 > 0$, o $x > \frac{3}{2}$, por (3) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x - 3} \cdot \frac{d}{dx}(2x - 3) = \frac{2}{2x - 3}. \tag{9}$$

b) Para $2x - 3 \neq 0$, o $x \neq \frac{3}{2}$, por (7) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x - 3} \cdot \frac{d}{dx}(2x - 3) = \frac{2}{2x - 3}. \tag{10}$$

Aunque (9) y (10) *parecen* iguales, definitivamente no se trata de la misma función. La diferencia consiste simplemente en que el dominio de la derivada en (9) es el intervalo $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, mientras el dominio de la derivada en (10) es el conjunto de números reales excepto $x = \frac{3}{2}$. ■

EJEMPLO 7 Una distinción

Las funciones $f(x) = \ln x^4$ y $g(x) = 4 \ln x$ no son las mismas. Puesto que $x^4 > 0$ para toda $x \neq 0$, el dominio de f es el conjunto de números reales excepto $x = 0$. El dominio de g es el intervalo $(0, \infty)$. Así,

$$f'(x) = \frac{4}{x}, \quad x \neq 0 \qquad \text{mientras} \qquad g'(x) = \frac{4}{x}, \quad x > 0.$$ ■

EJEMPLO 8 Simplificar antes de diferenciar

Diferencie $y = \ln \dfrac{x^{1/2}(2x+7)^4}{(3x^2+1)^2}$.

Solución Al usar las leyes de los logaritmos proporcionadas en la sección 1.6 para $x > 0$, podemos volver a escribir el miembro derecho de la función dada como

$$\begin{aligned} y &= \ln x^{1/2}(2x+7)^4 - \ln(3x^2+1)^2 && \leftarrow \ln(M/N) = \ln M - \ln N \\ &= \ln x^{1/2} + \ln(2x+7)^4 - \ln(3x^2+1)^2 && \leftarrow \ln(MN) = \ln M + \ln N \\ &= \frac{1}{2}\ln x + 4\ln(2x+7) - 2\ln(3x^2+1) && \leftarrow \ln N^c = c \ln N \end{aligned}$$

de modo que $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + 4\cdot\frac{1}{2x+7}\cdot 2 - 2\cdot\frac{1}{3x^2+1}\cdot 6x$$

o bien, $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x} + \frac{8}{2x+7} - \frac{12x}{3x^2+1}.$$ ■

Diferenciación logarítmica La diferenciación de una función complicada $y = f(x)$ que contiene productos, cocientes y potencias puede simplificarse por medio de una técnica denominada **diferenciación logarítmica**. El procedimiento consta en tres pasos.

Directrices para diferenciación logarítmica

i) Tome el logaritmo natural de ambos miembros de $y = f(x)$. Use las propiedades generales de los logaritmos para simplificar tanto como sea posible el miembro derecho de $\ln y = \ln f(x)$.

ii) Diferencie implícitamente la versión simplificada de $\ln y = \ln f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}\ln f(x).$$

iii) Puesto que la derivada del miembro izquierdo es $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}$, multiplique ambos miembros por y y sustituya y por $f(x)$.

Ahora ya sabe cómo diferenciar cualquier función del tipo

$$y = (\text{constante})^{\text{variable}} \qquad \text{y} \qquad y = (\text{variable})^{\text{constante}}.$$

Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\pi^x = \pi^x(\ln \pi) \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}x^\pi = \pi x^{\pi-1}.$$

Hay funciones donde tanto la base como el exponente son variables:

$$y = (\text{variable})^{\text{variable}}. \tag{11}$$

Por ejemplo, $f(x) = (1 + 1/x)^x$ es una función del tipo descrito en (11). Recuerde que en la sección 1.6 vimos que $f(x) = (1 + 1/x)^x$ desempeñaba un papel importante en la definición del número e. A pesar de que no se desarrollará una fórmula general para la derivada de funciones del tipo dado en (11), es posible obtener sus derivadas por medio del proceso de diferenciación logarítmica. El siguiente ejemplo ilustra el método para encontrar dy/dx.

EJEMPLO 9 Diferenciación logarítmica

Diferencie $y = x^{\sqrt{x}}, x > 0$.

Solución Al tomar el logaritmo natural de ambos miembros de la ecuación dada y simplificar obtenemos

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x. \quad \leftarrow \text{propiedad } iii) \text{ de las leyes de los logaritmos. Sección 1.6}$$

Luego se diferencia implícitamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{-1/2}\cdot\ln x && \leftarrow \text{regla del producto} \\ \frac{dy}{dx} &= y\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right] && \leftarrow \text{ahora se sustituye } y \text{ por } x^{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2}x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2 + \ln x). && \leftarrow \text{denominador común y leyes de los exponentes} \end{aligned}$$

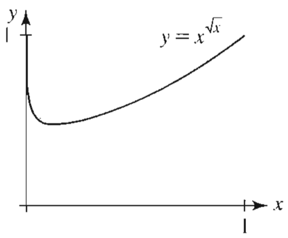


FIGURA 3.9.2 Gráfica de la función en el ejemplo 9

La gráfica de $y = x^{\sqrt{x}}$ en la FIGURA 3.9.2 se obtuvo con ayuda de un dispositivo para graficar. Observe que la gráfica tiene una tangente horizontal en el punto donde $dy/dx = 0$. Por tanto, la coordenada x del punto de tangencia horizontal se determina a partir de $2 + \ln x = 0$ o $\ln x = -2$. La última ecuación proporciona $x = e^{-2}$. ■

EJEMPLO 10 Diferenciación logarítmica

Encuentre la derivada de $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}}$.

Solución Observe que la función dada no contiene logaritmos. Entonces podemos encontrar dy/dx usando una aplicación ordinaria de las reglas del cociente, del producto y de potencias. Este procedimiento, que es tedioso, puede evitarse al tomar primero el logaritmo de ambos miembros de la ecuación dada, simplificar como se hizo en el ejemplo con las leyes de los logaritmos y *luego* diferenciar implícitamente. Se toma el logaritmo de ambos miembros de la ecuación dada y se simplifica el miembro derecho:

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln\frac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}} \\ &= \ln\sqrt[3]{x^4 + 6x^2} + \ln(8x + 3)^5 - \ln(2x^2 + 7)^{2/3} \\ &= \frac{1}{3}\ln(x^4 + 6x^2) + 5\ln(8x + 3) - \frac{2}{3}\ln(2x^2 + 7). \end{aligned}$$

Al diferenciar la última línea con respecto a x obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^4 + 6x^2}\cdot(4x^3 + 12x) + 5\cdot\frac{1}{8x + 3}\cdot 8 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2x^2 + 7}\cdot 4x \\ \frac{dy}{dx} &= y\left[\frac{4x^3 + 12x}{3(x^4 + 6x^2)} + \frac{40}{8x + 3} - \frac{8x}{3(2x^2 + 7)}\right] \leftarrow \text{ambos lados se multiplican por } y \\ &= \frac{\sqrt[3]{x^4 + 6x^2}(8x + 3)^5}{(2x^2 + 7)^{2/3}}\left[\frac{4x^3 + 12x}{3(x^4 + 6x^2)} + \frac{40}{8x + 3} - \frac{8x}{3(2x^2 + 7)}\right]. \leftarrow \text{y se sustituye por la expresión original} \end{aligned}$$

■

Posdata: Otro repaso a la derivada de $f(x) = \log_b x$ Como se afirmó en la introducción de esta sección, podemos obtener la derivada de $f(x) = \log_b x$ al usar la definición de la derivada. Por (2) de la sección 3.1,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_b(x+h)-\log_b x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_b\frac{x+h}{x} && \leftarrow \text{álgebra y las leyes de los logaritmos} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_b\left(1+\frac{h}{x}\right) && \leftarrow \text{división de } x+h \text{ entre } x \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_b\left(1+\frac{h}{x}\right) && \leftarrow \text{multiplicación por } x/x = 1 \\
&= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_b\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h} && \leftarrow \text{las leyes de los logaritmos} \\
&= \frac{1}{x}\log_b\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right]. && (12)
\end{aligned}$$

El último paso, tomar el límite dentro de la función logarítmica, se justifica al invocar la continuidad de la función sobre $(0, \infty)$ y suponer que el límite entre corchetes existe. Si en la última ecuación se hace $t = h/x$, entonces, puesto que x es fija, $h \to 0$ implica $t \to 0$. En consecuencia, por (4) de la sección 1.6 vemos que

$$\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e.$$

Por tanto, el resultado en (12) muestra que

$$\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{x}\log_b e. \qquad (13)$$

Quienes poseen un ojo agudo y gran memoria han observado que (13) no es lo mismo que (2). Los resultados son equivalentes, puesto que por las fórmulas de cambio de base para logaritmos tenemos que $\log_b e = \ln e/\ln b = 1/\ln b$.

Una vez que se hace la elección "natural" de $b = e$, (13) se vuelve (1) puesto que $\log_e e = \ln e = 1$.

Posdata: Otro repaso a la regla de potencias Finalmente, ya es posible demostrar la regla de potencias $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$, (3) de la sección 3.2, para todos los números reales exponentes n. Nuestra demostración usa el siguiente hecho: para $x > 0$, x^n se define para todos los números reales n. Luego, debido a la identidad $x = e^{\ln x}$ podemos escribir

$$x^n = (e^{\ln x})^n = e^{n\ln x}.$$

Así,

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}e^{n\ln x} = e^{n\ln x}\frac{d}{dx}(n\ln x) = \frac{n}{x}e^{n\ln x}.$$

Al sustituir $e^{n\ln x} = x^n$ en el último resultado se completa la demostración para $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{n}{x}x^n = nx^{n-1}.$$

La última fórmula de derivada también es válida para $x < 0$ cuando $n = p/q$ es un número racional y q es un entero impar.

Ejercicios 3.9

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-12.

Fundamentos

En los problemas 1-24, encuentre la derivada de la función dada.

1. $y = 10\ln x$
2. $y = \ln 10x$
3. $y = \ln x^{1/2}$
4. $y = (\ln x)^{1/2}$
5. $y = \ln(x^4 + 3x^2 + 1)$
6. $y = \ln(x^2 + 1)^{20}$
7. $y = x^2\ln x^3$
8. $y = x - \ln|5x + 1|$
9. $y = \dfrac{\ln x}{x}$
10. $y = x(\ln x)^2$
11. $y = \ln\dfrac{x}{x+1}$
12. $y = \dfrac{\ln 4x}{\ln 2x}$
13. $y = -\ln|\cos x|$
14. $y = \dfrac{1}{3}\ln|\operatorname{sen} 3x|$
15. $y = \dfrac{1}{\ln x}$
16. $y = \ln\dfrac{1}{x}$
17. $f(x) = \ln(x\ln x)$
18. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$
19. $g(x) = \sqrt{\ln\sqrt{x}}$
20. $w(\theta) = \theta\operatorname{sen}(\ln 5\theta)$
21. $H(t) = \ln t^2(3t^2 + 6)$
22. $G(t) = \ln\sqrt{5t+1}(t^3 + 4)^6$
23. $f(x) = \ln\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+3}$
24. $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{(3x+2)^5}{x^4+7}}$

25. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln x$ en $x = 1$.
26. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \ln(x^2 - 3)$ en $x = 2$.
27. Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \ln(e^{3x} + x)$ en $x = 0$.
28. Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = \ln(xe^{-x^3})$ en $x = 1$.
29. Encuentre la pendiente de la tangente a la gráfica de f' en el punto en que la pendiente de la tangente a la gráfica de $f(x) = \ln x^2$ es 4.
30. Determine el punto sobre la gráfica de $y = \ln 2x$ donde la recta tangente es perpendicular a $x + 4y = 1$.

En los problemas 31 y 32, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

31. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
32. $f(x) = x^2 \ln x$

En los problemas 33-36, encuentre la derivada indicada y simplifique tanto como pueda.

33. $\dfrac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
34. $\dfrac{d}{dx}\ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$
35. $\dfrac{d}{dx}\ln(\sec x + \tan x)$
36. $\dfrac{d}{dx}\ln(\csc x - \cot x)$

En los problemas 37-40, encuentre la derivada de orden superior indicada.

37. $y = \ln x$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}$
38. $y = x \ln x$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$
39. $y = (\ln|x|)^2$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$
40. $y = \ln(5x - 3)$; $\dfrac{d^4y}{dx^4}$

En los problemas 41 y 42, C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada para $x > 0$.

41. $y = C_1x^{-1/2} + C_2x^{-1/2}\ln x$; $4x^2y'' + 8xy' + y = 0$
42. $y = C_1x^{-1}\cos\left(\sqrt{2}\ln x\right) + C_2x^{-1}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\ln x\right)$;
$x^2y'' + 3xy' + 3y = 0$

En los problemas 43-48, use diferenciación implícita para encontrar dy/dx.

43. $y^2 = \ln xy$
44. $y = \ln(x + y)$
45. $x + y^2 = \ln\dfrac{x}{y}$
46. $y = \ln xy^2$
47. $xy = \ln(x^2 + y^2)$
48. $x^2 + y^2 = \ln(x + y)^2$

En los problemas 49-56, use diferenciación logarítmica para encontrar dy/dx.

49. $y = x^{\operatorname{sen} x}$
50. $y = (\ln|x|)^x$
51. $y = x(x - 1)^x$
52. $y = \dfrac{(x^2 + 1)^x}{x^2}$
53. $y = \dfrac{\sqrt{(2x + 1)(3x + 2)}}{4x + 3}$
54. $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^2 + 2}}$
55. $y = \dfrac{(x^3 - 1)^5(x^4 + 3x^3)^4}{(7x + 5)^9}$
56. $y = x\sqrt{x + 1}\,\sqrt[3]{x^2 + 2}$
57. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^{x+2}$ en $x = 1$.
58. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x(\ln x)^x$ en $x = e$.

En los problemas 59 y 60, encuentre el punto sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal. Use un dispositivo para graficar a fin de obtener la gráfica de cada función sobre el intervalo $[0.01, 1]$.

59. $y = x^x$
60. $y = x^{2x}$

≡ Piense en ello

61. Encuentre las derivadas de
a) $y = \tan x^x$ *b*) $y = x^x e^{x^x}$ *c*) $y = x^{x^x}$.
62. Encuentre d^2y/dx^2 para $y = \sqrt{x^x}$.
63. La función $f(x) = \ln|x|$ no es diferenciable sólo en $x = 0$. La función $g(x) = |\ln x|$ no es diferenciable en $x = 0$ ni en otro valor de $x > 0$. ¿Cuál es?
64. Encuentre una manera para calcular $\dfrac{d}{dx}\log_x e$.

≡ Problemas con calculadora/SAC

65. *a*) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$ sobre el intervalo $(0, 5\pi)$.
b) Explique por qué en ciertos intervalos parece que no hay gráfica. Identifique los intervalos.
66. *a*) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $y = |\cos x|^{\cos x}$ sobre el intervalo $[0, 5\pi]$.
b) Determine, por lo menos aproximadamente, los valores de x en el intervalo $[0, 5\pi]$ para los cuales la tangente a la gráfica es horizontal.
67. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = x^3 - 12\ln x$. Luego encuentre al valor *exacto* del menor valor de $f(x)$.

3.10 Funciones hiperbólicas

Introducción Si alguna vez ha visitado el Arco de San Luis, Missouri, que mide 630 pies de altura, quizá se haya preguntado: ¿cuál es la forma del arco?, y recibido la respuesta críptica: la forma de una catenaria invertida. La palabra *catenaria* proviene de la palabra latina *catena* y significa literalmente "cadena colgante" (los romanos usaban una cadena para sujetar a los perros). Es posible demostrar que la forma que asumen un alambre flexible, una cadena, un cable o una cuerda colgantes suspendidos en dos puntos es la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{k}{2}(e^{cx} + e^{-cx}) \qquad (1)$$

para elecciones idóneas de las constantes c y k. La gráfica de cualquier función de la forma dada en (1) se denomina **catenaria**.

El Arco de San Luis, Missouri.

Funciones hiperbólicas Combinaciones como (1) que implican las funciones exponenciales e^x y e^{-x} ocurren tan a menudo en matemáticas que ameritan definiciones especiales.

Definición 3.10.1 Seno y coseno hiperbólico

Para cualquier número real x, el **seno hiperbólico** de x es

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (2)$$

y el **coseno hiperbólico** de x es

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \qquad (3)$$

Puesto que el dominio de cada una de las funciones exponenciales e^x y e^{-x} es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$, el dominio de $y = \operatorname{senh} x$ y $y = \cosh x$ es $(-\infty, \infty)$. Por (2) y (3) de la definición 3.10.1, también resulta evidente que

$$\operatorname{senh} 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \cosh 0 = 1.$$

La forma del Arco de San Luis, Missouri, está basada en el modelo matemático

$$y = A - B\cosh(Cx/L),$$

donde $A = 693.8597$, $B = 68.7672$, $L = 299.2239$, $C = 3.0022$, y x y y se miden en pies. Cuando $x = 0$, se obtiene la altura aproximada de 630 pies.

En forma análoga a las funciones trigonométricas tan x, cot x, sec x y csc x que están definidas en términos de sen x y cos x, las cuatro funciones hiperbólicas adicionales se definen en términos de senh x y cosh x.

Definición 3.10.2 Otras funciones hiperbólicas

Para un número real x, la **tangente hiperbólica** de x es

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad (4)$$

la **cotangente hiperbólica** de x, $x \neq 0$, es

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad (5)$$

la **secante hiperbólica** de x es

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \qquad (6)$$

la **cosecante hiperbólica** de x, $x \neq 0$, es

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}. \qquad (7)$$

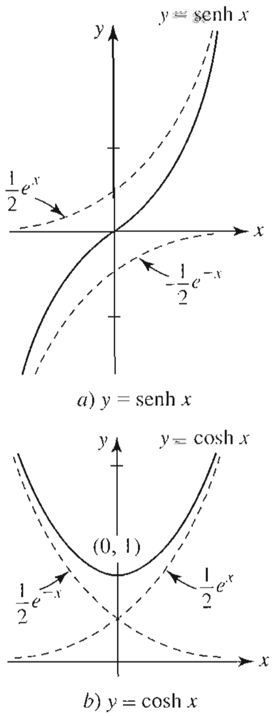
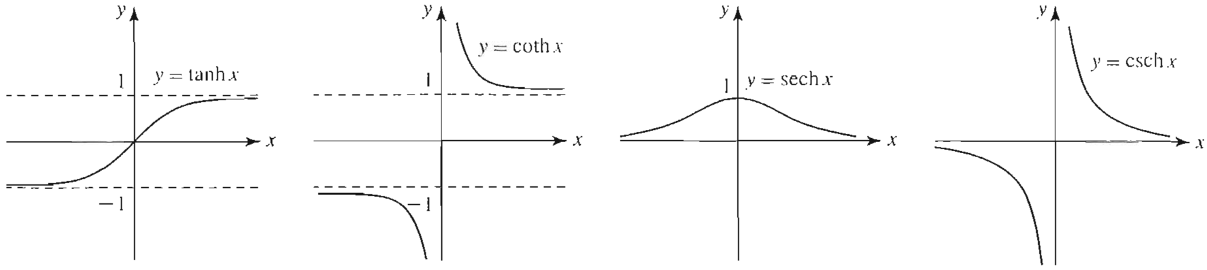


FIGURA 3.10.1 Gráficas del seno y coseno hiperbólicos

Gráficas de funciones hiperbólicas Las gráficas del seno hiperbólico y del coseno hiperbólico se proporcionan en la FIGURA 3.10.1. Observe la semejanza de la gráfica en la figura 3.10.1*b*) y la forma del Arco de San Luis, Missouri, en la foto al principio de esta sección. Las gráficas de la tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas se muestran en la FIGURA 3.10.2. Observe que $x = 0$ es una asíntota vertical de las gráficas de $y = \coth x$ y $y = \operatorname{csch} x$.



a) $y = \tanh x$ *b)* $y = \coth x$ *c)* $y = \text{sech}\, x$ *d)* $y = \text{csch}\, x$

FIGURA 3.10.2 Gráficas de la tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas

Identidades Aunque las funciones hiperbólicas no son periódicas, cuentan con muchas identidades que son semejantes a las de las funciones trigonométricas. Observe que las gráficas en la figura 3.10.1*a*) y *b*) son simétricas con respecto al origen y al eje *y*, respectivamente. En otras palabras, $y = \text{senh}\, x$ es una función impar y $y = \cosh x$ es una función par:

$$\text{senh}(-x) = -\text{senh}\, x, \tag{8}$$

$$\cosh(-x) = \cosh x. \tag{9}$$

En trigonometría, una identidad fundamental es $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$. Para funciones hiperbólicas, el análogo de esta identidad es

$$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1. \tag{10}$$

Para demostrar (10) recurrimos a (2) y (3) de la definición 3.10.1:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \text{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1.\end{aligned}$$

Las ecuaciones (8) a (10) y otras once identidades se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.10.1 Identidades hiperbólicas

$\text{senh}(-x) = -\text{senh}\, x$	$\text{senh}(x + y) = \text{senh}\, x \cosh y + \cosh x\, \text{senh}\, y$	(11)
$\cosh(-x) = \cosh x$	$\text{senh}(x - y) = \text{senh}\, x \cosh y - \cosh x\, \text{senh}\, y$	(12)
$\tanh(-x) = -\tanh x$	$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \text{senh}\, x\, \text{senh}\, y$	(13)
$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$	$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \text{senh}\, x\, \text{senh}\, y$	(14)
$1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x$	$\text{senh}\, 2x = 2\, \text{senh}\, x \cosh x$	(15)
$\coth^2 x - 1 = \text{csch}^2 x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \text{senh}^2 x$	(16)
$\text{senh}^2 x = \frac{1}{2}(-1 + \cosh 2x)$	$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$	(17)

Derivadas de funciones hiperbólicas Las derivadas de las funciones hiperbólicas se concluyen por (14) de la sección 3.8 y las reglas de diferenciación; por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\text{senh}\, x = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}e^x - \frac{d}{dx}e^{-x}\right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Es decir,

$$\frac{d}{dx}\text{senh}\, x = \cosh x. \tag{18}$$

En forma semejante, a partir de la definición del coseno hiperbólico en (3) debe resultar evidente que

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \text{senh}\, x. \tag{19}$$

Para diferenciar, por ejemplo, la tangente hiperbólica, se usan la regla del cociente y la definición que se proporcionó en (4):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tanh x &= \frac{d}{dx}\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\\ &= \frac{\cosh x \cdot \frac{d}{dx}\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} x \cdot \frac{d}{dx}\cosh x}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} \quad \leftarrow \text{por (10), esto es igual a 1}\\ &= \frac{1}{\cosh^2 x}.\end{aligned}$$

En otras palabras,

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x. \tag{20}$$

Las derivadas de las seis funciones hiperbólicas en el caso más general se concluyen por la regla de la cadena.

Teorema 3.10.2 Derivadas de las funciones hiperbólicas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} u = \cosh u\,\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cosh u = \operatorname{senh} u\,\frac{du}{dx}, \tag{21}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u\,\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch}^2 u\,\frac{du}{dx}, \tag{22}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u\,\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u\,\frac{du}{dx}. \tag{23}$$

Usted debe tomar nota cuidadosa de la ligera diferencia en los resultados en las ecuaciones (21) a (23) y las fórmulas análogas para las funciones trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \text{mientras} \qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x \qquad \text{mientras} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x.$$

EJEMPLO 1 Regla de la cadena

Diferencie

a) $y = \operatorname{senh}\sqrt{2x+1}$ *b*) $y = \coth x^3$.

Solución

a) Por el primer resultado en (21),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \cosh\sqrt{2x+1}\cdot\frac{d}{dx}(2x+1)^{1/2}\\ &= \cosh\sqrt{2x+1}\left(\frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2}\cdot 2\right)\\ &= \frac{\cosh\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.\end{aligned}$$

b) Por el segundo resultado en (22),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\text{csch}^2 x^3 \cdot \frac{d}{dx}x^3\\ &= -\text{csch}^2 x^3 \cdot 3x^2.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Valor de una derivada

Evalúe la derivada de $y = \dfrac{3x}{4 + \cosh 2x}$ en $x = 0$.

Solución Por la regla del cociente,

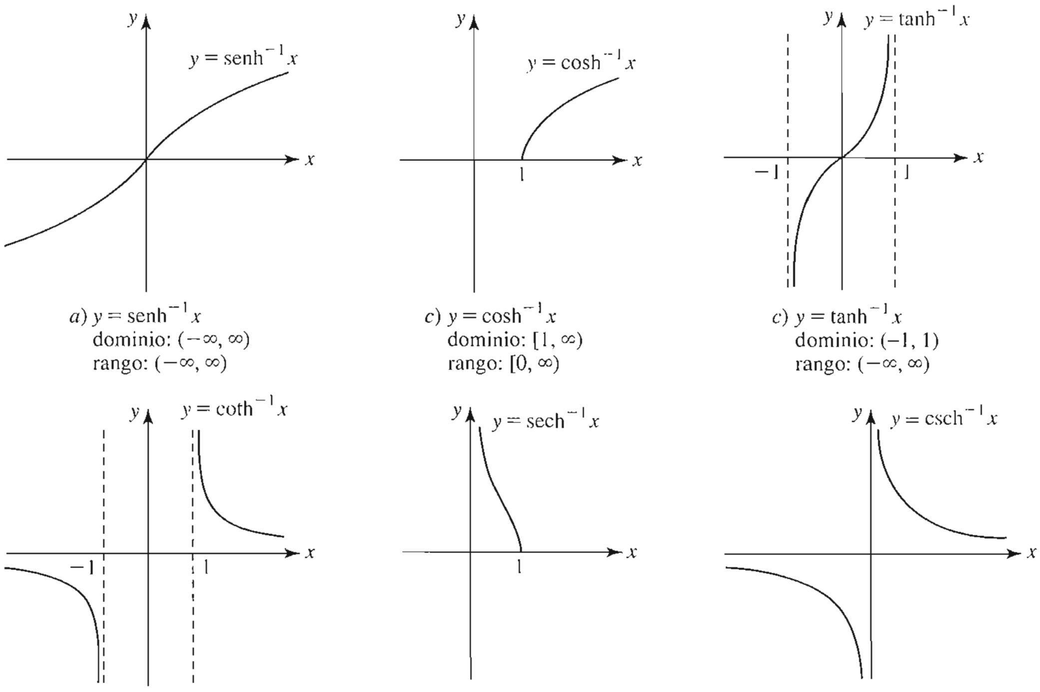
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4 + \cosh 2x) \cdot 3 - 3x(\text{senh } 2x \cdot 2)}{(4 + \cosh 2x)^2}.$$

Debido a que senh $0 = 0$ y $\cosh 0 = 1$, tenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

■

Funciones hiperbólicas inversas Al analizar la figura 3.10.1*a*) observamos que $y = \text{senh}\, x$ es una función uno a uno. Es decir, para cualquier número real y en el rango $(-\infty, \infty)$ del seno hiperbólico corresponde sólo un número real x en su dominio $(-\infty, \infty)$. Por tanto, $y =$ senh x tiene una función inversa que escribimos $y = \text{senh}^{-1} x$. Vea la FIGURA 3.10.3*a*). Así como en el análisis anterior de las funciones trigonométricas inversas en la sección 1.5, esta última notación es equivalente a $x = \text{senh}\, y$. A partir de la figura 3.10.2*a*) también observamos que $y = \tanh x$ con dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(-1, 1)$ también es uno a uno y tiene una inversa $y = \tanh^{-1}x$ con dominio $(-1, 1)$ y rango $(-\infty, \infty)$. Vea la figura 3.10.3*c*). Pero por las figuras 3.10.1*b*) y 3.10.2*c*) resulta evidente que $y = \cosh x$ y $y = \text{sech}\, x$ no son funciones uno a uno, de modo que no tienen funciones inversas a menos que sus dominios se restrinjan en forma conveniente. Al analizar la figura 3.10.1*b*) observamos que cuando el dominio de $y =$ cosh x se restringe al intervalo $[0, \infty)$, el rango correspondiente es $[1, \infty)$. Entonces, el dominio de la función inversa $y = \cosh^{-1} x$ es $[1, \infty)$ y su rango es $[0, \infty)$. Vea la figura 3.10.3*b*). Las gráficas de todas las funciones hiperbólicas inversas junto con sus dominios y rangos se resumen en la figura 3.10.3.



a) $y = \text{senh}^{-1}x$ dominio: $(-\infty, \infty)$ rango: $(-\infty, \infty)$

c) $y = \cosh^{-1}x$ dominio: $[1, \infty)$ rango: $[0, \infty)$

c) $y = \tanh^{-1}x$ dominio: $(-1, 1)$ rango: $(-\infty, \infty)$

d) $y = \coth^{-1}x$ dominio: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

e) $y = \text{sech}^{-1}x$ dominio: $(0, 1]$ rango: $[0, \infty)$

f) $y = \text{csch}^{-1}x$ dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ rango: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

FIGURA 3.10.3 Gráficas de las inversas de las hiperbólicas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante

Funciones hiperbólicas inversas como logaritmos Debido a que todas las funciones hiperbólicas están definidas en términos de combinaciones de e^x, no debe sorprender el hecho de encontrar que las funciones hiperbólicas inversas pueden expresarse en términos del logaritmo natural. Por ejemplo, $y = \operatorname{senh}^{-1}x$ es equivalente a $x = \operatorname{senh} y$, de modo que

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \text{o bien,} \quad 2x = \frac{e^{2y} - 1}{e^y} \quad \text{o bien,} \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Debido a que la última ecuación es cuadrática en e^y, la fórmula cuadrática proporciona

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}. \tag{24}$$

Luego, es necesario rechazar la solución correspondiente al signo menos en (24) porque $e^y > 0$ pero $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$. Así, tenemos

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{o bien,} \quad y = \operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

En forma semejante, para $y = \tanh^{-1}x$, $|x| < 1$,

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

proporciona

$$e^y(1 - x) = (1 + x)e^{-y}$$

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$2y = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

o bien,

$$y = \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

Se han demostrado dos resultados del siguiente teorema.

Teorema 3.10.3 Identidades logarítmicas

$$\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad \cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), x \geq 1 \tag{25}$$

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), |x| < 1 \qquad \coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right), |x| > 1 \tag{26}$$

$$\operatorname{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), 0 < x \leq 1 \qquad \operatorname{csch}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), x \neq 0 \tag{27}$$

Las identidades anteriores constituyen un medio conveniente para obtener los valores numéricos de una función hiperbólica inversa. Por ejemplo, con ayuda de una calculadora, a partir del primer resultado en (25) en el teorema 3.10.3 vemos que cuando $x = 4$,

$$\operatorname{senh}^{-1}4 = \ln\left(4 + \sqrt{17}\right) \approx 2.0947.$$

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas Para encontrar la derivada de una función hiperbólica inversa es posible proceder de dos formas. Por ejemplo, si

$$y = \operatorname{senh}^{-1}x \quad \text{entonces} \quad x = \operatorname{senh} y.$$

Al usar diferenciación implícita es posible escribir

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\operatorname{senh} y$$

$$1 = \cosh y\frac{dy}{dx}.$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

El resultado anterior puede obtenerse de otra manera. Por el teorema 3.10.3 sabemos que

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

En consecuencia, por la derivada del logaritmo obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x\right) \quad \leftarrow \text{por (3) de la sección 3.9}$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Esencialmente, se ha demostrado la primera entrada en (28) en el siguiente teorema.

Teorema 3.10.4 Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}, \; u > 1, \qquad (28)$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1} u = \frac{1}{1 - u^2} \frac{du}{dx}, \quad |u| < 1, \qquad \frac{d}{dx}\coth^{-1} u = \frac{1}{1 - u^2} \frac{du}{dx}, \; |u| > 1, \qquad (29)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} u = \frac{-1}{u\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}, \; 0 < u < 1, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} u = \frac{-1}{|u|\sqrt{1 + u^2}} \frac{du}{dx}, \; u \neq 0. \qquad (30)$$

EJEMPLO 3 Derivada del coseno hiperbólico inverso

Diferencie $y = \cosh^{-1}(x^2 + 5)$.

Solución Con $u = x^2 + 5$, por la segunda fórmula en (28) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 5)^2 - 1}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 5) = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 10x^2 + 24}}.$$

■

EJEMPLO 4 Derivada de la tangente hiperbólica inversa

Diferencie $y = \tanh^{-1} 4x$.

Solución Con $u = 4x$ por la primera fórmula en (29) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - (4x)^2} \cdot \frac{d}{dx}4x = \frac{4}{1 - 16x^2}.$$

■

EJEMPLO 5 Reglas del producto y de la cadena

Diferencie $y = e^{x^2} \operatorname{sech}^{-1} x$.

Solución Por la regla del producto y la primera fórmula en (30) tenemos

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}\underbrace{\left(\frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}\right)}_{\text{por la primera fórmula en (30)}} + \underbrace{2xe^{x^2}}_{\text{por (14) de la sección 3.8}}\operatorname{sech}^{-1} x$$

$$= -\frac{e^{x^2}}{x\sqrt{1 - x^2}} + 2xe^{x^2}\operatorname{sech}^{-1} x.$$

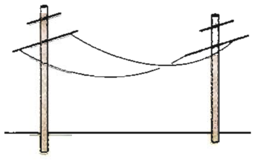
■

$\frac{d}{dx}$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Como se mencionó en la introducción de esta sección, la gráfica de cualquier función de la forma $f(x) = k \cosh cx$, k y c constantes, se denomina **catenaria**. La forma que asume un alambre flexible o una cuerda pesada que cuelgan entre dos postes básicamente es la misma que la de la función coseno hiperbólico. Además, si dos anillos circulares se mantienen juntos en forma vertical y no están muy separados entre sí, entonces una película jabonosa estirada entre los anillos asume una superficie con área mínima. La superficie es una porción de una **catenoide**, que es la superficie que obtenemos al hacer girar una catenaria alrededor del eje x. Vea la FIGURA 3.10.4.

ii) La semejanza entre las funciones trigonométricas e hiperbólicas va más allá de las fórmulas de derivadas y las identidades básicas. Si t es un ángulo medido en radianes cuyo lado terminal es OP, entonces las coordenadas de P sobre una *circunferencia* unitaria $x^2 + y^2 = 1$ son $(\cos t, \operatorname{sen} t)$. Luego, el área del sector sombreado que se muestra en la FIGURA 3.10.5*a*) es $A = \frac{1}{2}t$ y así $t = 2A$. De esta forma, las *funciones circulares* $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ pueden considerarse funciones del área A.

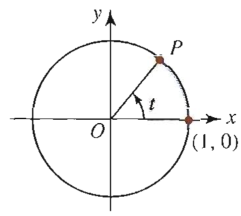
Tal vez usted ya sepa que la gráfica de la ecuación $x^2 - y^2 = 1$ se denomina *hipérbola*. Debido a que $\cosh t \geq 1$ y $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$, se concluye que las coordenadas de un punto P sobre la rama derecha de la hipérbola son $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$. Además, puede demostrarse que el área del sector hiperbólico en la figura 3.10.5*b*) está relacionado con el número t por $t = 2A$. Por tanto, vemos el origen del nombre de la *función hiperbólica*.



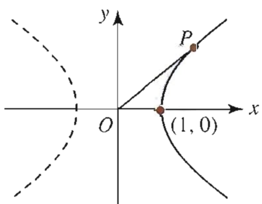
a) cables colgantes

b) película de jabón

FIGURA 3.10.4 Catenaria en *a*); catenoide en *b*)



a) sector circular



b) sector hiperbólico

FIGURA 3.10.5 Círculo en *a*); hipérbola en *b*)

Ejercicios 3.10

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-12.

≡ Fundamentos

1. Si $\operatorname{senh} x = -\frac{1}{2}$, encuentre los valores de las funciones hiperbólicas restantes.
2. Si $\cosh x = 3$, encuentre los valores de las funciones hiperbólicas restantes.

En los problemas 3-26, encuentre la derivada de la función dada.

3. $y = \cosh 10x$
4. $y = \operatorname{sech} 8x$
5. $y = \tanh \sqrt{x}$
6. $y = \operatorname{csch} \frac{1}{x}$
7. $y = \operatorname{sech}(3x - 1)^2$
8. $y = \operatorname{senh} e^{x^2}$
9. $y = \coth(\cosh 3x)$
10. $y = \tanh(\operatorname{senh} x^3)$
11. $y = \operatorname{senh} 2x \cosh 3x$
12. $y = \operatorname{sech} x \coth 4x$
13. $y = x \cosh x^2$
14. $y = \frac{\operatorname{senh} x}{x}$
15. $y = \operatorname{senh}^3 x$
16. $y = \cosh^4 \sqrt{x}$
17. $f(x) = (x - \cosh x)^{2/3}$
18. $f(x) = \sqrt{4 + \tanh 6x}$
19. $f(x) = \ln(\cosh 4x)$
20. $f(x) = (\ln(\operatorname{sech} x))^2$
21. $f(x) = \frac{e^x}{1 + \cosh x}$
22. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + \operatorname{senh} x}$
23. $F(t) = e^{\operatorname{senh} t}$
24. $H(t) = e^t e^{\operatorname{csch} t^2}$
25. $g(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{senh} 2t}$
26. $w(t) = \frac{\tanh t}{(1 + \cosh t)^2}$
27. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \operatorname{senh} 3x$ en $x = 0$.
28. Encuentre de la recta tangente a la gráfica de $y = \cosh x$ en $x = 1$.

En los problemas 29 y 30, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la tangente es horizontal.

29. $f(x) = (x^2 - 2)\cosh x - 2x \operatorname{senh} x$
30. $f(x) = \cos x \cosh x - \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x$

En los problemas 31 y 32, encuentre d^2y/dx^2 para la función dada.

31. $y = \tanh x$
32. $y = \operatorname{sech} x$

En los problemas 33 y 34, C_1, C_2, C_3, C_4 y k son constantes reales arbitrarias. Demuestre que la función satisface la ecuación diferencial dada.

33. $y = C_1 \cosh kx + C_2 \operatorname{senh} kx$; $\quad y'' - k^2 y = 0$
34. $y = C_1 \cos kx + C_2 \operatorname{sen} kx + C_3 \cosh kx + C_4 \operatorname{senh} kx$; $y^{(4)} - k^4 y = 0$